



**UNIVERSIDAD DEL AZUAY**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

**Departamento de Posgrados**

**Ajuste de un modelo de dinámica rotacional de un eje  
de turbocompresor en condiciones transitorias**

**Trabajo de graduación previo a la obtención del título de  
Magíster en Sistemas Vehiculares**

**Autor: Ing. Fausto Ávila Luna**

**Director: Ing. Miguel Andrés López Hidalgo, PhD**

**Cuenca, Ecuador**

**2016**

## **DEDICATORIA**

El presente trabajo lo quiero dedicar principalmente a mi esposa Marilyn que con su cariño, comprensión y respeto me ha apoyado durante todo este trayecto.

A mi hija Samy que es la razón de mí existir.

A toda mi familia que con su confianza, esfuerzo y buenos valores han sabido guiarme por la senda de superación.

Ing. Fausto Andrés Avila Luna

## **AGRADECIMIENTOS**

Un agradecimiento muy particular al Dr. Andrés López Hidalgo que con su gran conocimiento y experticia ha sabido guiarme de manera correcta durante todo el proyecto.

También un agradecimiento y un abrazo fraterno a todos los profesores de la UDA que en esta Maestría que de manera muy atenta supieron actualizar nuestros conocimientos.

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

Dedicatoria .....	ii
Agradecimiento.....	iii
Índice de Contenidos .....	iv
Índice de Figuras .....	vi
Índice de Tablas .....	vii
Índice Ecuaciones.....	vii
Índice de Anexos .....	viii
Resumen .....	ix
Abstract .....	x
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes Generales.....	1
1.2 Motivación, justificación e importancia de la investigación.....	2
1.3 Problemática .....	3
1.4 Formulación del problema.....	4
1.5 Objetivos .....	4
1.5.1 Objetivo General.....	4
1.5.2 Objetivos Específicos.....	4
1.6 Bibliografía .....	4
<b>CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>6</b>
2.1 Fundamentos Teóricos del Movimiento del eje.....	6
2.2 Estudio de los Cojinetes en Turbocompresores .....	8
2.2.1 Hipótesis de la Teoría Hidrodinámica .....	9
2.2.2 Modelado de cojinetes en Dinámica Rotacional.....	10
2.3 Fuerzas de la Película de Aceite .....	10
2.4 Método para la obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguación .....	14
2.5 Identificación de velocidades críticas .....	16
2.6 Bibliografía .....	18

<b>CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE DATOS EXPERIMENTALES .....</b>	<b>19</b>
3.1 Obtención de órbitas experimentales .....	19
3.2 Cálculo de coeficientes de rigidez y amortiguación de la película de lubricación .....	22
3.3 Obtención de las órbitas modeladas .....	25
3.4 Ajuste de coeficientes de rigidez y amortiguación a diferentes velocidades.	29
3.5 Análisis del comportamiento de la órbita a diferentes velocidades .....	34
3.6 Análisis transitorio .....	36
3.6.1 Ecuaciones características agrupadas .....	42
3.6.1.1 Ecuaciones características de 20 krpm a 60 krpm .....	42
3.6.1.2 Ecuaciones características de 70 krpm a 100 krpm.....	44
3.6.1.3 Ecuaciones características de 110 krpm a 150 krpm.....	45
3.7 Conclusiones.....	49
3.8 Bibliografía.....	50
<b>CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>51</b>
4.1 Conclusiones sobre la obtención de coeficientes de rigidez y amortiguación .....	51
4.2 Conclusión sobre la obtención de órbitas .....	52
4.3 Conclusión sobre el ajuste de coeficientes .....	53
4.4 Conclusión sobre la obtención de las ecuaciones características de los coeficientes. ....	55
4.5 Recomendaciones y trabajos posteriores .....	55
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>57</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 <i>Coefficientes de rigidez y amortiguación</i> .....	10
Figura 2.2 <i>Fuerzas de la película de lubricación en el cojinete</i> .....	13
Figura 2.3 <i>Esquema diagrama de Campbell</i> .....	17
Figura 3.1 <i>Diagrama de flujo “metodología para la obtención de coeficientes de rigidez y amortiguación”</i> .....	20
Figura 3.2 <i>Comportamiento de la órbita a lo largo del eje</i> .....	21
Figura 3.3 <i>Proyección de la órbita en el extremo del cojinete</i> .....	21
Figura 3.4 <i>Órbita Experimental y Órbita proyectada</i> .....	22
Figura 3.5 <i>Coefficientes de Rigidez obtenidos a diferentes velocidades</i> .....	23
Figura 3.6 <i>Coefficientes de Amortiguación obtenidos a diferentes velocidades</i> .....	24
Figura 3.7 <i>Eje del Turbocompresor modelado</i> .....	26
Figura 3.8 <i>Características de la órbita elíptica obtenidas en APDL</i> .....	27
Figura 3.9 <i>Órbita experimental vs órbita de semiejes promedio obtenidas a 150 krpm</i> .....	27
Figura 3.10 <i>Semiejes medidos a diferentes Velocidades del Eje de TC</i> .....	28
Figura 3.11 <i>Semiejes experimentales y modelados</i> .....	28
Figura 3.12 <i>Ajuste de coeficientes a 150 krpm</i> .....	30
Figura 3.13 <i>Semiejes experimentales y APDL</i> .....	30
Figura 3.14 <i>Órbitas ajustadas de 20 krpm a 140 krpm</i> .....	33
Figura 3.15 <i>Formas de la órbita a 40 krpm</i> .....	34
Figura 3.16 <i>Diagrama de fuerzas en el eje del turbocompresor</i> .....	34
Figura 3.17 <i>Incidencia de la fuerza de lubricación y desequilibrio en el comportamiento de la órbita</i> .....	36
Figura 3.18 <i>Incidencia de los coeficientes de rigidez en el comportamiento de la órbita</i> .....	37
Figura 3.19 <i>Incidencia de los coeficientes de rigidez en el comportamiento de la órbita (70 - 100 krpm)</i> .....	37
Figura 3.20 <i>Comportamiento de la velocidad de la órbita a diferentes velocidades en el eje del TC</i> .....	39
Figura 3.21 <i>Curvas características de los Coeficientes de Rigidez</i> .....	40
Figura 3.22 <i>Curvas características de los coeficientes de amortiguación</i> .....	41
Figura 3.23 <i>Comparación del semieje “A” en todas las velocidades</i> .....	47
Figura 3.24 <i>Comparación del semieje “B” en todas las velocidades</i> .....	47
Figura 3.25 <i>Comparación entre coeficientes estacionarios y coeficientes transitorios</i> .....	49
Figura 4.1 <i>Errores finales en los semiejes</i> .....	53

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 <i>Coeficientes de Rigidez y Amortiguación obtenidos por diferentes autores.</i>	24
Tabla 3.2 <i>Características del TC experimentado.</i>	25
Tabla 3.3 <i>Coeficientes finales con ajuste calculado a 150 krpm</i>	30
Tabla 3.4 <i>Comparación de órbitas con coeficientes ajustados.</i>	31
Tabla 3.5 <i>Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 20-60 krpm</i>	42
Tabla 3.6 <i>Coeficientes de las ecuaciones obtenidas de 20 a 60 krpm</i>	43
Tabla 3.7 <i>Coeficientes de las ecuaciones obtenidas de 70 a 100 krpm</i>	44
Tabla 3.8 <i>Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 70-100 krpm</i>	45
Tabla 3.9 <i>Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 110-150 krpm</i>	45
Tabla 3.10 <i>Coeficientes de las ecuaciones obtenidas de 110 a 150 krpm</i>	45
Tabla 3.11 <i>Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 55,85 y 135 krpm</i>	46

## ÍNDICE DE ECUACIONES

Ec. 2.1	7
Ec. 2.2	9
Ec. 2.3	11
Ec. 2.4	11
Ec. 2.5	11
Ec. 2.6	12
Ec. 2.7	12
Ec. 2.8	12
Ec. 2.9	12
Ec. 2.10	13
Ec. 2.11	13
Ec. 2.12	14
Ec. 2.13	15
Ec. 2.14	15
Ec. 2.15	15
Ec. 2.16	15
Ec. 2.17	16
Ec. 3.1	35
Ec. 3.2	43

## ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo. 1 <i>Coefficientes de Rigidez y Amortiguación obtenidos a diferentes velocidades</i> .....	59
Anexo. 2 <i>Código utilizado en APDL para la obtención de órbitas en el modelo 2D (López, 2014)</i> . ....	60
Anexo. 3 <i>Semiejes medidos y perímetros experimentales</i> .....	67
Anexo. 4 <i>Órbitas calculadas a diferentes velocidades</i> .....	68
Anexo. 5 <i>Coefficientes y órbitas ajustadas</i> .....	69
Anexo. 6 <i>Metodología “modelo matemático aplicado a 140 krpm”</i> . ....	70
Anexo. 7 <i>Metodología aplicada “ajuste de coeficientes a 140 krpm”</i> . ....	71
Anexo. 8 <i>Metodología aplicada “ajuste de coeficientes 50 krpm”</i> . ....	72
Anexo. 9 <i>Procedimiento para la obtención de las ecuaciones características en Derive 6.0</i> . ....	73
Anexo. 10 <i>Coefficientes de rigidez y amortiguación obtenidos en estado transitorio</i> .....	74

## RESUMEN

En el presente trabajo se realizó el ajuste de un modelo de dinámica rotacional de un eje de Turbocompresor en condiciones transitorias, obtenido previamente en una investigación doctoral realizada en condiciones estacionarias; se utilizó la base teórica descrita, el modelo de dinámica rotacional y los datos experimentales obtenidos en la investigación anterior.

En este modelo de dinámica rotacional se determinaron los coeficientes de rigidez y amortiguación de la película de aceite, en un rango de velocidad de entre 20 krpm a 150 krpm, también se determinó que en altas y bajas rpm los coeficientes se obtuvieron con un menor tiempo de cálculo, debido a un comportamiento similar entre coeficientes, lo contrario sucede en la mitad del rango donde existe un comportamiento diferente entre coeficientes y crea una mayor dificultad en su obtención.

Se obtuvieron las ecuaciones características en cada uno de los coeficientes, con la finalidad de generalizar el sistema y proponer estos resultados para un análisis post investigación, luego se calcularon las órbitas a 55, 85 y a 135 krpm obteniendo resultados aceptables considerando las diferencias entre las órbitas experimentales estacionarias y las órbitas experimentales transitorias.

## ABSTRACT

This research paper deals with the adjustment of a turbocharger shaft rotational dynamics model in transient conditions, which was previously obtained in a doctoral research carried out in stationary conditions. The theoretical background described, the rotational dynamics model, and the experimental data obtained in previous research were used in this study. In this rotational dynamics model, the stiffness and damping coefficients of the oil film were determined in a speed range from 20 Krpm to 150 Krpm. It was also found that the ratios were obtained with a shorter time calculation in high and low rpm due to a similar behavior between coefficients. The opposite occurs in the middle of the range where a different behavior between coefficients is observed, creating greater difficulty in obtaining it. The characteristic equations in each of the coefficients were obtained for the purpose of generalizing the system so as to propose these results for a post research analysis. Then, the orbits were calculated at 55, 85 and 135 Krpm; obtaining acceptable results when taking into account the differences between stationary experimental orbits and transient experimental orbits.



  
Translated by,  
Lic. Lourdes Crespo

# CAPITULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes generales

Los Turbocompresores “TC” desde su aparición a comienzos del siglo XX, han ido creándose un espacio cada vez más importante en la ingeniería del automóvil, pasando de ser un aditamento mecánico para aumentar el rendimiento y la potencia de los motores a convertirse en un elemento clave en la disminución de las emisiones.

Poco después de la concepción de los motores de combustión interna desarrollados por (Daimler Gottlieb, s.f.) entre los años 1880 y 1890, aparecen los TC con la intención de incrementar la potencia de los mismos y reducir el consumo de combustible mediante la precompresión del aire en la admisión, pero el gran avance lo daría el suizo (Alfred J Büchi, s.f.) a principios del siglo pasado, al ser el primero en tener la idea de aprovechar la energía de los gases de escape del motor para mover un compresor y patentó el primer compresor el 16 de noviembre de 1905.

El invento de (Alfred J Büchi, s.f.) ingresaba más aire al interior de los cilindros del motor y aumentaba su llenado, lo que, asociado a una mayor alimentación de combustible, producía un aumento notable de la potencia. Entre 1911 y 1914, el técnico suizo trabajó febrilmente con el compresor aplicado a motores diésel, y en 1915 ya había avanzado lo suficiente como para registrar una patente que describe los principios de funcionamiento del turbocompresor y que son muy similares a los que se conocen en la actualidad.

No obstante, pese a que (Alfred J Büchi, s.f.) es el incuestionable inventor de la sobrealimentación, no se debe olvidar que tanto el propio (Daimler Gottlieb, s.f.) como (Louis Renault, s.f.) ya habían patentado con anterioridad sistemas de compresión del aire de admisión mecánicamente por el propio motor, pero hasta entonces nadie se había planteado extraer la energía necesaria aprovechando la de los gases de escape. Más tarde el turbo se empezó a adoptar de forma habitual en los aviones ya que al aumentar la altitud disminuía la presión y la densidad del aire, mermando la potencia de los motores, problema que solventaron utilizando tanto compresores mecánicos como turbocompresores.

No fue hasta los años 60 cuando el turbo se aplicó en el mundo del automóvil. La turboalimentación encontró en los motores diésel una relación de simbiosis. Este éxito abrumador del diésel en Europa es debido en gran parte a los Turbocompresores.

En la actualidad las normativas medioambientales fuerzan cada vez más a construir vehículos más eficientes y limpios. Esto obliga a los grandes fabricantes de vehículos a mirar otra alternativa para seguir cumpliendo con las normativas y vender vehículos que sigan cumpliendo con las expectativas. El concepto del downsizing, “motores de pequeño tamaño, muy comprimidos y eficientes”, es el que se encuentra en su máximo desarrollo, y uno de sus pilares fundamentales es la sobrealimentación tanto así que la industria se ha olvidado de los motores de aspiración atmosférica. En su defecto, la adición de turbocompresores en diferentes números y configuraciones es el camino a seguir para rendir de entre 150 y 250 CV de potencia por cada litro de desplazamiento.

## **1.2 Motivación, justificación e importancia de la investigación**

En la actualidad todos los motores diésel en automotores son sobrealimentados mediante turbocompresores, es por ello que se hace necesario profundizar en el conocimiento de los procesos físicos que ocurren en éstos.

Los fabricantes de turbocompresores tienen por objetivo principal estudiar los defectos que se presentan en su desempeño, de ahí la aparición de una gran cantidad de técnicas experimentales con la finalidad de detectar y predecir fallos en estos TC.

La dinámica rotacional es la parte de la física que analiza los comportamientos dinámicos en máquinas rotativas. La densidad potencial que alcanzan las máquinas rotativas es muy elevada. Una característica de estas máquinas es que permiten altas densidades de potencia y velocidades de flujo que se logra con la velocidad de giro, en relación a otros tipos de máquina de tamaño similar. La mayoría de las aplicaciones de estas máquinas suelen ser: motores para aviación, motores para locomotoras o para producción eléctrica en centrales.

En el diseño, la operación y solución de problemas en máquinas rotativas, el análisis de la dinámica rotacional puede ayudar a lograr los siguientes objetivos:

1. Predecir las velocidades críticas.
2. Modificar el diseño del modelo para evitar las velocidades críticas.

3. Predecir las frecuencias naturales de la vibración torsional.
4. Calculo del equilibrado de masas y su posición mediante los datos de vibración.
5. Predecir amplitudes de las vibraciones síncronas causadas por el desequilibrio en el eje.

### **1.3 Problemática**

Por medio de la experimentación y la realización de modelos matemáticos además de la experiencia que se va recogiendo en trabajos de investigación ya realizados no solo en el campo de los compresores centrífugos, sino también de la experiencia adquirida en la industria de la aviación con los compresores axiales, son los caminos seguidos orientados al desarrollo de los nuevos compresores empleados en la automoción.

Se han desarrollado algunas investigaciones sobre el tema, (Brown R.D., 2000) describe, que el movimiento caótico en ejes apoyados en cojinetes puede ocurrir cuando se exceden ciertos valores de desequilibrio del eje, para medir este movimiento se han utilizado diferentes tipos de medición como (Kirk R.G., 2008) que mide el movimiento del eje de turbocompresor con cojinetes flotantes aplicando sensores inductivos, (Vistamehr, 2009) también presentó un modelo con el método de elementos finitos y compara los resultados del modelo con medidas experimentales obteniendo buena concordancia.

En la investigación de (López, 2014) la cuál es la base para este trabajo, se realiza un análisis transitorio en el movimiento del eje del turbocompresor, se obtiene resultados muy aproximados a los experimentales medidos en el mismo trabajo y se concluye de la siguiente manera “Cada eje de cada turbocompresor tiene su propio desequilibrio y es por esto que la predicción con mayor exactitud del fenómeno del movimiento y vibración en el eje se vuelve un caso muy particular para cada turbocompresor, por lo que se considera que no se justifica el uso de modelos complejos del problema a resolver y la solución muy particular a obtener”. Con las bases teóricas generadas, el modelo de dinámica rotacional y los datos experimentales obtenidos en la investigación de (López, 2014); se realizará el ajuste del modelo para condiciones transitorias, ya que en la tesis se llegó a ajustar el modelo en condiciones estacionarias a 150 krpm.

## **1.4 Formulación del problema**

El problema principal a resolver es el de obtener los coeficientes reales de rigidez y amortiguación del modelo en condiciones transitorias de funcionamiento en el eje del TC, ya que el modelo en la tesis (López, 2014) fue ajustado para 150 krpm en estado estacionario por lo que se elabora la siguiente hipótesis:

Con las bases científicas y el análisis matemático desarrollado en (López, 2014) se obtendrán todos los coeficientes de rigidez y amortiguación en las velocidades restantes en un rango de 20 krpm a 150 krpm, luego se compararán con los datos experimentales obtenidos en (López, 2014) y se realizará un análisis en estado transitorio.

## **1.5 Objetivos**

Las metas propuestas en este proyecto se basan en el ajuste de los coeficientes calculados a diferentes velocidades en el TC mediante un análisis transitorio.

### **1.5.1 Objetivo general:**

- Ajustar un modelo de dinámica rotacional de un eje de turbocompresor en condiciones transitorias.

### **1.5.2 Objetivos específicos:**

- Realizar la comparación entre los datos teóricos y los experimentales, mediante un modelo de dinámica rotacional.
- Obtener los coeficientes de rigidez y amortiguación a cada velocidad.
- Efectuar un ajuste óptimo de los coeficientes calculados.
- Realizar un análisis y ajuste de los coeficientes en condiciones transitorias.

## **1.6 Bibliografía:**

Alfred J Büchi. (s.f.). <http://ae-plus.com/milestones/alfred-bchi-the-inventor-of-the-turbocharger>.

Brown R.D., D. G. (2000). *Journal of Engineering Tribology*.

Daimler Gottlieb. (s.f.). <http://www.buscabiografias.com>.

- Hung, N. S. (2012). *Rotordynamics of Automotive Turbochargers*. Springer.
- Kirk R.G., A. A. (2008). *Experimental Test Results for Vibration of a High Speed Diesel Engine Turbocharger*.
- López, A. (2014). *Estudio teórico experimental de la Dinámica Rotacional de Turbocompresores de MCIA. Aplicación al diagnóstico de fallos*. Valencia: Politécnica de Valencia.
- Louis Renault. (s.f.). <http://www.buscabiografias.com>.
- Schweizer, B. (2009). Total instability of turbocharger rotors. *Journal of Sound and Vibration*.
- Vistamehr, A. (2009). *Analysis of Automotive turbocharger nonlinear vibration including bifurcations*. Master Thesis.

## CAPITULO 2

### MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

#### Introducción

La dinámica rotacional estudia los cuerpos en rotación pueden ser rígidos o flexibles, tiene aplicaciones en campos tan diversos como las turbo máquinas, los satélites, las máquinas electromecánicas, etc.

Su estudio es de fundamental importancia en la etapa de diseño, se utiliza para establecer las dimensiones básicas de las partes rodantes que garanticen una operación suave y confiable, distancia entre apoyos, diámetros mínimos y máximos de los ejes, velocidades de operación, juego entre las partes etc.

También en la etapa post-diseño, la performance y confiabilidad de las mismas está estrechamente ligada con sus características dinámicas por lo que es una herramienta fundamental en la detección de fallas.

Algunos ejemplos en donde se aplica con frecuencia es el balanceo de turbogeneradores y compresores, en el diagnóstico de fallas tales como: desalineaciones, fisuras en los ejes, desgaste de cojinetes y rodamientos; y en general en la identificación de puntos críticos de funcionamiento y en la supresión de vibraciones.

En este capítulo inicial se realizará una revisión del estado del arte, en donde se indicarán los fundamentos de la dinámica rotacional, también se repasarán las investigaciones realizadas sobre movimientos de ejes en turbocompresores, generando las bases científicas que soporten la investigación.

#### 2.1 Fundamentos Teóricos del Movimiento del eje

El rotor o eje del turbocompresor es el elemento principal de la investigación. *“Un rotor es todo cuerpo que experimente una rotación ya sea en forma continua o alternativa”.*

*“Los rotores se dividen en rígidos, flexibles y semirrígidos o semiflexibles para indicar estados intermedios”.*

*“Un rotor rígido es aquel que opera bastante por debajo de su primera velocidad crítica o primera frecuencia natural de vibración” (Juan Ignacio, 2004).*

Por el contrario, el rotor flexible es aquel en que su velocidad nominal de rotación está en las proximidades o es superior a su primera frecuencia natural de vibración.

Entendiéndose como frecuencia natural de vibración o velocidad crítica a cualquiera de las velocidades que coinciden con la frecuencia natural de vibración del rotor.

El principal problema de la dinámica rotacional es analizar las posibles respuestas de un rotor o eje a diversas excitaciones o esfuerzos, razón por la cual el análisis puede ser dividido en tres casos, vibración lateral, vibración torsional y vibración longitudinal, para el caso del análisis en el eje del turbocompresor se estudiarán las vibraciones laterales y los rotores flexibles que son los que caracterizan al eje del TC en un MCIA.

La dinámica rotacional mediante las siguientes ecuaciones matriciales (Ec. 2.1) relaciona las diferentes causas que generan las vibraciones laterales en el rotor o eje.

$$M\ddot{x} + C_s\dot{x} + K_s x = f(t)$$

Ec. 2.1

$$C_s = (G + C_j)$$

$$K_s = (K_j + K_c)$$

Donde

$M$  = matriz de masas e inercias;

$C_s$  = matriz de coeficientes de amortiguación del eje;

$K_s$  = matriz de coeficientes de rigidez del eje;

$G$  = matriz de amortiguación correspondiente a la energía cinética y al efecto coriolis del eje;

$C_j$  = matriz de amortiguación correspondiente a las características del eje como el material y geometría;

$K_j$  = matriz de rigidez correspondiente a la energía potencial del eje;

$K_c$  = matriz de rigidez correspondiente a las características del eje como el material y geometría;

$x$  = vector de vibración del eje con todos los grados de libertad del eje;

$\dot{x}$  = vector de velocidad del movimiento en el eje;

$\ddot{x}$  = vector de aceleración del movimiento en el eje;

$f$  = vector de fuerzas de excitación (fuerzas de masas en desequilibrio, fuerzas provenientes de las películas de lubricación, fuerzas de los gases de escape por turbina, fuerzas del aire por el compresor);

Al saber todos los vectores que intervienen en el comportamiento del rotor, el principal objetivo es calcular los coeficientes de rigidez y amortiguación que van a definir el comportamiento del movimiento del eje.

## 2.2 Estudio de los Cojinetes en Turbocompresores

Los principales movimientos que se producen en el eje del TC, son 3:

- Axial (movimiento a lo largo del eje, producido por los gases escape que actúan en la turbina y la presión del aire en la rueda del compresor).
- Radial o Rotacional (producido por las fuerzas que actúan en el eje)
- Traslacional (es el movimiento que describe las órbitas)

Para evitar que estas fuerzas provoquen el contacto entre el eje o rotor y las partes fijas es necesario incorporar dos tipos de cojinetes unos axiales y otros radiales en la carcasa central.

Según (Yukio, 2006) los cojinetes que poseen una película de lubricación se clasifican en:

Por el principio de operación:

**Cojinetes hidrodinámicos**, producen la presión de lubricación para soportar las cargas gracias a la velocidad de rotación del eje dentro del cojinete.

**Cojinetes hidroestáticos**, la presión es producida por una fuente externa.

Por la dirección de la carga:

**Cojinetes radiales**, estos soportan las cargas normales al eje de rotación.

**Cojinetes axiales**, soportan las cargas paralelas al eje.

Por la forma del cojinete

**Cojinetes circulares**, esta es la forma más usual de cojinetes radiales.

**Cojinetes parciales**, son utilizados para soportar grandes cargas.

**Cojinetes de dos y tres arcos**, estos son utilizados para dar una mejor estabilidad y por lo general se denominan *multi-arc bearings*.

**Cojinetes basculantes**, consisten en varios segmentos de cojinetes que pueden bascular libremente.

**Cojinetes flotantes**, son utilizados principalmente para eliminar las vibraciones de los ejes y se aplican en ejes de pequeña magnitud.

Por el lubricante

**Cojinetes con aceite.**

**Cojinetes con gas.**

**Cojinetes con grasa e incluso.**

**Cojinetes electromagnéticos.**

**Cojinetes con aire y láminas metálicas.**

Es importante tener en cuenta que, aunque la presencia de una capa de aceite elimina o al menos reduce el contacto directo de metal contra metal, surge un

rozamiento dentro de la capa de aceite, el cual es preciso tener en cuenta. Dicho rozamiento es debido a la inercia del líquido al ser arrastrado por la cohesión y adherencia de sus moléculas a esta característica del aceite lubricante se le denomina viscosidad.

La viscosidad es una propiedad absoluta de los lubricantes. Si dos planos paralelos, con una distancia unitaria y separados por un fluido, se mueven uno respecto al otro con una velocidad unitaria, la fuerza tangencial que se ejerce por unidad de superficie sobre cada uno de ambos planos se denomina viscosidad del fluido. La magnitud definida de esta manera es la viscosidad dinámica y se mide en poise (P). Sin embargo, en la práctica analítica, se emplea generalmente la viscosidad cinemática. La viscosidad cinemática se determina midiendo el tiempo necesario para que cierto volumen de aceite fluya por un tubo capilar bajo la única acción de su peso

El estudio de los cojinetes va íntimamente ligado al estudio de la película de lubricante que se sitúa entre las partes móviles.

### 2.2.1 Teoría hidrodinámica de Reynolds

La teoría Hidrodinámica de Reynolds se fundamenta en una serie de Hipótesis de entre las que destacan las siguientes.

- a. El fluido es newtoniano y en coeficiente de viscosidad es constante.
- b. El lubricante responde a la ley de Newton de movimiento de un fluido viscoso Ec. 2.2.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dh}$$

Ec. 2.2

- $\tau$  = esfuerzo cortante es la fuerza tangencial dividida entre el área.
  - $\mu$  = viscosidad dinámica.
  - $\frac{dv}{dh}$  = velocidad de corte o cizallamiento
- c. Se supone que el fluido es incompresible.
  - d. La presión es constante en la dirección axial (espesor).
  - e. El flujo es laminar.
  - f. El fluido se adhiere a las superficies sólidas.
  - g. Las superficies son rígidas.
  - h. Las fuerzas de gravedad e inercia que actúan en el fluido pueden ser ignoradas comparadas con la fuerza de viscosidad.
  - i. La presión del fluido no cambia en todo el espesor de la película.

### 2.2.2 Modelado de cojinetes en Dinámica Rotacional

Un modelo bastante exitoso para representar cojinetes y su interacción con los rotores o ejes, es el de remplazarlos por resortes y amortiguadores dentro del modelo de dinámica rotacional, esto trae consigo grandes simplificaciones, pero en general provee buenos resultados prácticos siempre y cuando se conozcan sus limitaciones. El modelo de un cojinete se puede representar como indica la Figura 2.1.

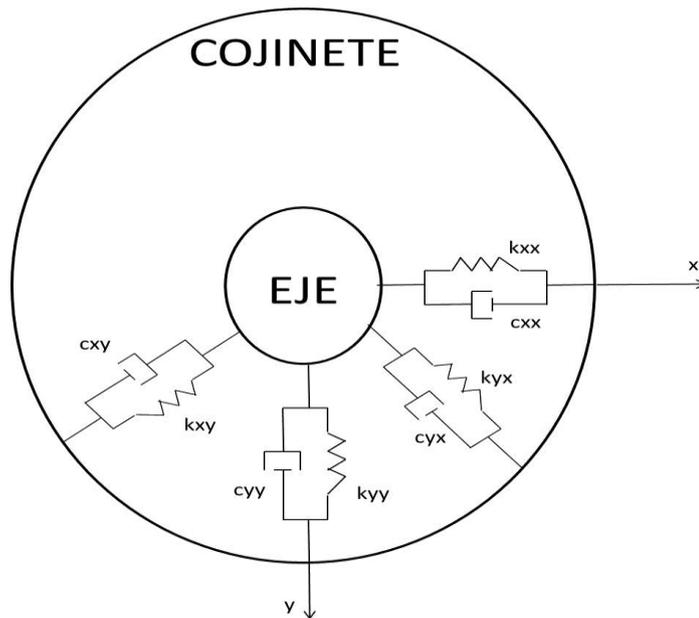


Figura 2.1 Coeficientes de rigidez y amortiguación

FUENTE: El Autor

Los cojinetes están representados por la ecuación de lubricación de Reynolds Ec. 2.3, que es una ecuación diferencial de dos variables que no tiene solución analítica, sin embargo, es posible resolverla numéricamente y existen diversos algoritmos que la resuelven. De la resolución de esta ecuación se obtiene un perfil de distribución de presiones y una posición de equilibrio para el eje del cojinete. Para poder conocer las características de rigidez y amortiguamiento lo que se hace es resolver la ecuación de Reynolds Ec. 2.3, linealizada en el punto de equilibrio.

### 2.3 Fuerzas de la Película de Aceite

La presión de la película de aceite en un cojinete liso en estado estacionario viene dada por la siguiente ecuación de Reynolds Ec. 2.3, donde el eje  $x$  se toma en la dirección circunferencial del cojinete y el eje  $z$  está en la dirección axial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

Ec. 2.3

Donde  $p(x, z)$  es la presión de la película de aceite,  $h(x, z)$  es el espesor de la película de aceite, y  $U_2$  es la velocidad circunferencial dentro del cojinete.

La solución general de la Ec. 2.3 no puede obtenerse analíticamente por lo que se realizan las siguientes aproximaciones o soluciones numéricas.

- La aproximación de **cojinete infinito** supone un rodamiento suficientemente largo en la dirección axial y excluye el segundo término del lado izquierdo de la ecuación anterior, lo que le permite ser resuelto analíticamente.

- La aproximación de **cojinete corto** asume un cojinete suficientemente corto en la dirección axial y deja de lado el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior, lo que le permite ser resuelto analíticamente.

- Para los **cojinetes** de longitud **finita**, la ecuación no puede resolverse analíticamente, por lo tanto, se debe aplicar un método numérico, el método de diferencias finitas o el método de elementos finitos, o por un aproximado método analítico mediante el desarrollo de la presión como una serie de funciones trigonométricas.

Para obtener matemáticamente las fuerzas de la presión de aceite, se multiplica la presión de la película de aceite  $p(\phi)$  por el  $\cos(\phi)$  y el  $\sin(\phi)$ , luego se integra en el rango de  $(\phi = 0 - \pi)$  como se muestra en la Ec. 2.4 donde se representan las fuerzas de la película de aceite en condiciones de frontera de Gumbel's (Yukio, 2006).

$$F_r = L R_j \int_0^\pi p(\phi) \cos \phi d\phi, F_{tg} = L R_j \int_0^\pi p(\phi) \sin \phi d\phi$$

Ec. 2.4

$L$  = es la longitud del cojinete en (m)

$R_j$  = es el radio del eje en (m)

$\phi$  = es la posición angular sobre el contorno del eje.

Después de un proceso de cálculo (Yukio, 2006) se pueden obtener las siguientes ecuaciones de Reynolds Ec. 2.5 y Ec. 2.6, la hipótesis para estos cálculos es con un cojinete infinito.

$$F_r = -6\mu \left( \frac{R_j}{c} \right)^2 L R_j \left[ \frac{2k^2(\omega - 2\dot{\theta})}{(2+k^2)(1-k^2)} + \frac{2k}{(1-k^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2+k^2)} \right\} \right]$$

Ec. 2.5

$$F_{tg} = 6\mu \left(\frac{R_j}{c}\right)^2 L R_j \left[ \frac{\pi k(\omega - 2\dot{\theta})}{(2+k^2)(1-k^2)^{1/2}} + \frac{4k\dot{k}}{(2+k^2)(1-k^2)} \right]$$

Ec. 2.6

$L$  = es la longitud del cojinete en (m)

$R_j$  = es el radio del eje en (m)

$k$  = es el ratio de excentricidad

$\dot{k}$  = es la derivada del ratio de excentricidad

$c$  = es el juego radial en el cojinete en (m)

$\dot{\theta}$  = es la velocidad angular entre centros del eje y cojinete en ( $rad/s$ ).

$\omega$  = es la velocidad angular en el eje del TC en ( $rad/s$ ).

$\mu$  = es el coeficiente de viscosidad del aceite ( $kg/m_s$ ).

Por lo tanto, la posición de equilibrio en el centro del cojinete se obtiene con las derivadas temporales  $\dot{\theta}$  y  $\dot{k}$  igual a cero. Esto demuestra que no hay fuerza de la película de aceite sobre el cojinete cuando se arremolina de manera constante a una velocidad de la mitad de su velocidad de rotación, y está de acuerdo con las consideraciones de Newkirk (Yukio, 2006).

Utilizando el mismo criterio y resolución se obtienen las ecuaciones Ec. 2.7 y Ec. 2.8 para el caso de cojinetes cortos. Esta hipótesis es útil debido a que los cojinetes cortos son cada vez más utilizados y el turbocompresor utiliza este tipo de cojinetes.

$$F_r = -\frac{1}{2}\mu \left(\frac{R_j}{c}\right)^2 \frac{L^3}{R_j} \left[ \frac{2k^2(\omega - 2\dot{\theta})}{(1-k^2)^2} + \frac{\pi\dot{k}(1+2k^2)}{(1-k^2)^{5/2}} \right]$$

Ec. 2.7

$$F_{tg} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{R_j}{c}\right)^2 \frac{L^3}{R_j} \left[ \frac{\pi k(\omega - 2\dot{\theta})}{2(1-k^2)^{3/2}} + \frac{4k\dot{k}}{(1-k^2)^2} \right]$$

Ec. 2.8

En la Ec. 2.9 se muestra que las fuerzas que actúan sobre el eje y cojinete, están en un sistema de referencia en coordenadas cilíndricas no inerciales (r,tg), estas fuerzas deben ser transformadas a un sistema de coordenadas inerciales (x,y).

$$\vec{F}_{coj} = \begin{pmatrix} F_{x_{coj}} \\ F_{y_{coj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \\ -\text{cos}\theta & \text{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_{tg} \end{pmatrix}$$

Ec. 2.9

Estas fuerzas  $F_{x_{coj}}$  y  $F_{y_{coj}}$  cambian con el tiempo y dependen del radio de excentricidad  $k$ , la velocidad de variación de dicha radio  $\dot{k}$ , la posición angular del eje, la velocidad de la trayectoria de precesión que describe el eje  $\theta$  denominada "whirl velocity" y la velocidad rotacional del eje  $\omega$ . Obteniendo la Ec. 2.10 y representando estos movimientos en la Figura 2.2:

$$\begin{cases} F_{x_{coj}} = +F_r \text{sen}\theta + F_{tg} \text{cos}\theta \equiv f_1(k, \dot{k}, \theta, \dot{\theta}, \omega) \\ F_{y_{coj}} = -F_r \text{cos}\theta + F_{tg} \text{sen}\theta \equiv f_2(k, \dot{k}, \theta, \dot{\theta}, \omega) \end{cases}$$

Ec. 2.10

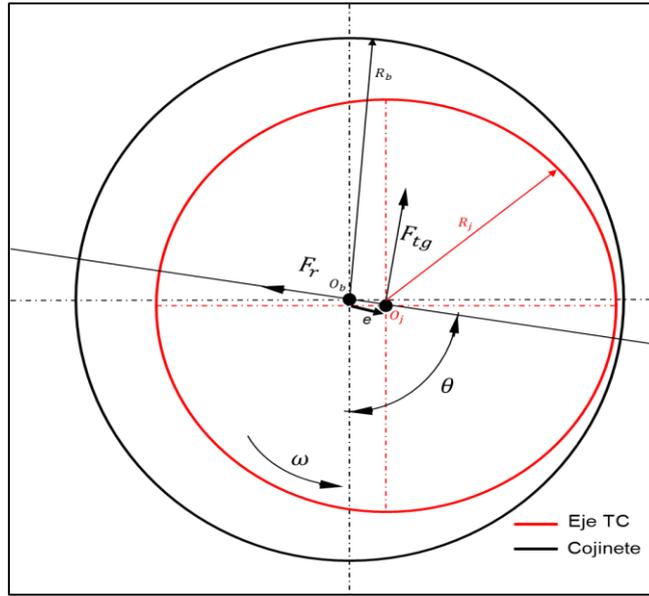


Figura 2.2 Fuerzas de la película de lubricación en el cojinete.

FUENTE: El Autor

Estas ecuaciones pueden ser linealizadas aplicando las series de Taylor, pero solo alrededor de un punto estático de equilibrio del eje (Ec. 2.11), este punto es donde el peso del eje  $W$  es igual en magnitud y dirección a la fuerza producida por la película de lubricación, pero en sentido contrario. Entonces las ecuaciones linealizadas en coordenadas inerciales serán, según (Chen, 2007).

$$\begin{aligned} F_{x_{coj}} &\approx \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_2} \dot{x}_2 \right) \\ F_{y_{coj}} &\approx \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} \dot{x}_2 \right) \end{aligned}$$

Ec. 2.11

Dónde:

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  es la variación de la fuerza con respecto a la posición. A este ratio se lo

denomina coeficientes de rigidez  $i, j = 1, 2$

$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j}$  es la variación de la fuerza con respecto a la velocidad. A este ratio se lo

denomina coeficientes de amortiguación  $i, j = 1, 2$

Así los ocho coeficientes lineales obtenidos en la ecuación anterior son generalmente denominados coeficientes de rigidez y amortiguación y son obtenidos alrededor del punto de equilibrio y pueden ser expresados en forma más general como en la Ec. 2.12:

$$k_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \quad c_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j} \right)_0$$

Ec. 2.12

Donde, trabajando en coordenadas cartesianas,  $i = x$ , y  $j = y$ , siendo  $i$  la dirección de la fuerza y  $j$  la dirección del desplazamiento o velocidad. El subíndice 0 denota que es alrededor del punto de equilibrio. Generalmente estos coeficientes se representan como un muelle para los coeficientes de rigidez y un amortiguador para los coeficientes de amortiguación, en la Figura 2.1 se pueden ver como estos coeficientes representan la función de la película de lubricación entre en el eje y el cojinete.

Así estos coeficientes lineales pueden ser utilizados en los modelos de dinámica rotacional. Si el eje está moviéndose en otro punto de funcionamiento diferente al utilizado para la linealización los coeficientes tienen un comportamiento no-lineal y deben ser calculados de manera iterativa para diferentes grupos de posiciones de  $k$  y  $\theta$ , y de velocidades  $\dot{k}$  y  $\dot{\theta}$ .

#### **2.4 Método para la obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguación.**

Si son datos conocidos las posiciones y las velocidades del eje entonces se pueden calcular las fuerzas  $F_r$ ;  $F_{tg}$  y  $F_{xcoj}$ ;  $F_{ycoj}$  según las Ec. 2.9.

En la Ec. 2.11 se puede observar que las únicas incógnitas a calcular serían los coeficientes de rigidez y amortiguación, el siguiente procedimiento es cambiar la forma de la ecuación a una forma matricial (López, 2014) quedando la ecuación de la siguiente manera Ec. 2.13.

$$\begin{bmatrix} Fx_{coj} \\ Fy_{coj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.13

$Fx_{coj}, Fy_{coj}$  = son los vectores de las fuerzas en el cojinete en (N)

$k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$  = son los coeficientes de rigidez ( $N/m$ )

$c_{xx}, c_{xy}, c_{yx}, c_{yy}$  = son los coeficientes de amortiguación ( $Ns/m$ )

$X, Y$  = es el vector posición del centro del eje en (m)

$\dot{X}, \dot{Y}$  = es el vector velocidad a la que se desplaza el centro del eje en (m)

Los coeficientes de rigidez se calculan en función de la posición del eje realizando la consideración de que los siguientes parámetros son iguales a cero:  $\dot{X}$  y  $\dot{Y}$  quedando la Ec. 2.14.

$$\begin{bmatrix} Fx_{pos} \\ Fy_{pos} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Ec. 2.14

Despejando quedan las siguientes ecuaciones Ec. 2.15 y Ec. 2.16 que representan las fórmulas para los coeficientes de rigidez.

$$K_x = (Pos^{-1})(Fx_{pos})$$

Ec. 2.15

$$K_y = (Pos^{-1})(Fy_{pos})$$

Ec. 2.16

Dónde:

$$Fx_{pos} = \begin{bmatrix} Fx_{coj_{pos1}} \\ \vdots \\ Fx_{coj_{posn}} \end{bmatrix},$$

$$Fy_{pos} = \begin{bmatrix} Fy_{coj_{pos1}} \\ \vdots \\ Fy_{coj_{posn}} \end{bmatrix},$$

$$Pos = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n \end{bmatrix},$$

Representan los vectores mencionados desde 1 hasta n posiciones.

Con el producto entre la inversa de la matriz de posición  $Pos^{-1}$  y las fuerzas en los cojinetes  $Fx_{pos}$  y  $Fy_{pos}$  se encuentran los coeficientes de rigidez quedando de la siguiente forma:

$$K_x = \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad K_y = \begin{bmatrix} k_{yx} \\ k_{yy} \end{bmatrix}$$

El procedimiento para la obtención de los coeficientes de amortiguación es similar aplicando nuevamente la Ec. 2.13, pero con la inclusión de los coeficientes de rigidez ya calculados, las ecuaciones se representan en la Ec. 2.17.

$$C_x = (Vel^{-1})(Fx_{coj} - Pos K_x)$$

$$C_y = (Vel^{-1})(Fy_{coj} - Pos K_y)$$

Ec. 2.17

Dónde:

$$Vel = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 & \dot{Y}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{X}_n & \dot{Y}_n \end{bmatrix}, \quad C_x = \begin{bmatrix} c_{xx} \\ c_{xy} \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} c_{yx} \\ c_{yy} \end{bmatrix}$$

## 2.5 Identificación de velocidades críticas

Con el análisis lineal las velocidades críticas pueden ser identificadas mediante el diagrama de Campbell. Por lo tanto, el diseño de los ejes puede conducirse a buscar unas condiciones de funcionamiento en las cuales el eje no tenga que girar a estas velocidades críticas. Sin embargo, en el caso de turbocompresores de MCI el rango de velocidades de funcionamiento es muy amplio de 30000 rpm hasta 160000 rpm generalmente, por lo tanto, tendrán que pasar por alguna de las velocidades críticas; en este caso se debe tratar de modificar el valor de los coeficientes de amortiguación para evitar amplitudes que puedan dañar a los elementos del TC.

La amplitud de las vibraciones puede aumentar en el caso de llegar a las frecuencias propias o también llamadas frecuencias naturales del rotor, sin embargo, es complicado realizar el cálculo analítico de estas frecuencias para determinar su magnitud, si se consideran dentro del cálculo variables como la masa, momentos de inercia, velocidades del rotor y coeficientes de rigidez y amortiguación. Por lo tanto, se utiliza el método gráfico con el diagrama de Campbell o también llamado diagrama de velocidades de giro.

Las frecuencias críticas son identificadas en la intersección de las líneas de frecuencias propias y la línea de excitación síncrona 1X como se interpreta en la Figura 2.3.

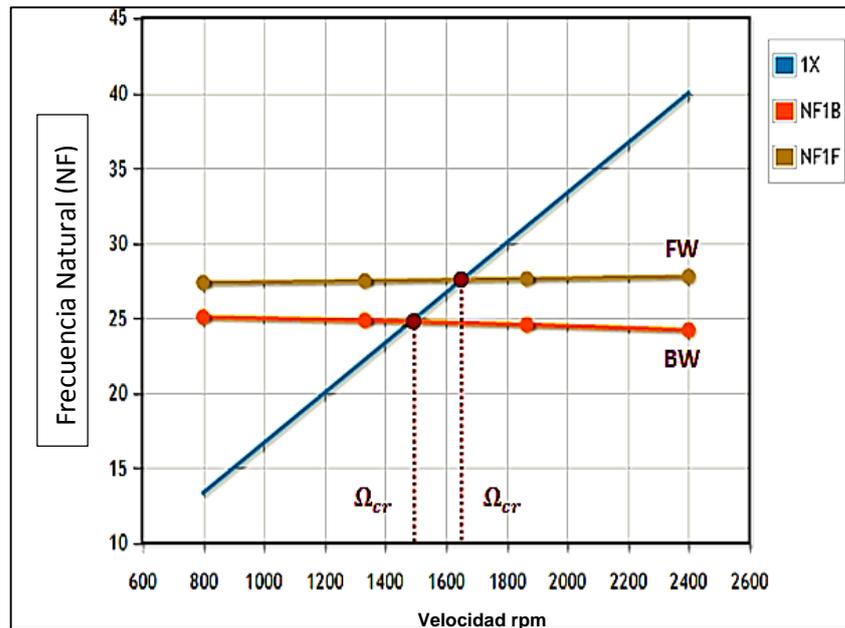


Figura 2.3 Esquema diagrama de Campbell.

FUENTE: El Autor

Las fuerzas de desequilibrio también se encuentran dentro de la Figura 2.3, normalmente excitan solo el movimiento hacia adelante “Forward Whirl, FW” por la resonancia, representado por la línea verde. Sin embargo, estas mismas fuerzas de desequilibrio pueden excitar un movimiento hacia atrás “Backward Whirl BW” en caso de ejes asimétricos o con velocidades oscilantes del eje, este movimiento se encuentra figurado con la línea tomate.

El autor (Vistamehr, 2009) presenta un análisis lineal con eigen-valores (para un turbocompresor de MCIA con cojinetes flotantes) y predice dos frecuencias inestables, con un modo cónico y un modo cilíndrico. Los dos modos tienen frecuencias muy cercanas y están alrededor de los 80.000 rpm.

(Schweizer G. , 2009) También presentó un modelo lineal (para un TC de MCIA con cojinetes flotantes) y realizó el análisis con diferentes coeficientes de amortiguación y en dos velocidades de giro del eje. El considera que el eje tiene todos los modos de movimiento e incluye los modos cónicos, traslacionales, torsionales y de flexión. Además del modelo realiza algunas medidas experimentales y los resultados los compara con el diagrama de Campbell para identificar el modo de vibración del eje.

(Tian L., 2013) Utiliza un modelo de elementos finitos para analizar la influencia de las vibraciones del motor en el comportamiento del TC. Utiliza también el diagrama de Campbell para identificar los modos de vibración del eje y con el diagrama establece que el eje tiene excitación armónica a una velocidad aproximada de 150000 rpm.

## 2.6 Bibliografía

Chen, J. W. (2007). Introduction to dynamic of Rotor Bearing Systems. Trafford publishing.

López, A. (2014). *Estudio teórico experimental de la Dinámica Rotacional de Turbocompresores de MCIA. Aplicación al diagnóstico de fallos*. Valencia: Politécnica de Valencia.

Schweizer, B. (2009). Total instability of turbocharger rotors. *Journal of Sound and Vibration*.

Tian L., W. W. (2013). *Nonlinear effects of unbalance in the rotor floating ring bearing system of turbochargers*. Mechanical Systems and signal Processing.

Vistamehr, A. (2009). *Analysis of Automotive turbocharger nonlinear vibration including bifurcations*. Master Tesis.

Yukio, H. (2006). *Hydrodynamic Lubrication*. Tokyo: Yokendo Ltd.

## CAPITULO 3

### ANÁLISIS DE DATOS EXPERIMENTALES

#### Introducción

Para determinar el valor real de una magnitud física, se realizan diferentes métodos para la obtención de ella, normalmente mediante una medición física o tecnológica, por modelación, por cálculo, que normalmente son los métodos aplicados. Por el propio procedimiento es imposible determinar el valor verdadero de la magnitud en cuestión. Todos los valores medidos o calculados sufrirán errores debido a la limitada precisión de los aparatos de medida, así como las posibles suposiciones que se realizan al momento de una simulación o cálculo y a otras razones intrínsecas de la estructura de la materia.

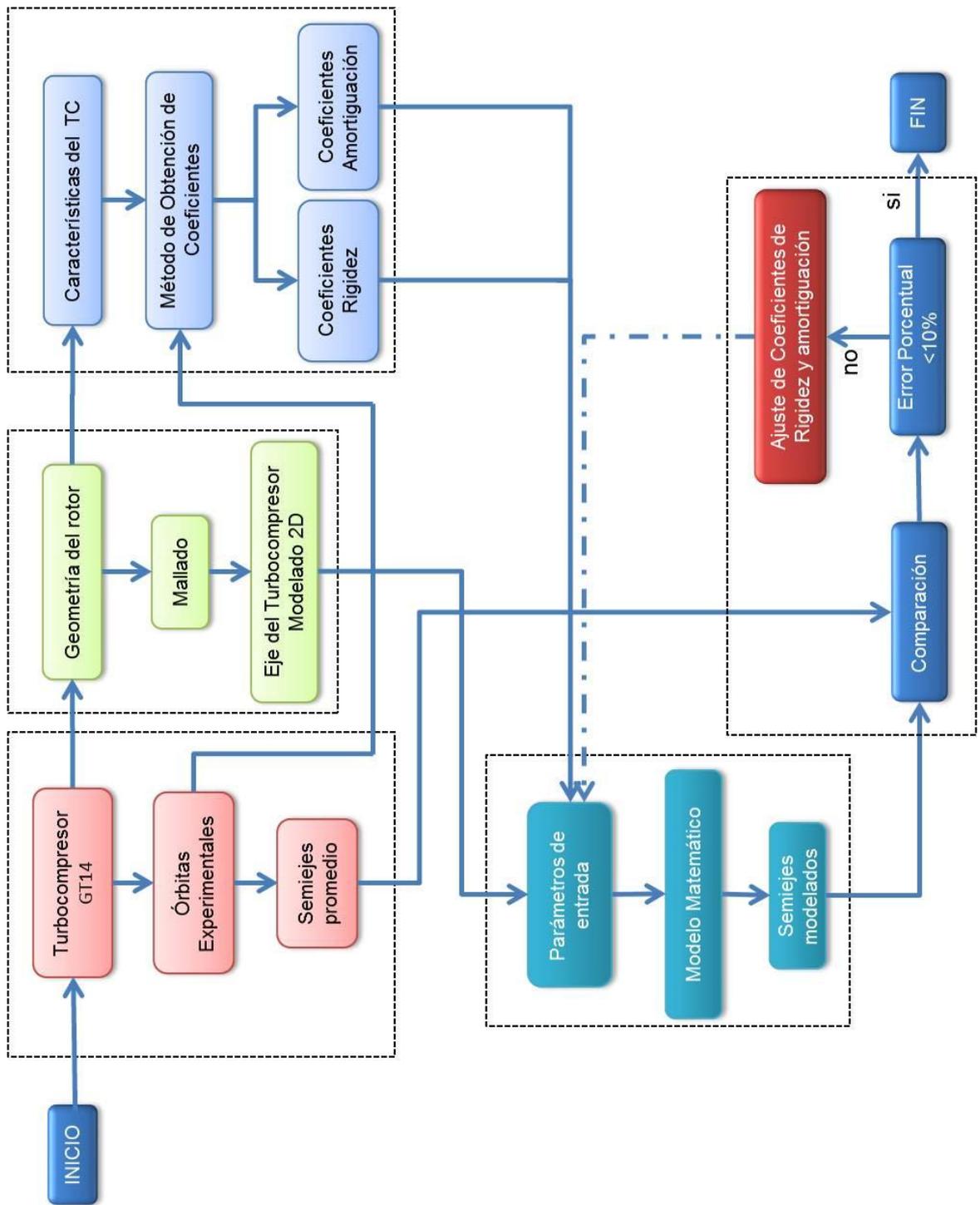
En este capítulo se aplica la metodología mencionada en el capítulo 2 en donde los diferentes conceptos y definiciones que se utilizan en la investigación, se aplicarán para la obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguación en condiciones de velocidades estacionarias y transitorias

Después se realizará un correcto ajuste de estos coeficientes para reducir los posibles errores en los resultados del cálculo y así aplicarlos en la predicción del funcionamiento en el eje del TC en condiciones transitorias, el cual es el objetivo principal del presente trabajo.

Los diferentes tipos de metodología que se podrían utilizar en el ajuste de coeficientes son limitados, ya que las variables se relacionan y tienen influencia entre sí, lo que supondría buscar el método adecuado y justificarlo en cada obtención de cada coeficiente.

#### 3.1 Obtención de las órbitas experimentales

Las órbitas fueron obtenidas en (López, 2014) a diferentes regímenes de giro, desde 20 krpm a 150 krpm, las técnicas de medida están basadas en sensores infrarrojos y adquisición de imágenes y están detalladas en los artículos: (J.R. Serrano M. L., 2014), (J.R. Serrano M. L., 2012).



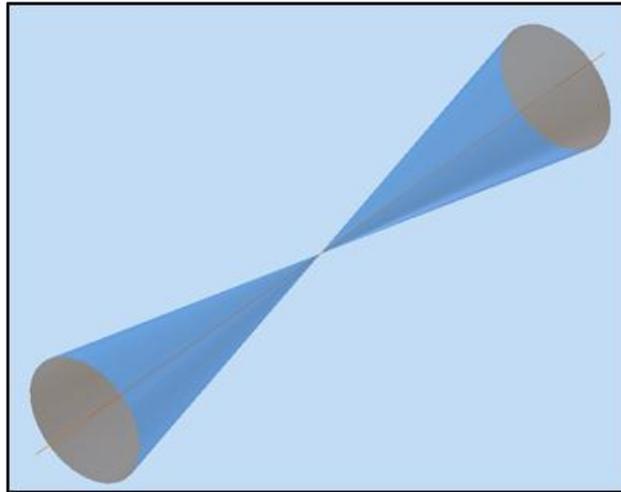
**Figura 3.1** Diagrama de flujo "metodología para la obtención de coeficientes de rigidez y amortiguación"

FUENTE: El Autor

Los datos experimentales que se utilizan son los obtenidos en (López 2014). Estos son los datos experimentales base para el proyecto, ya que servirán para crear los vectores de posición en el inicio del cálculo, así como también se utilizarán de referencia para validar los cálculos teóricos.

En la Figura 3.1 se presenta un diagrama de flujo de todo el procedimiento que se va a realizar en el proyecto.

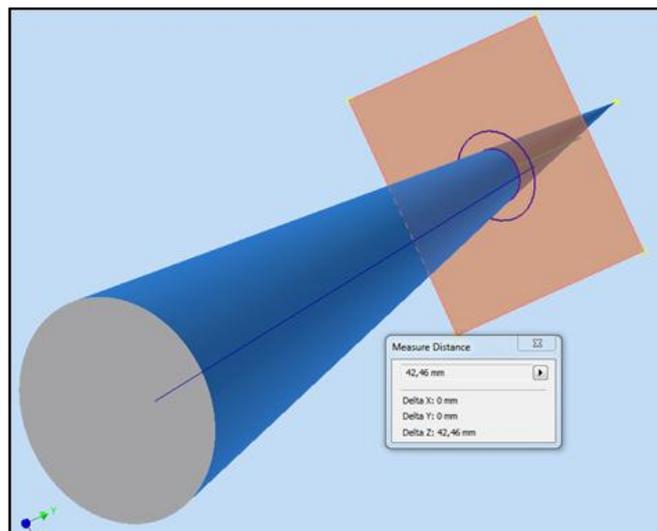
Para el análisis que se va a realizar, se plantea la siguiente suposición en las órbitas generadas en los cojinetes. La forma de órbita que se genera a lo largo del eje del TC tiene una forma simétrica y cónica como se muestra en la Figura 3.2, esto debido al comportamiento de la fuerza en la película de aceite.



**Figura 3.2** Comportamiento de la órbita a lo largo del eje.

FUENTE: El Autor

Al tener una forma cónica entonces se puede obtener diferentes proyecciones de la órbita a diferentes distancias Figura 3.3.

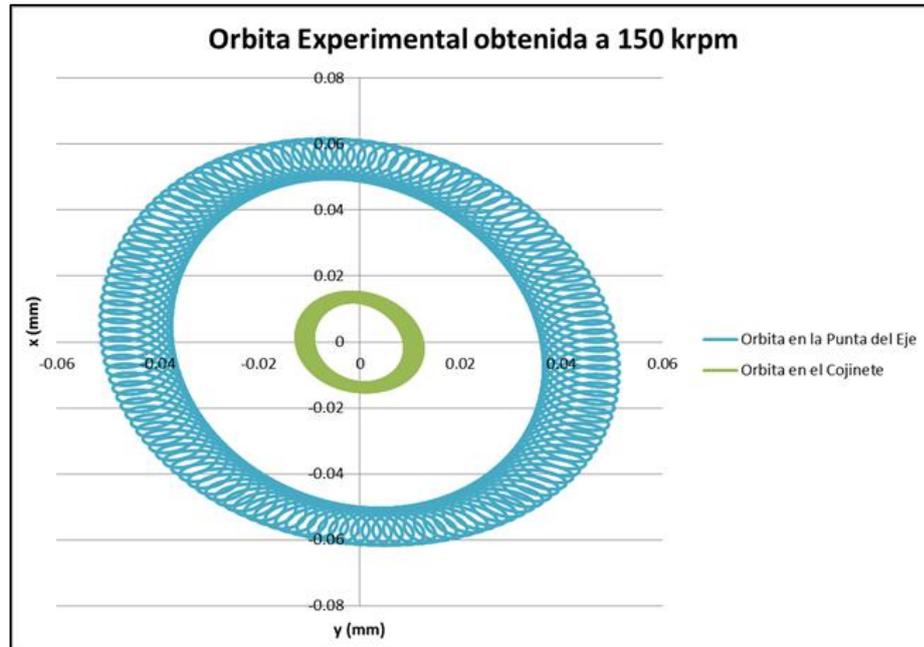


**Figura 3.3** Proyección de la órbita en el extremo del cojinete.

FUENTE: El Autor

Se obtuvo un factor de escala de 1:4,07 para la obtención de la órbita en el extremo del cojinete a una distancia de 42,46 mm medida desde la punta del eje.

En la Figura 3.4 se representa, la órbita medida a 150 krpm en la punta del eje y la proyectada en el extremo del cojinete.



**Figura 3.4** Órbita Experimental y Órbita proyectada  
FUENTE: El Autor

### 3.2 Cálculo de coeficientes de rigidez y amortiguación de la película de lubricación

Para estimar los coeficientes de rigidez y amortiguación de la película de lubricación, se realizaron con la aproximación de cojinete corto para la solución de la ecuación de Reynolds bajo las condiciones de Gumbel (la presión se mantiene constante en la zona de cavitación), según se explicó en el apartado 2.2.2 del capítulo anterior. La holgura de lubricación con un eje totalmente centrado será de 0.042 mm, para esta geometría (López, 2014).

Los nuevos valores obtenidos en la órbita proyectada se van a transformar en los vectores de posición.

Obteniendo diferentes vectores de posición a diferentes velocidades de giro en el eje de 20 krpm a 150krpm respectivamente.

Para la obtención de los vectores de fuerza se utilizan los siguientes valores y se reemplaza en [Ec. 2.7 y Ec. 2.8]:

$$L = 0,004 \text{ (m)}$$

$$R_j = 0,003064 \text{ (m)}$$

$$k = e/c$$

$$\dot{k} = e/c \text{ variable en posición y tiempo } (1/s).$$

$e$  = excentricidad variable de acuerdo a la órbita medida.

$$c = 4,2E-05 \text{ (m)}$$

$$\dot{\theta} = \text{variable en velocidad y tiempo } (rad/s^2).$$

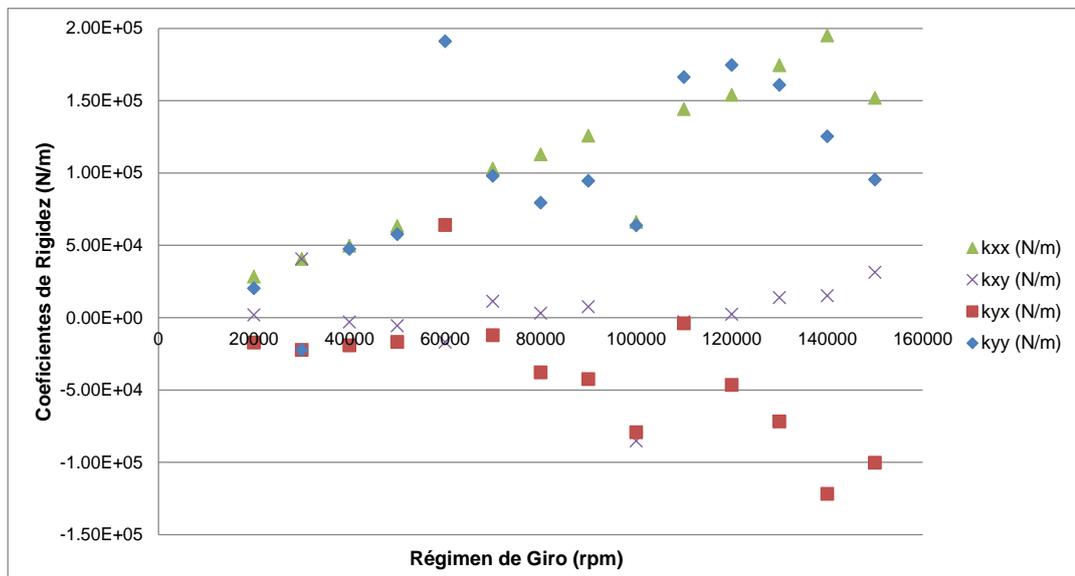
$$\omega = \text{de } 20.000 \text{ a } 150.000 \text{ rpm en } (rad/s).$$

$$\dot{\mu} = 0,006589767 (kg/m s).$$

El resultado proporciona un vector de fuerzas en coordenadas cilíndricas para luego transformarlas a coordenadas rectangulares utilizando la Ec. 2.10.

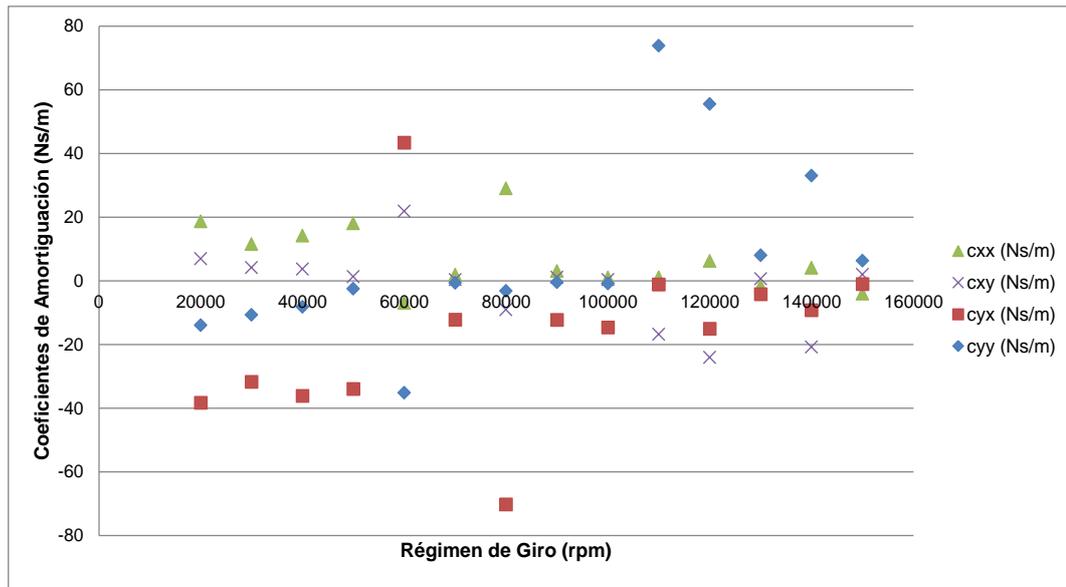
Una vez obtenidos los vectores de las fuerzas, posiciones y velocidades, se procede a calcular los coeficientes de rigidez y amortiguación aplicando las Ec. 2.15, Ec. 2.16, y Ec. 2.17.

En la Figura 3.5 y Figura 3.6 se observan los coeficientes obtenidos en todas las velocidades medidas, el siguiente procedimiento es obtener las órbitas teóricas con el modelo y compararlas con las órbitas experimentales, estos coeficientes se presentan en la tabla del Anexo. 1.



**Figura 3.5** Coeficientes de Rigidez obtenidos a diferentes velocidades

FUENTE: El Autor



**Figura 3.6** Coeficientes de Amortiguación obtenidos a diferentes velocidades  
FUENTE: El Autor

Los valores de los coeficientes de rigidez y amortiguación estimados por (Hung, 2012), (Schweizer B. , 2009), (Kelly, 2010) y (López, 2014) se pueden ver en la Tabla 3.1.

Se podrá observar que los coeficientes de rigidez estimados y utilizados por diferentes investigadores tienen el mismo orden de magnitud que los estimados en este trabajo.

**Tabla 3.1** Coeficientes de Rigidez y Amortiguación obtenidos por diferentes autores.

AUTORES	kxx	kxy
López (2014) Cojinetes Semiflotantes (150 krpm)	-1.78E+06	-6.87E+06
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	1.00E+06	1.00E+06
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	3.00E+06	3.00E+06
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	1.50E+07	1.50E+07
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	1.50E+07	1.50E+07
Hung (2012) Cojinetes Flotantes (0-280 krpm)	2.00E+03	2.00E+03
Kelly (2010) Cojinetes Flotantes (50 krpm)	7.35E+05	6.80E+06
Kelly (2010) Cojinetes Flotantes (175 krpm)	1.38E+06	2.40E+07
Kelly (2010) Cojinetes Semiflotantes (50 krpm)	4.62E+05	4.26E+06
Kelly (2010) Cojinetes Semiflotantes (175 krpm)	4.52E+05	1.44E+07
Ávila (2016) Cojinetes Semiflotantes (20-150 krpm)	(-1.08E+06 - 1.28E+05)	(-3.6E+05 - -5.06E+03)
	cxx	cxy
López (2014) Cojinetes Semiflotantes (150 krpm)	229	111
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	200	200
Hung (2012) Cojinetes Flotantes (0-280 krpm)	50	50
Kelly (2010) Cojinetes Flotantes (50 krpm)	1.5	1.5
Ávila (2016) Cojinetes Semiflotantes (20-150 krpm)	(1.06 - 87.21)	(0.33 - 24.03)

AUTORES	kyx	kyy
López (2014) Cojinetes Semiflotantes (150 krpm)	7.00E+06	-1.83E+06
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	1.00E+06	1.00E+06
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	3.00E+06	3.00E+06
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	1.50E+07	1.50E+07
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	1.50E+07	1.50E+07
Hung (2012) Cojinetes Flotantes (0-280 krpm)	2.25E+03	2.25E+03
Kelly (2010) Cojinetes Flotantes (50 krpm)	1.16E+05	-8.74E+06
Kelly (2010) Cojinetes Flotantes (175 krpm)	5.49E+05	-3.04E+04
Kelly (2010) Cojinetes Semiflotantes (50 krpm)	3.83E+05	-6.93E+06
Kelly (2010) Cojinetes Semiflotantes (175 krpm)	3.84E+05	-2.41E+07
Ávila (2016) Cojinetes Semiflotantes (20-150 krpm)	(-1.8E+06 - 3.26E+05)	(-1.5E+06 - 7.10E+05)
	cyx	cyy
López (2014) Cojinetes Semiflotantes (150 krpm)	-71	259
Schweizer (2009-2010) Cojinetes Flotantes (0-100 krpm)	200	200
Hung (2012) Cojinetes Flotantes (0-280 krpm)	55	55
Kelly (2010) Cojinetes Flotantes (50 krpm)	1.5	1.5
Ávila (2016) Cojinetes Semiflotantes (20-150 krpm)	(-15.14 - -1.19)	(-64.7 - 73.86)

Los coeficientes de amortiguación de este trabajo tienen el mismo orden de magnitud a los utilizados por (Kelly, 2010), un orden de magnitud menor a (Hung, 2012) dos menor a (López, 2014) y (Schweizer B. , 2009).

Las diferencias en los resultados de los coeficientes de amortiguación se deben a que los turbocompresores utilizados por (López, 2014), (Schweizer B. , 2009) y (Hung, 2012), utilizan cojinetes largos.

En el caso de (Kelly, 2010) utiliza el mismo coeficiente de amortiguación para los dos tipos de cojinetes flotantes y cojinetes semiflotantes y tienen el mismo orden de magnitud que los valores iniciales obtenidos en el modelo.

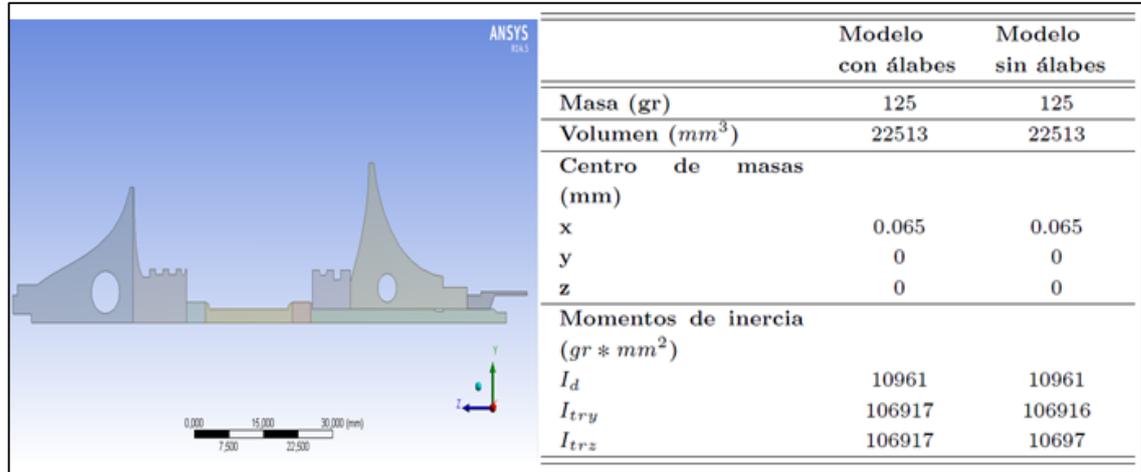
### 3.3 Obtención de las órbitas en modelo 2D

El TC con el que se han realizado los ensayos de medida del movimiento del eje se presenta en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2** Características del TC experimentado.

Nomenclatura	Marca	Tipo	Sistema de Apoyo	Aplicación
HTT-GT14-SFRBZ	Honeywell	GT14	Cojinete Z-Semiflotante	Renault F9Q 1.9L Diesel.

En la tesis (López, 2014) la geometría original (rotor con álabes) se ha simplificado a 2D con una aproximación de un cuerpo sólido en rotación (rotor sin alabes) Figura 3.7, con esto se eliminan los alabes de las ruedas del compresor y de la turbina pero se mantienen las mismas características físicas del rotor original (principalmente los momentos de inercia).



**Figura 3.7** Eje del Turbocompresor modelado

FUENTE: (López, 2014)

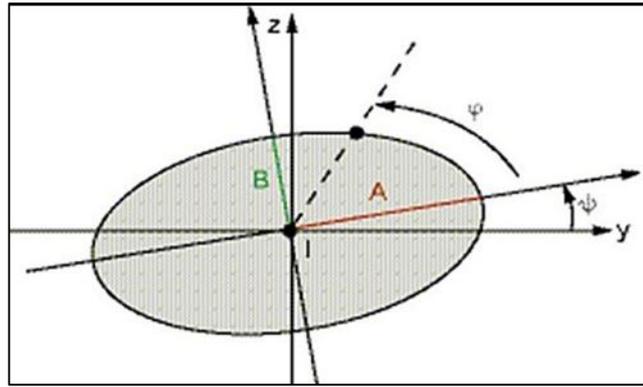
La malla con la que se trabajará fue validada en la tesis (López, 2014), en donde se determinó que se puede utilizar una malla que tenga 3088 elementos o más, con una calidad superior a 0,9.

Así las características de la malla que se utilizaron en el modelo de (López, 2014) son:

- El mallado en el rotor es del tipo uniforme cuadriláteros/triángulos (*uniform quad/tri method*).
- El número de nodos es de 3371 y el número de elementos es 3088.
- La calidad de la malla (jacobiano) tiene un promedio de 0.94 con una desviación std de 0.0705 (el mejor valor de calidad es de 1).
- *Skewness* (Máx 0,561 y Mín 1,305 e-10).
- La deformación de la malla es de 7.074 e-2 con una desviación std de 0.0777 (el mejor valor de deformación de la malla es de 0)

Para el cálculo de las órbitas se utiliza el modelo desarrollado por (López, 2014) pero en este caso considerando un cojinete corto, en el Anexo. 2 se presenta el código de cálculo utilizado en el programa ANSYS APDL:

En el programa se ingresa la velocidad del eje y los coeficientes calculados. Las características de la órbita del cálculo se representan en la Figura 3.8.

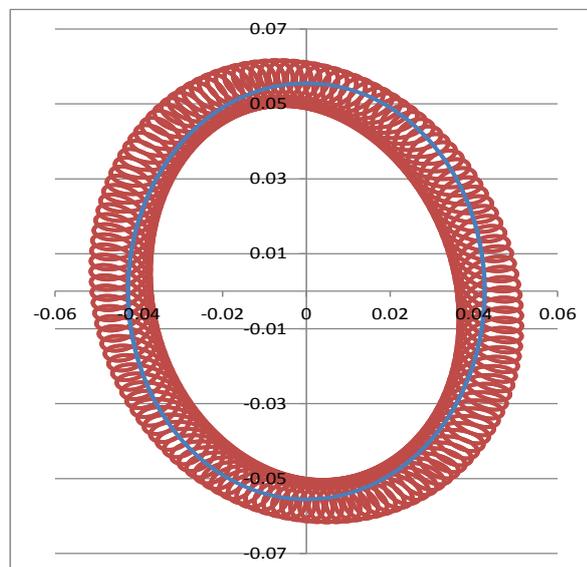


**Figura 3.8** Características de la órbita elíptica obtenidas en APDL

FUENTE: ANSYS HELP

Donde A es el semieje mayor de la órbita y B el semieje menor.

Estos semiejes modelados se van a comparar con los semiejes promedio, éstos se calculan para cada órbita y son obtenidos a partir de los valores máximos y mínimos de cada semieje experimental, los resultados permitirán una correcta comparación con los semiejes modelados. En la Figura 3.9 se representa un ejemplo de semiejes promedio en color de línea azul, que representan la órbita experimental a 150 krpm.



**Figura 3.9** Órbita experimental vs órbita de semiejes promedio obtenidas a 150 krpm.

FUENTE: ANSYS HELP

En el Anexo. 3 se representan todos los semiejes promedio calculados con los datos experimentales y a diferentes velocidades; estos valores son representados en la Figura 3.10.

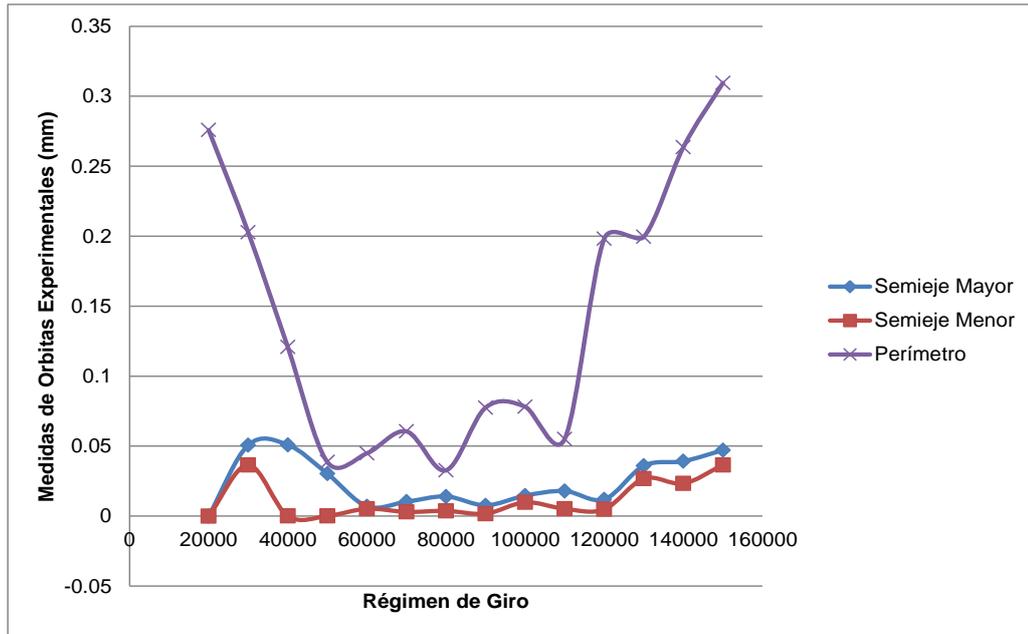


Figura 3.10 Semiejes medidos a diferentes Velocidades del Eje de TC

FUENTE: El Autor

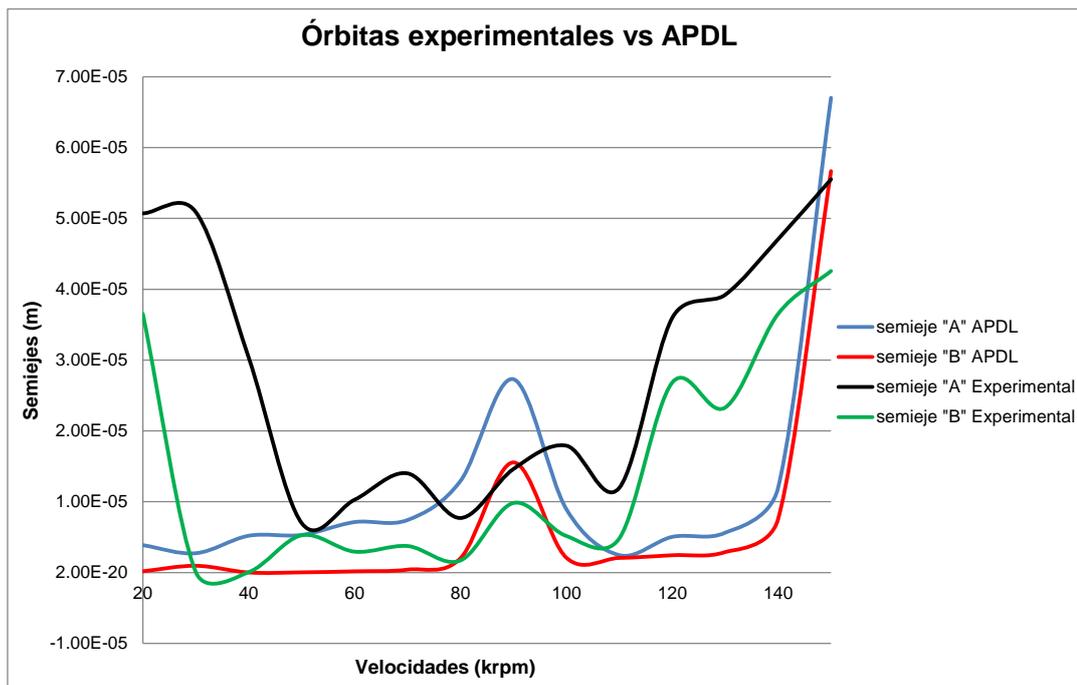


Figura 3.11 Semiejes experimentales y modelados

FUENTE: El Autor

En el Anexo. 4 existe una comparación entre los semiejes promedio “órbitas experimentales” con los semiejes modelados en el rango de 20 krpm a 150 krpm representados con las letras A y B; en la Figura 3.11 se puede observar la diferencia entre valores medidos y calculados, luego se aplicará una metodología de ajuste de coeficientes para obtener una aproximación máxima de los semiejes.

### **3.4 Ajuste de Coeficientes de Rigidez y Amortiguación a Diferentes Velocidades.**

El ajuste consiste en localizar los coeficientes con un error mínimo de aproximación, el tipo de ajuste dependerá de la complejidad que tendrá cada coeficiente a diferente velocidad.

En el primer caso se aplicó un ajuste porcentual manual, en donde se buscó una tendencia de comportamiento de la órbita al ir modificando porcentualmente los coeficientes.

Se justifica este método de ajuste porcentual debido a la complejidad en la aplicación de otros métodos de optimización esto ocurre por las características del fenómeno físico que ocurre en el eje, ya que todos los coeficientes se relacionan entre si y cualquier modificación en cualquier coeficiente tiene consecuencias en todos los demás.

La complejidad del método exige una correcta modificación porcentual de cada coeficiente, que servirá para determinar las posibles tendencias en cada uno.

El primer ajuste se realizó a 150 krpm donde el error en "A" y "B" son de -20,72% y -33,12% respecto a los valores calculados.

La tendencia que se presentó a esta velocidad se representa en la Figura 3.12, se observa una tendencia igual en ambos casos, para todos los coeficientes.

Los ajustes que se realizaron fueron con un aumento de 14,5 % positivo en los coeficientes de rigidez y con un aumento de 23 % positivo en los de amortiguación, obteniendo los valores mostrados en la Tabla 3.3 y con un error en "A" de 9,82% y "B" de -10,3 % como se observa en la Tabla 3.4 quedando la órbita calculada vs la experimental como se observa en la Figura 3.13.

Algunos de los errores obtenidos en el cálculo se deben a que existen fuerzas externas no consideradas, como la de los gases de escape ya que su aplicación conllevaría a estudios posteriores.

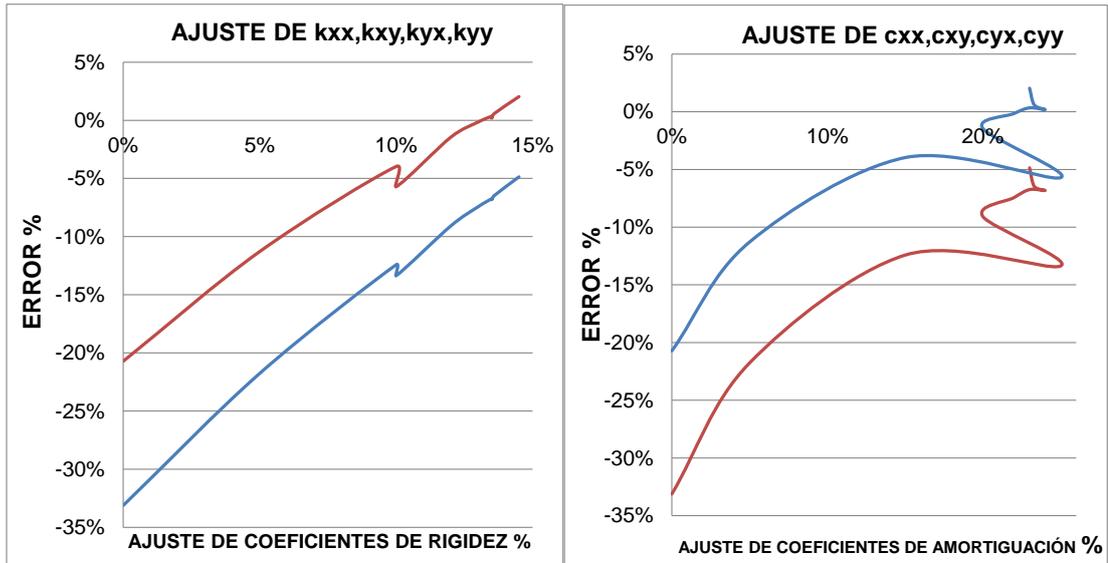


Figura 3.12 Ajuste de coeficientes a 150 krpm

FUENTE: El Autor

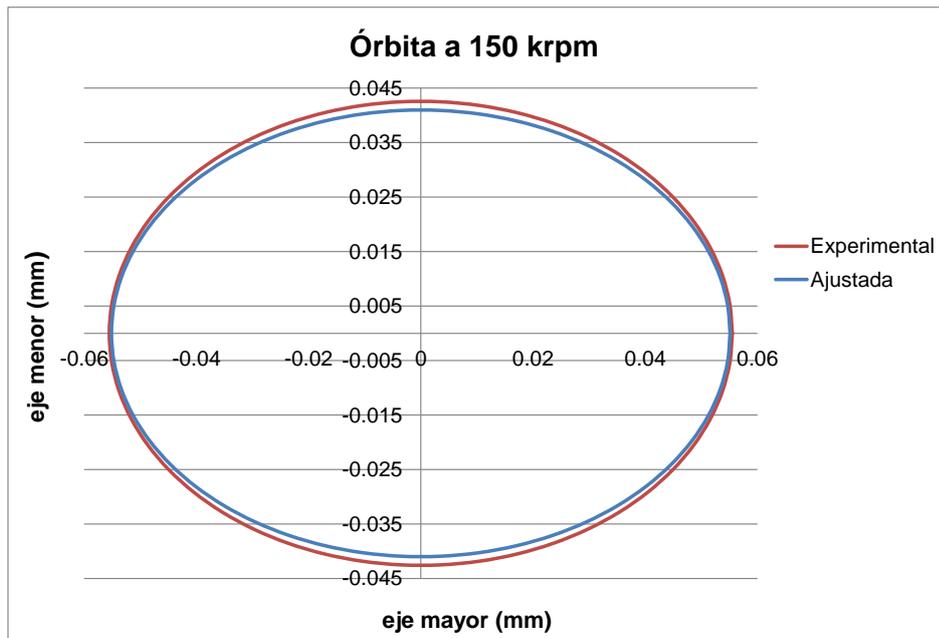


Figura 3.13 Semiejes experimentales y APDL

FUENTE: El Autor

Tabla 3.3 Coeficientes finales con ajuste calculado a 150 krpm

COEFICIENTES CON AJUSTE MÁXIMO			
RIGIDEZ		AMORTIGUACIÓN	
kxx	-31363.28	cxx	0.65
kxy	-2433.40	cxy	0.249
kyx	22923.17	cyx	-6.054
kyy	-82437.27	cyy	3.17

**Tabla 3.4** Comparación de órbitas con coeficientes ajustados

VALORES AJUSTADOS EN LA PUNTA DEL EJE				150 KRPM
APDL		EXPERIMENTAL		ERROR
A	4.96E-05	A	5.50E-05	9.82%
B	4.70E-05	B	4.26E-05	-10.3%

Con la metodología mencionada anteriormente, que consiste en encontrar las tendencias de comportamiento en las órbitas, se obtuvieron buenos resultados desde los 60 krpm hasta los 150 krpm, ver Anexo. 5, Anexo. 6, Anexo. 7. En la Figura 3.14, se puede observar en el color rojo las órbitas experimentales y en color azul las órbitas modeladas. Sin embargo, el comportamiento es diferente en los 50 krpm, por lo tanto, se aplicó otro método para encontrar las tendencias a esa velocidad.

El otro método se refiere a la utilización de la herramienta función TENDENCIA de Microsoft Excel, realizando reiteradas iteraciones que se pueden observar a detalle en el Anexo. 8.

La descripción del método es la siguiente: estima valores que resultan de una tendencia lineal. Ajusta una recta (calculada con el método de mínimos cuadrados) a los valores de las matrices definidas por los argumentos conocido\_y y conocido\_x. Estima, a lo largo de esa recta, los valores y correspondientes a la matriz definida por el argumento nueva\_matriz\_x especificado.

La sintaxis es la siguiente:

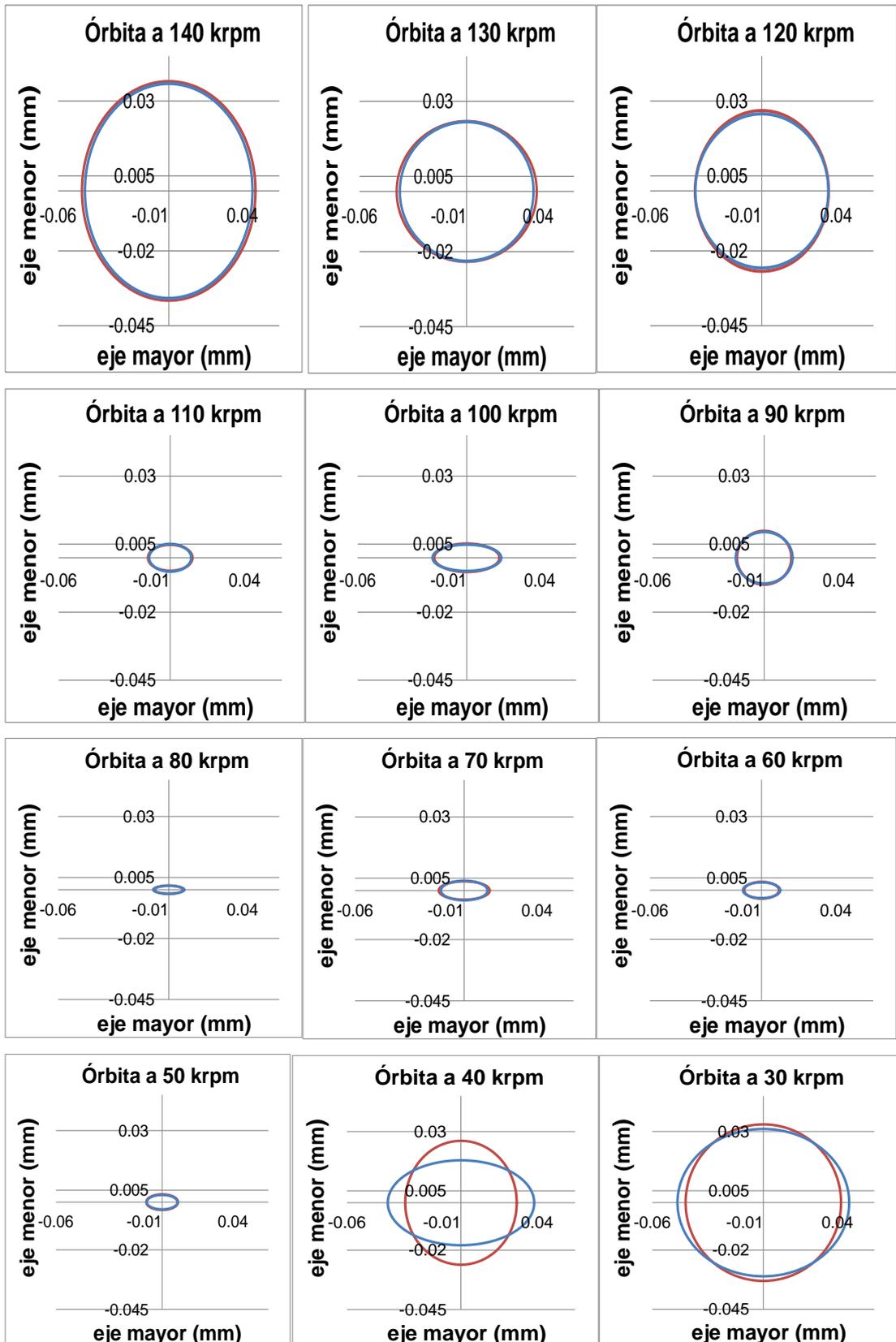
TENDENCIA (conocido\_y; [conocido\_x]; [nueva\_matriz\_x])

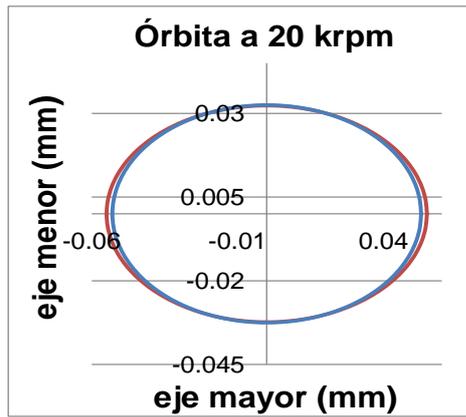
La sintaxis de la función TENDENCIA tiene los siguientes argumentos:

Conocido\_y. El conjunto de valores de y que se conocen en la relación  $y = mx+b$ .

Conocido\_x. Un conjunto opcional de valores x que se conocen en la relación  $y = mx+b$ .

Nueva\_matriz\_x. Los nuevos valores de x para los cuales desea que TENDENCIA devuelva los valores de y correspondientes (Office, s.f.).





**Figura 3.14** Órbitas ajustadas de 20 krpm a 140 krpm

FUENTE: El Autor

Como se puede apreciar en la Figura 3.14 las órbitas son bastante aproximadas a las experimentales, con la excepción de la órbita a 40 krpm en la cual el error es de -31.30% en “A” y 31.46% en “B”, en donde se considera un ajuste inadecuado.

El resultado a 40 krpm se debe a la forma especial de la órbita experimental que se va generando, esto se puede observar en la Figura 3.15, en la órbita que obtiene con datos de tiempo de 0.1 segundos (es decir 10000 datos) no se puede distinguir una órbita centrada, existe un desbalanceo que provoca que las órbitas se vayan generando descentradas y en diferente posición como una figura circular que no representa una órbita definida.

Por esta razón se presenta esta órbita con un tiempo de datos de 0.01 segundos (es decir 1000 datos) y se observa cual es la órbita que se va generando y descentrando, con esta información se calculan los semiejes promedios representados en la órbita de color amarillo y comparándola con la órbita ajustada de color rojo.

Se considera que tiene relación directa al comportamiento de las fuerzas de escape que intervienen externamente en el eje del Turbocompresor teniendo en cuenta que los efectos pulsantes de los gases de escape son mayores a menor régimen de giro del motor, (Payri F., 2011).

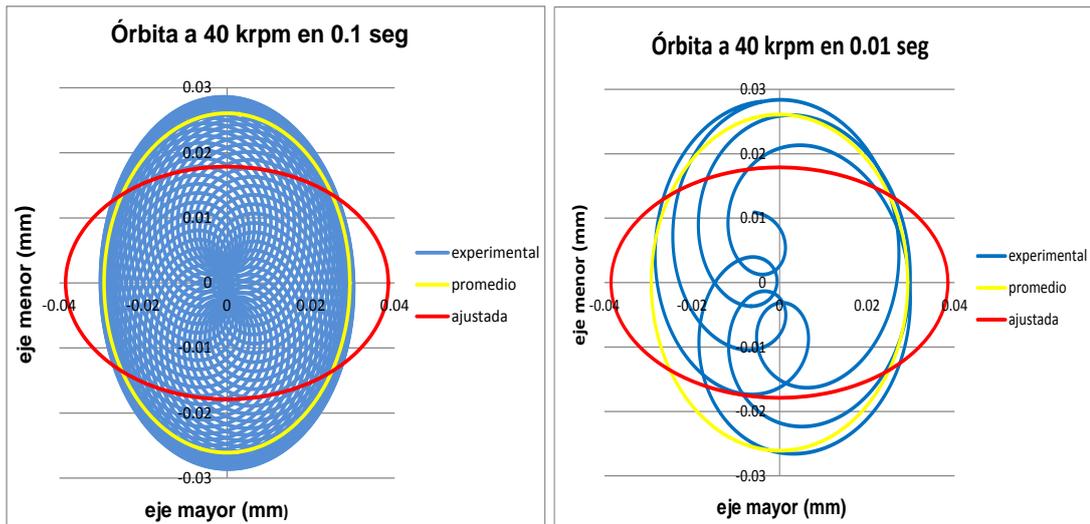


Figura 3.15 Formas de la órbita a 40 krpm

FUENTE: El Autor

### 3.5 Análisis del comportamiento de la órbita a diferentes velocidades

El giro en el eje del turbocompresor presenta ciertas características propias debido a la geometría, movimiento y al comportamiento del motor de combustión interna que afecta directamente sobre el comportamiento de las órbitas generadas a diferentes velocidades.

Para analizar, visualizar y explicar mejor este fenómeno se ha realizado el diagrama mostrado en la Figura 3.16, en donde se puede observar todas las fuerzas que intervienen en el giro del eje del TC.

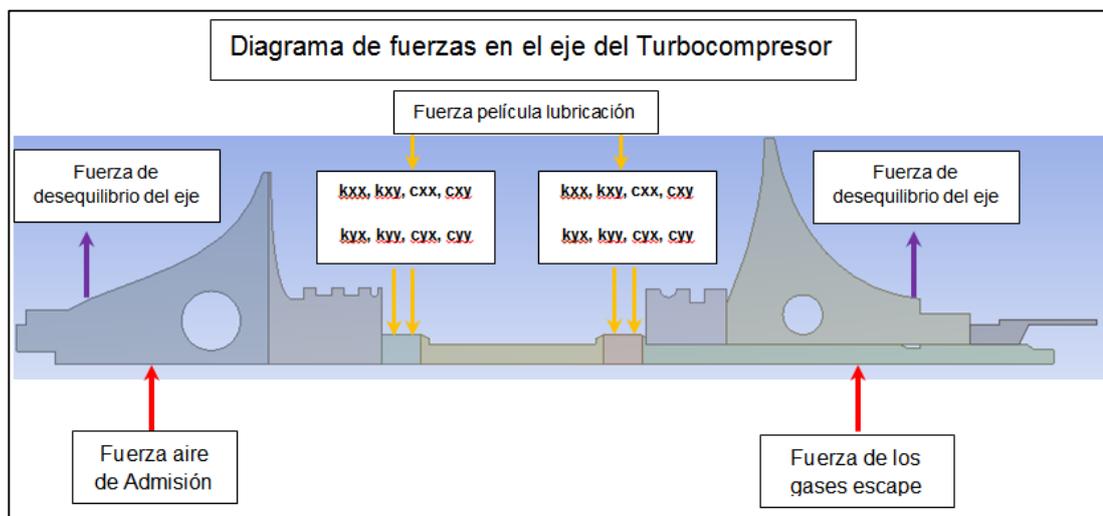


Figura 3.16 Diagrama de fuerzas en el eje del turbocompresor

FUENTE: El Autor

En el modelo no se han considerado fuerzas pulsantes que son provocadas por las fuerzas de los gases de escape y del aire en la admisión, así como otros factores físicos que intervienen en el funcionamiento, solo se han incluido las fuerzas de desequilibrio del eje y las fuerzas de la película de lubricación. Por lo tanto, en el procedimiento de ajuste de los coeficientes, se han incluido intrínsecamente todos estos fenómenos importantes.

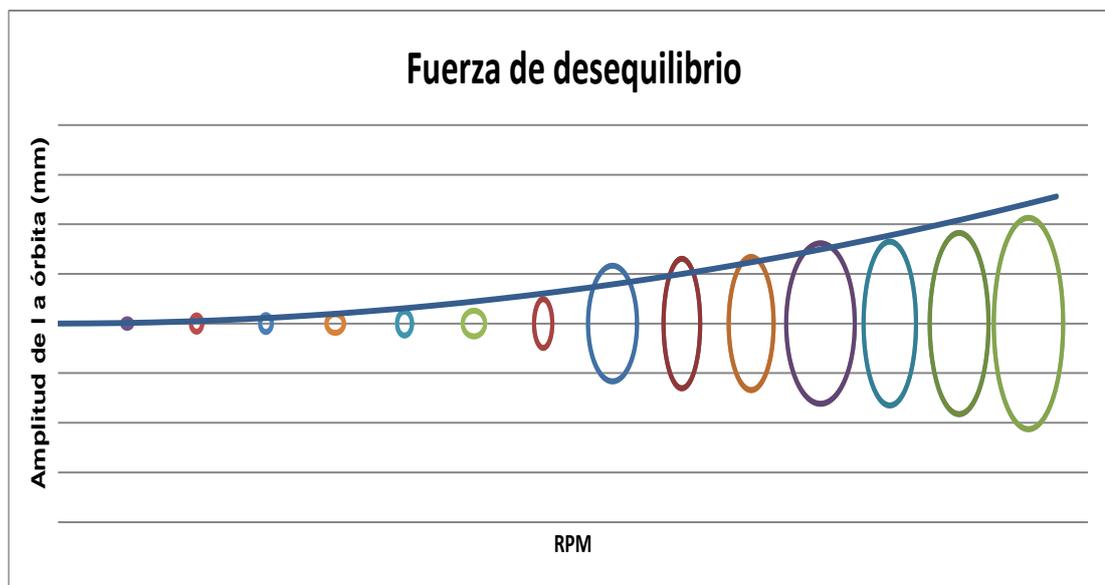
En la Figura 3.17 se representa la influencia que tiene cada fuerza en la órbita generada a diferentes velocidades. La amplitud de la órbita aumenta si se aumentan las revoluciones en el eje y de manera cuadrática debido a que se comporta según la Ec. 3.1, donde  $\omega$  es la velocidad en el eje,  $r$  el radio del eje y  $m$  es la masa en desequilibrio.

$$F_{des} = \omega^2 * r * m$$

Ec. 3.1

Lo contrario sucede con la fuerza de la película de lubricación en donde a bajas revoluciones esta fuerza es menor, tal como se justifica en el apartado teórico.

Estos conceptos van a definir al comportamiento real de la órbita, en donde se observa (Figura 3.17) que la amplitud de la órbita a bajas rpm es mayor debido a la fuerza de la película de lubricación y a altas rpm vuelve a aumentar su amplitud ahora por la incidencia de la fuerza de desequilibrio.



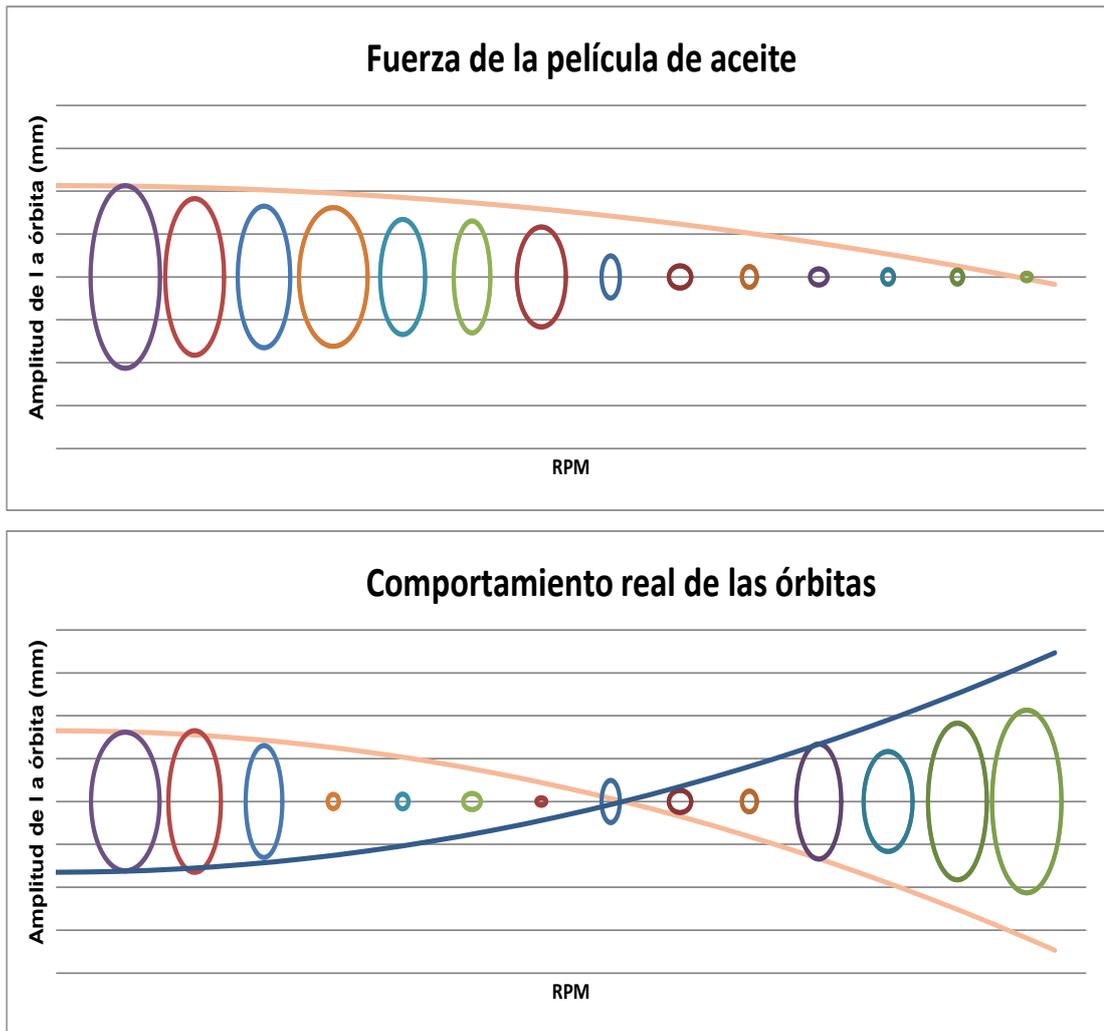


Figura 3.17 Incidencia de la fuerza de lubricación y desequilibrio en el comportamiento de la órbita.

FUENTE: El Autor

### 3.6 Análisis transitorio

La obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguación a diferentes velocidades se realizó en estado estacionario, con estos valores obtenidos se realizará un análisis transitorio para comprender el comportamiento de cada coeficiente durante el rango de velocidad establecido.

La magnitud y sentido de los coeficientes de rigidez van a tener relación directa con la amplitud de la órbita, ya que las fuerzas para mantener al eje centrado, están representadas por los “resortes” con los coeficientes  $k_{xx}$ ,  $k_{xy}$ ,  $k_{yx}$ ,  $k_{yy}$ , en donde el signo va a ser importante para mantener un equilibrio, se ha ajustado nuevamente los coeficientes con la finalidad de que los signos tengan una lógica en el comportamiento de los coeficientes.

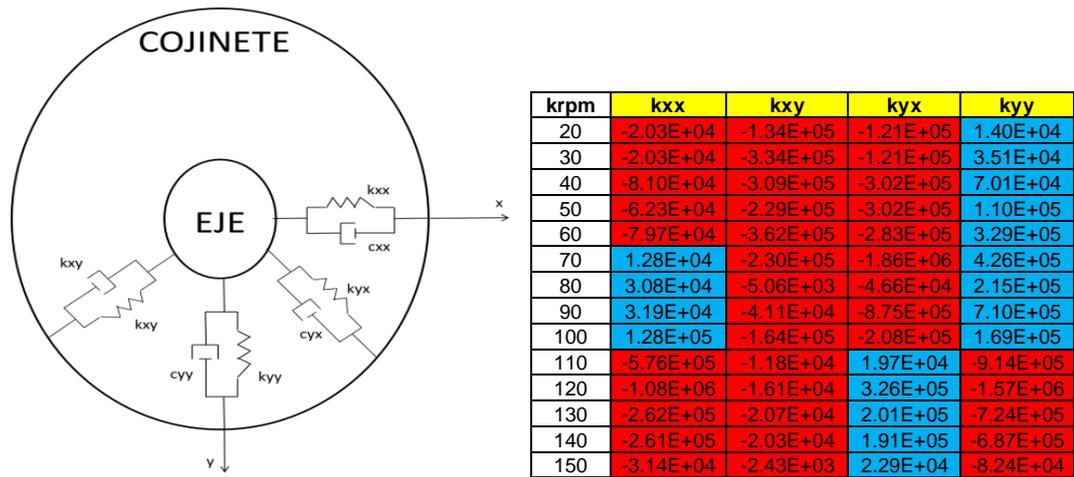


Figura 3.18 Incidencia de los coeficientes de rigidez en el comportamiento de la órbita.

FUENTE: El Autor

En la Figura 3.18 se ha representado nuevamente el modelo resorte-amortiguador, y se adjunta una tabla con los coeficientes de rigidez ajustados, en donde se ha diferenciado con un color azul los positivos y con rojo los negativos.

Se puede observar que en un rango de 70 krpm a 100 krpm la amplitud de esas órbitas será de menor tamaño Figura 3.19, ya que kxx tiene el mismo sentido que kyy y kxy con kyx, que mantienen un mejor equilibrio, por lo tanto existe menor oscilación en el eje.

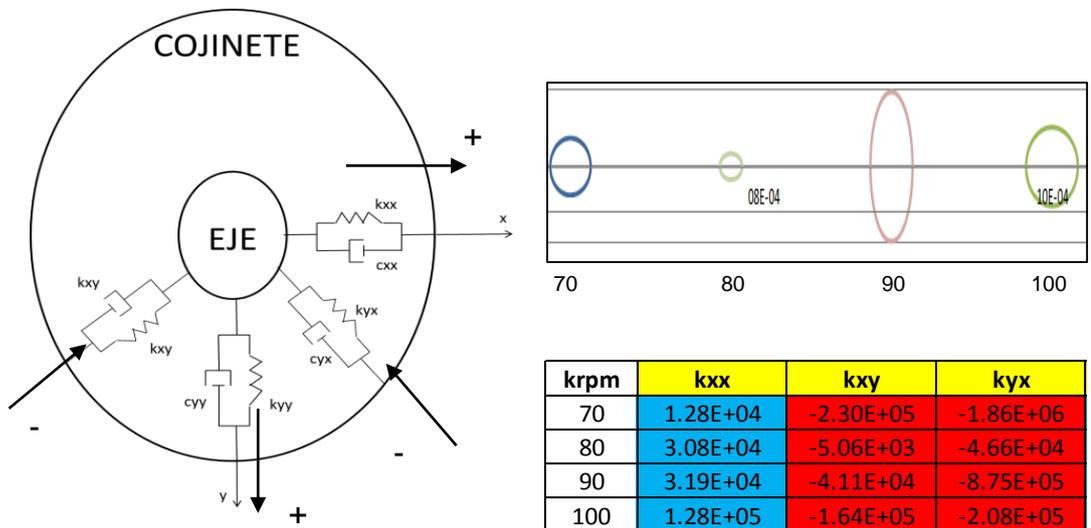


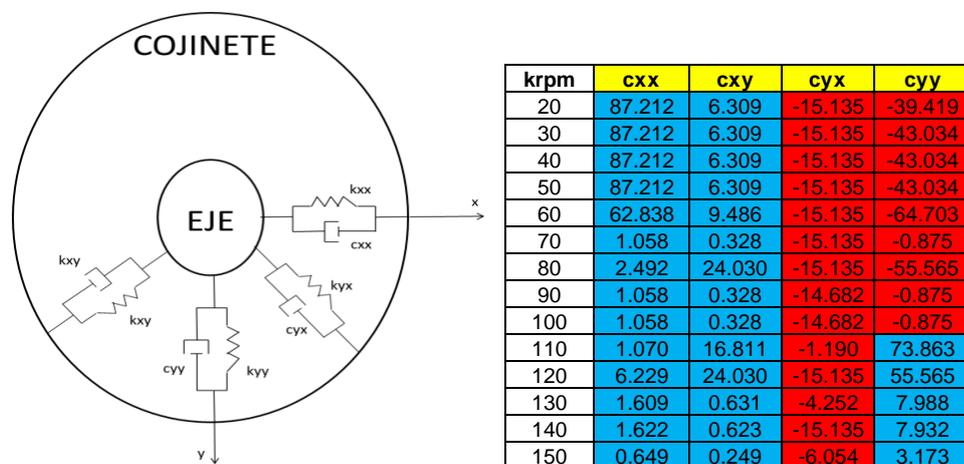
Figura 3.19 Incidencia de los coeficientes de rigidez en el comportamiento de la órbita (70 - 100 krpm).

FUENTE: El Autor

Existe un comportamiento diferente en los otros rangos de velocidades, se puede observar que en el rango de 20 krpm a 60 krpm solamente el coeficiente  $k_{yy}$  tiene un valor positivo y en el rango de 110 a 150 krpm es el coeficiente  $k_{yx}$  el que se mantiene positivo, lo que supone una mayor amplitud de las órbitas en esas velocidades.

En el caso de los coeficientes de amortiguación el análisis cambia ya que estos no están directamente relacionados con la posición del eje, sino que lo hacen con la velocidad del centro del eje con respecto al centro del cojinete como muestra la Ec. 2.17, también tienen relación con la fuerza de desequilibrio que aumenta de acuerdo a la velocidad Ec. 3.1.

En la Figura 3.20 se representa de manera similar los coeficientes de amortiguación en donde se puede ver que mantienen un mismo signo durante todo el rango de velocidades, solamente el coeficiente  $c_{yy}$  realiza un cambio a 110 rpm luego de eso se mantiene con el mismo sentido, la explicación supondría a que se debe a un cambio importante que sufre la órbita a esa velocidad como se explicó en la Figura 3.18. Concluyendo que los coeficientes  $c_{xx}$  y  $c_{yy}$  tienen una mayor incidencia en la amplitud de la órbita que el resto de coeficientes de amortiguación, debido a que la velocidad de la órbita tiene velocidades máximas y mínimas a ciertas velocidades en el eje del TC.

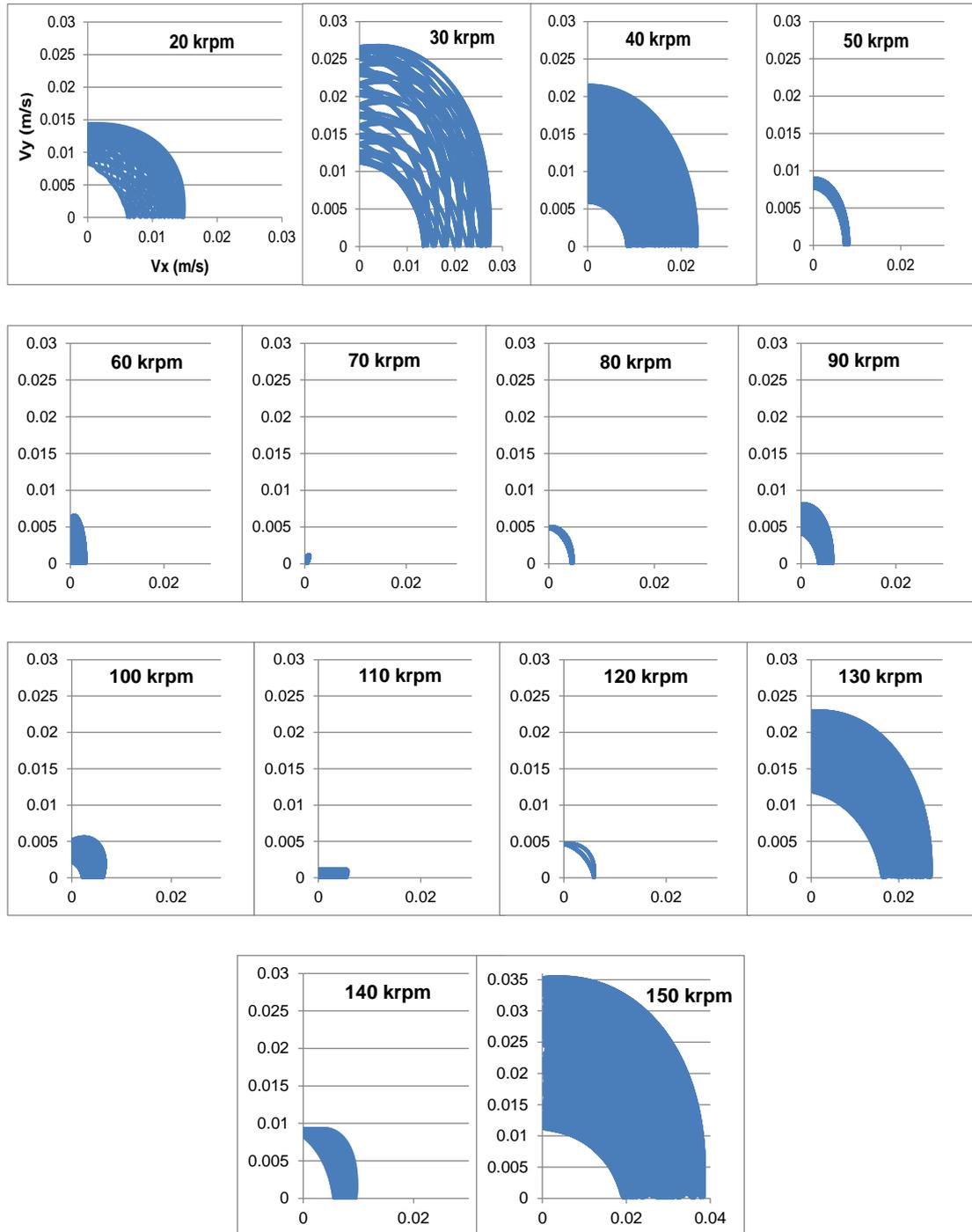


**Figura 3.20** Incidencia de los coeficientes de amortiguación en el comportamiento de la órbita. (70 - 100 krpm).

FUENTE: El Autor

Una velocidad mínima de la órbita se observa a los 110 krpm en la Figura 3.21, donde se grafican los vectores de velocidad  $v_x(m/s)$  y  $v_y(m/s)$  que son obtenidos a partir de las órbitas experimentales, este comportamiento de los vectores se ve reflejado en el coeficiente  $c_{yy}$ .

También se observa que, a bajas y altas rpm, las velocidades entre el cojinete y el eje del TC son mayores y en el rango intermedio de rpm estas velocidades son mínimas, esto se refleja en la amplitud y sentido de los coeficientes  $c_{xx}$  y  $c_{yy}$ .



**Figura 3.21** Comportamiento de la velocidad de la órbita a diferentes velocidades en el eje del TC.

FUENTE: El Autor

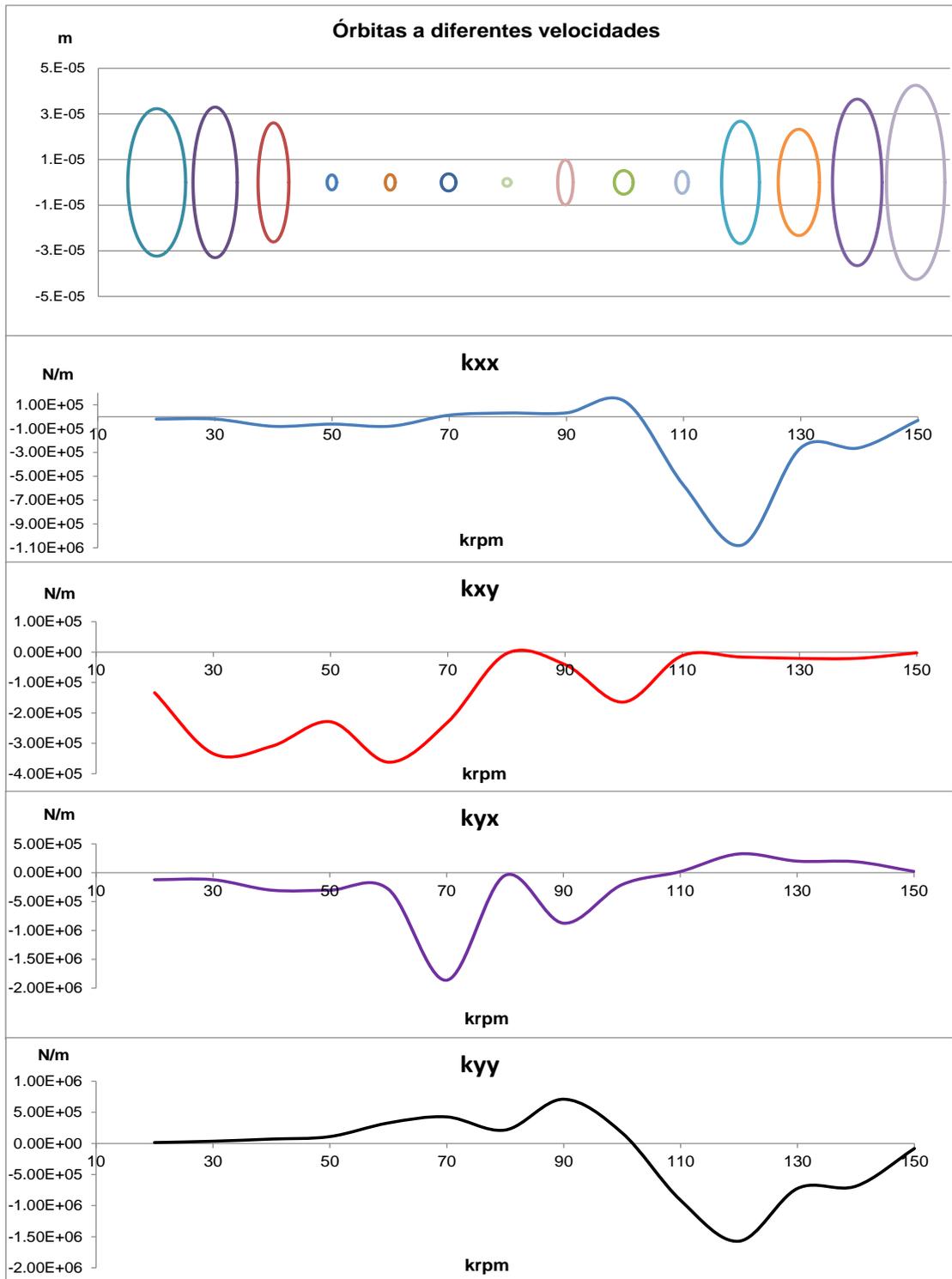
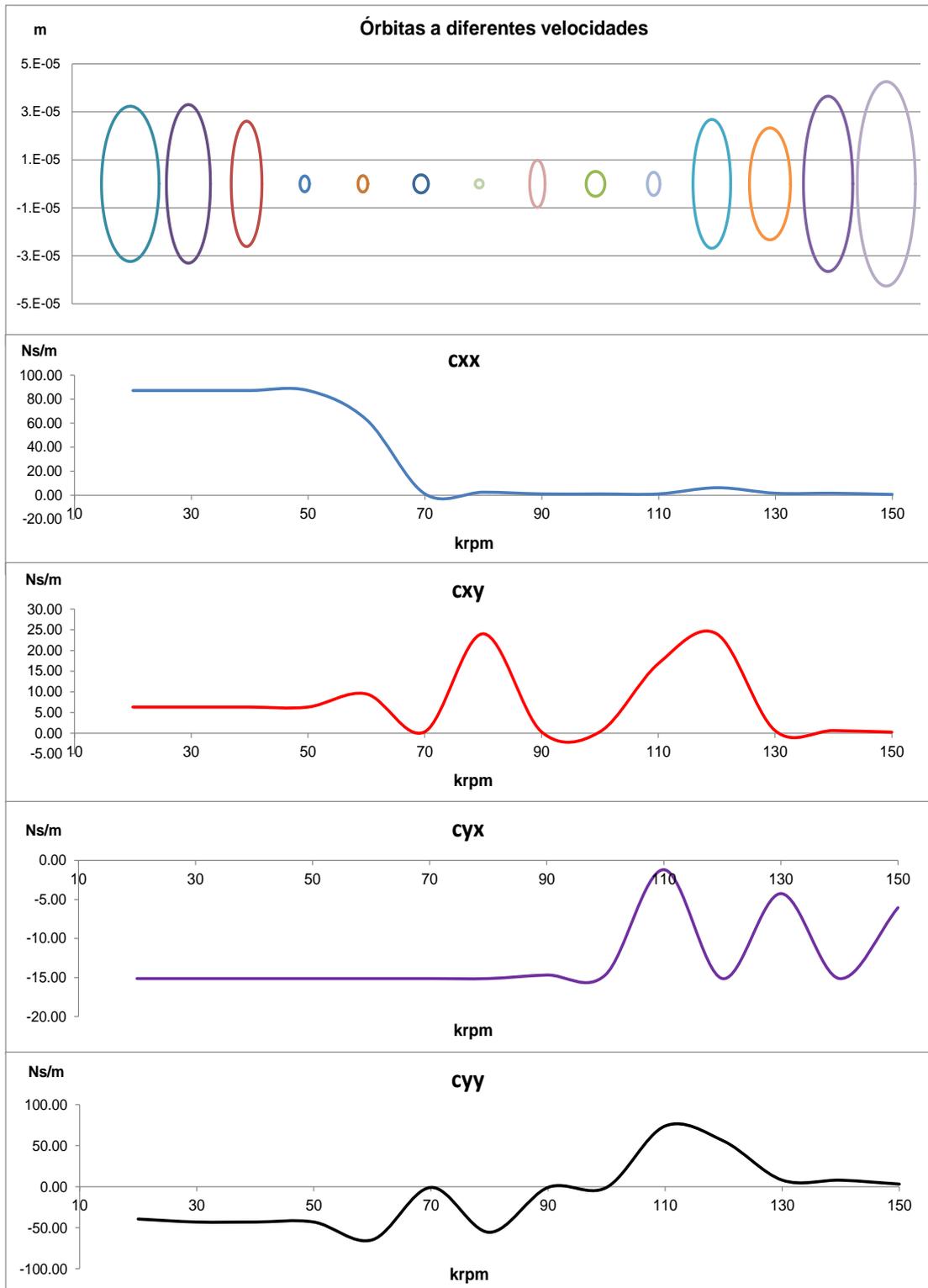


Figura 3.22 Curvas características de los Coeficientes de Rigidez

FUENTE: El Autor



**Figura 3.23** Curvas características de los coeficientes de amortiguación

FUENTE: El Autor

En la Figura 3.22 y Figura 3.23 se muestran las curvas características de todos los coeficientes obtenidos, se puede observar la influencia que tiene cada coeficiente en cada órbita, se observa que los coeficientes  $k_{xx}$  y  $k_{yy}$  influyen en el rango de 110 a 150 krpm según el comportamiento de las gráficas, el coeficiente  $k_{xy}$  interviene en el rango de 20 a 110 krpm y el coeficiente  $k_{yx}$  influye en el rango de 70 a 110 krpm.

Estas similitudes tienen relación con lo mencionado anteriormente, en donde se observa que estos coeficientes a lo largo de todo el rango de velocidades variaban para mantener un equilibrio en el eje del TC.

El siguiente punto es encontrar las ecuaciones características que ayudarán a generalizar el sistema, al no ser posible encontrar estas ecuaciones en todo el rango analizado, se obtendrán ecuaciones para cada rango de velocidades que se definió anteriormente.

### 3.6.1 Ecuaciones características agrupadas

Las ecuaciones características tienen como objetivo agrupar a todos los coeficientes de rigidez y amortiguación las cuales pueden predecir los coeficientes a cualquier velocidad; también van a estar implícitas todas las fuerzas que no se contemplaron inicialmente.

Debido al comportamiento de los coeficientes a diferentes velocidades, se consideran tres rangos de velocidades, entre 20 krpm y 60 krpm, entre 70 krpm y 100 krpm por último entre 110 krpm y 150 krpm, según la Figura 3.18 y la Figura 3.20.

#### 3.6.1.1 Ecuaciones características de 20 krpm a 60 krpm

Los coeficientes ajustados en este rango se muestran en la Tabla 3.5, al no tener un comportamiento lineal, el objetivo es encontrar que orden de ecuación polinómica caracteriza al comportamiento de cada coeficiente.

**Tabla 3.5** Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 20-60 krpm

krpm	$k_{xx}$	$k_{xy}$	$k_{yx}$	$k_{yy}$	$c_{xx}$	$c_{xy}$	$c_{yx}$	$c_{yy}$
20	-2.03E+04	-1.34E+05	-1.21E+05	1.40E+04	87.21	6.31	-15.14	-39.42
30	-2.03E+04	-3.34E+05	-1.21E+05	3.51E+04	87.21	6.31	-15.14	-43.03
40	-8.10E+04	-3.09E+05	-3.02E+05	7.01E+04	87.21	6.31	-15.14	-43.03
50	-6.23E+04	-2.29E+05	-3.02E+05	1.10E+05	87.21	6.31	-15.14	-43.03
60	-7.97E+04	-3.62E+05	-2.83E+05	3.29E+05	62.84	9.49	-15.14	-64.70

Utilizando el software DERIVE 6.1, se aplicó una herramienta matemática denominada “regresión polinómica” que consiste en encontrar la ecuación más exacta que pase por los puntos dados, en este caso se buscará una ecuación para cada coeficiente, este procedimiento se muestra en el Anexo. 9.

Cuando el conjunto de  $n$  puntos experimentales  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1\dots n$ , no presenta una relación lineal, sino que su dependencia funcional es más compleja, podría darse alguno de los supuestos siguientes:

- la función pueda transformarse matemáticamente a una expresión lineal. Por ejemplo, el caso de  $y = Ae^{Bx}$ , la cual se transforma al tomar logaritmos en  $\ln y = \ln A + Bx$ , que resulta ser una relación lineal de  $\ln y$  frente a  $x$ , con lo que se procedería a realizar una regresión lineal ponderada.

- la relación entre las variables sea una función polinómica. Este caso es el que se analiza en las ecuaciones características, a continuación, se explica el procedimiento.

Suponiendo entonces que la variable dependiente,  $y$ , se ajusta a un polinomio de grado  $m$  ( $m + 1$  coeficientes,  $m < n$  donde  $m$  es el grado del polinomio y  $n$  es el número de puntos experimentales) con  $x$  como variable explicativa, es decir, una función de la forma Ec. 3.2:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

Ec. 3.2

Los coeficientes de las ecuaciones se representan en la Tabla 3.6, son de cuarto orden y están en función de la variable dependiente que serían los diferentes coeficientes de rigidez o amortiguación y la variable explicativa o independiente en este caso la velocidad en el eje del TC “ $\omega$ ”.

**Tabla 3.6** Coeficientes de las ecuaciones obtenidas de 20 a 60 krpm

Coef.	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
<b>kxx</b>	-1.065990593	172.6139863	-9976.189452	$2.401322872 \times 10^5$	$-2.042781954 \times 10^6$
<b>kxy</b>	-0.4120098831	29.38822101	747.1884501	$-8.646299180 \times 10^4$	$1.127556323 \times 10^6$
<b>kyx</b>	-2.186292832	366.4581075	$-2.186227578 \times 10^4$	$5.389524184 \times 10^5$	$4.736750288 \times 10^6$

<b>kyy</b>	0.7704943798	-109.4759313	5685.226066	-1.242358284 × 10 <sup>5</sup>	9.771767584 × 10 <sup>5</sup>
<b>cxx</b>	-0.0001015416666	0.0142158333 3	-0.7209458333	15.63741666	-34.64
<b>cxy</b>	1.325 × 10 <sup>-5</sup>	-0.001855	0.094075	-2.0405	22.21
<b>cyx</b>	-	-	-	-	15.14
<b>cyy</b>	-7.525 × 10 <sup>-5</sup>	0.0099333333 33	-0.462075	8.760666666	-97.23

### 3.6.1.2 Coeficientes característicos de 70 krpm a 100 krpm

El mismo procedimiento se aplica en el análisis del siguiente rango en donde se obtuvieron los siguientes coeficientes de las ecuaciones que se muestran en la Tabla 3.7 y que cumplen con la Tabla 3.8.

**Tabla 3.7** Coeficientes de las ecuaciones obtenidas de 70 a 100 krpm

<b>Coef.</b>	<b><i>a</i><sub>3</sub></b>	<b><i>a</i><sub>2</sub></b>	<b><i>a</i><sub>1</sub></b>	<b><i>a</i><sub>0</sub></b>
<b>kxx</b>	18.58443501	-4544.813094	3.694475604 × 10 <sup>5</sup>	- 9.953444740 × 10 <sup>6</sup>
<b>kxy</b>	28.97505686	-8259.546523	7.717609575 × 10 <sup>5</sup>	-2.372007193 × 10 <sup>7</sup>
<b>kyx</b>	690.0549748	-1.788400315 × 10 <sup>5</sup>	1.534577803 × 10 <sup>7</sup>	-4.364407823 × 10 <sup>8</sup>
<b>kyy</b>	-290.2204341	7.318081514 × 10 <sup>4</sup>	-6.093476119 × 10 <sup>6</sup>	1.679289407 × 10 <sup>8</sup>
<b>cxx</b>	0.000715	-0.1859	15.9445	-449.39
<b>cxy</b>	0.01185	-3.081	264.255	-7465.17
<b>cyx</b>	-0.0001533333333	0.0391	-3.273666666	75.02

<b>cyy</b>	0.02734	-6.835	563.204	$-1.531128 \times 10^4$
------------	---------	--------	---------	-------------------------

**Tabla 3.8** Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 70-100 krpm

krpm	kxx	kxy	kyy	cxx	cxy	cyx	cyy
70	1.28E+04	-2.30E+05	-1.86E+06	4.26E+05	1.06	0.33	-15.14
80	3.08E+04	-5.06E+03	-4.66E+04	2.15E+05	2.49	24.03	-15.14
90	3.19E+04	-4.11E+04	-8.75E+05	7.10E+05	1.06	0.33	-14.68
100	1.28E+05	-1.64E+05	-2.08E+05	1.69E+05	1.06	0.33	-14.68

En este caso el orden de las ecuaciones es menor a las del anterior rango debido a que cumple con un menor rango de velocidades.

### 3.6.1.3 Coeficientes característicos de 110 krpm a 150 krpm

En este último rango Tabla 3.9, ocurre algo similar al primero en donde el orden de magnitud es de cuatro y cumple perfectamente con las siguientes ecuaciones que se muestran en la Tabla 3.10, estos cálculos se muestran en el Anexo. 9.

**Tabla 3.9** Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 110-150 krpm

krpm	kxx	kxy	kyy	cxx	cxy	cyx	cyy
110	-5.76E+05	-1.18E+04	1.97E+04	-9.14E+05	1.07	16.81	-1.19
120	-1.08E+06	-1.61E+04	3.26E+05	-1.57E+06	6.23	24.03	-15.14
130	-2.62E+05	-2.07E+04	2.01E+05	-7.24E+05	1.61	0.63	-4.25
140	-2.61E+05	-2.03E+04	1.91E+05	-6.87E+05	1.62	0.62	-15.14
150	-3.14E+04	-2.43E+03	2.29E+04	-8.24E+04	0.65	0.25	-6.05

**Tabla 3.10** Coeficientes de las ecuaciones obtenidas de 110 a 150 krpm

Coef.	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
<b>kxx</b>	13.24078142	-6975.827317	1.372555796 $\times 10^6$	-1.195001778 $\times 10^8$	3.882761498 $\times 10^9$
<b>kxy</b>	0.02971597810	-13.97789526	2460.258911	-	5.646589595 $\times 10^6$
<b>kyy</b>	-3.417875962	1800.084603	-3.545423373 $\times 10^5$	3.094397666 $\times 10^7$	-1.009356817 $\times 10^9$
<b>kyx</b>	15.39191313	-8081.869319	1.585595958 $\times 10^6$	-1.377162872 $\times 10^8$	4.465604524 $\times 10^9$

<b>cxx</b>	-8.345836900 × 10 <sup>5</sup>	0.04413109222	-8.716938276	762.0860861	-2.487278984 × 10 <sup>4</sup>
<b>cxy</b>	-0.0003240289488	0.1710160590	-33.69036784	2935.125396	-9.537482803 × 10 <sup>4</sup>
<b>cyx</b>	0.0003680149047	- 0.1917730802	37.32915956	- 3216.760766	1.035285710 × 10 <sup>5</sup>
<b>cyy</b>	-0.0005376074434	0.2816037611	-55.02070415	4749.980211	-1.527769406 × 10 <sup>5</sup>

El siguiente procedimiento consiste en utilizar las ecuaciones para predecir órbitas que fueron medidas experimentalmente en estado transitorio.

Las condiciones en las que se obtuvieron estas órbitas en estado transitorio se describen en (López, 2014).

En este caso se modelarán las órbitas a las velocidades de 55, 85 y 135 krpm que son velocidades intermedias de los rangos seleccionados anteriormente.

La validación se la realizará comparando estas órbitas modeladas con las órbitas que se van a obtener a partir de una medición de las órbitas que se tiene en estado transitorio. En la siguiente Tabla 3.11 se muestran los resultados obtenidos de las órbitas modeladas y la comparación con las órbitas obtenidas experimentalmente en estado transitorio.

**Tabla 3.11** Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos 55,85 y 135 krpm

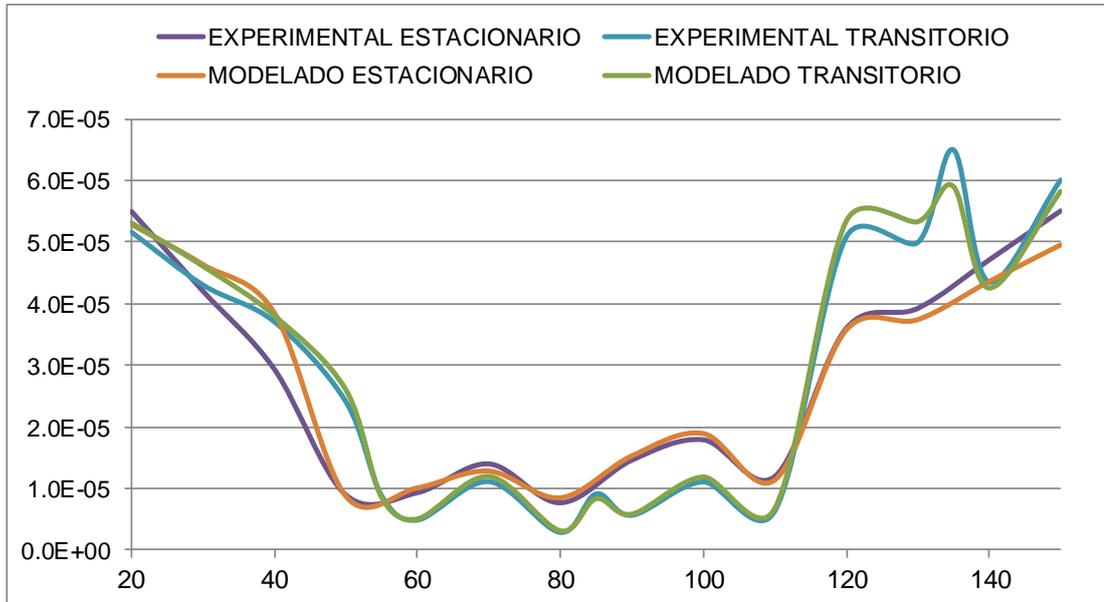
<b>krpm</b>	<b>kxx</b>	<b>kxy</b>	<b>kyx</b>	<b>kyy</b>	<b>cxx</b>	<b>cxy</b>	<b>cyx</b>	<b>cyy</b>
55	-4.93E+04	-2.48E+05	-2.64E+05	1.78E+05	80.54	7.17	-15.14	-49.04
85	2.65E+04	-1.31E+03	-3.89E+05	4.83E+05	1.86	13.66	-14.91	-31.63
135	-1.45E+05	-2.04E+04	1.76E+05	-6.03E+05	0.75	-2.72	-7.69	2.08

<b>EXPERIMENTAL TRANSITORIO</b>		<b>APDL</b>		<b>ERROR%</b>	
<b>A (m)</b>	<b>B (m)</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
8.70E-06	3.00E-06	8.60E-06	2.90E-06	1.15%	3.33%
9.00E-06	5.00E-06	8.40E-06	4.20E-06	6.67%	16.00%
6.50E-05	4.00E-05	5.89E-05	3.80E-05	9.38%	5.00%

Los errores obtenidos muestran finalmente que el ajuste se realizó de manera correcta ya que predice resultados aceptables.

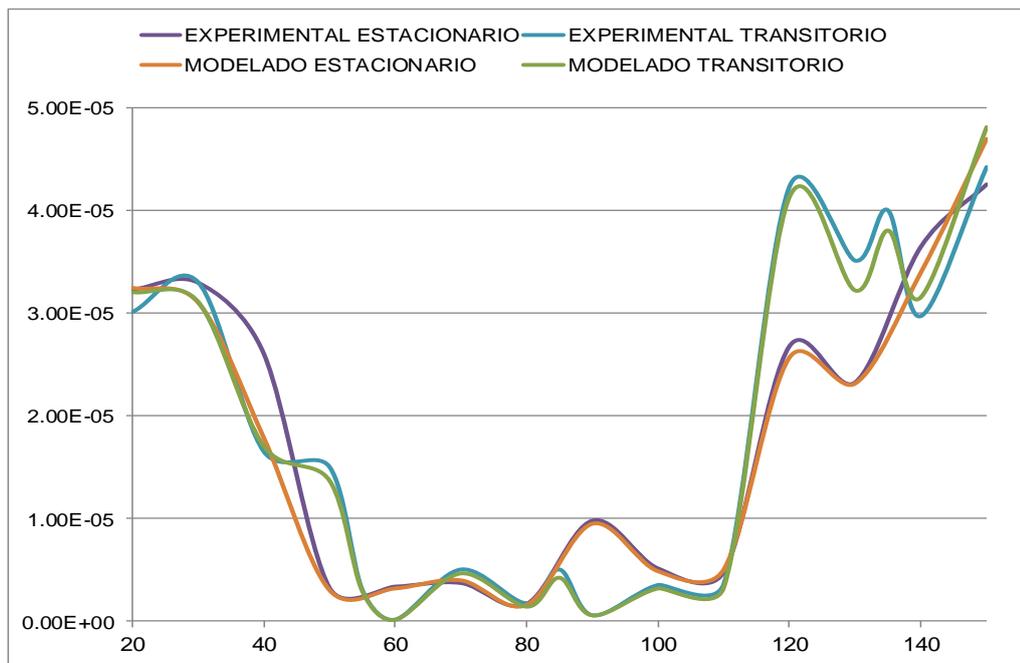
También se obtuvieron aproximadamente las órbitas en estado transitorio; en la Figura 3.24 y Figura 3.25 se observa una comparación entre las mediciones en estado estacionario y transitorio, se observa un comportamiento similar en la mayoría

de velocidades, estas diferencias se dan debido a que las mediciones de las órbitas en estado transitorio no se las puede realizar en valores fijos debido a que la velocidad está variando en todo momento durante la medición, pero estas aproximaciones nos sirven para verificar el comportamiento de las órbitas durante todo el rango de velocidades.



**Figura 3.24** Comparación del semieje "A" en todas las velocidades.

FUENTE: El Autor



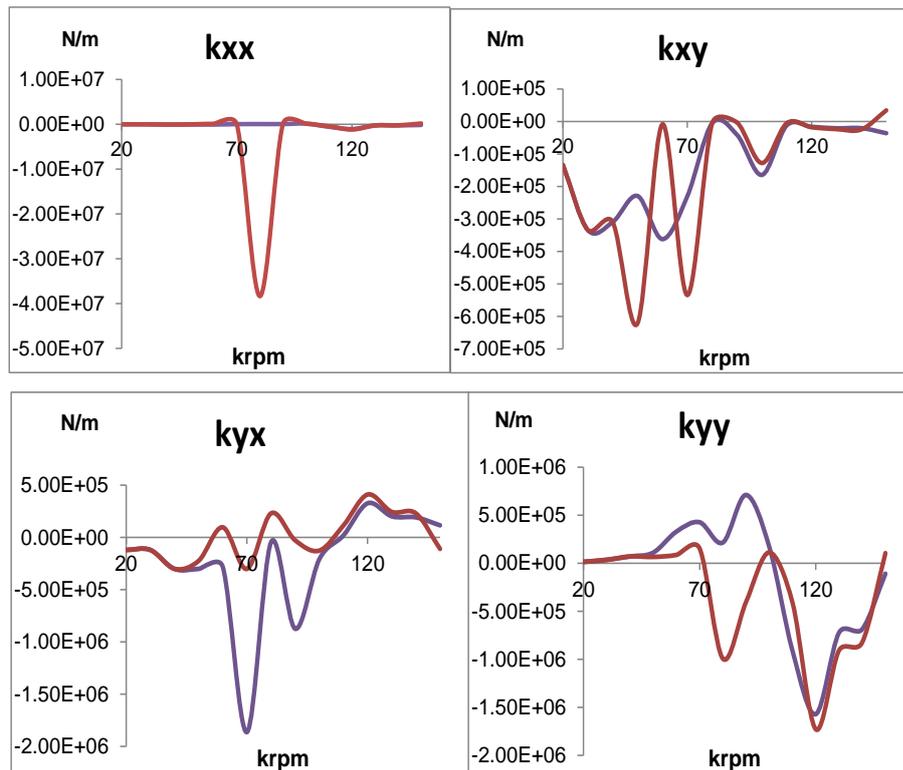
**Figura 3.25** Comparación del semieje "B" en todas las velocidades.

FUENTE: El Autor

También se aplicó el método de ajuste porcentual manual, en donde se obtuvieron y se ajustaron los coeficientes de rigidez y amortiguación para esos valores medidos en condiciones transitorias, se aplicó el mismo método aplicado en los coeficientes en estado estacionario y de igual manera se obtuvo un ajuste adecuado.

En el Anexo. 10 se observan los coeficientes de rigidez y amortiguación ajustados con relación a las órbitas en estado transitorio, también se muestra los errores en el ajuste final.

Por último se muestra la Figura 3.26, en donde se realiza una comparación entre los coeficientes ajustados en condiciones de velocidades estacionarias y los coeficientes en condiciones transitorias, como se puede observar los comportamientos son similares en altas y bajas rpm, la diferencia se da en el rango de 60 a 100 krpm, que es en donde se producen las órbitas de amplitud menor, y es más complicado obtener las órbitas ya que cualquier cambio mínimo incide en las amplitudes de las órbitas.



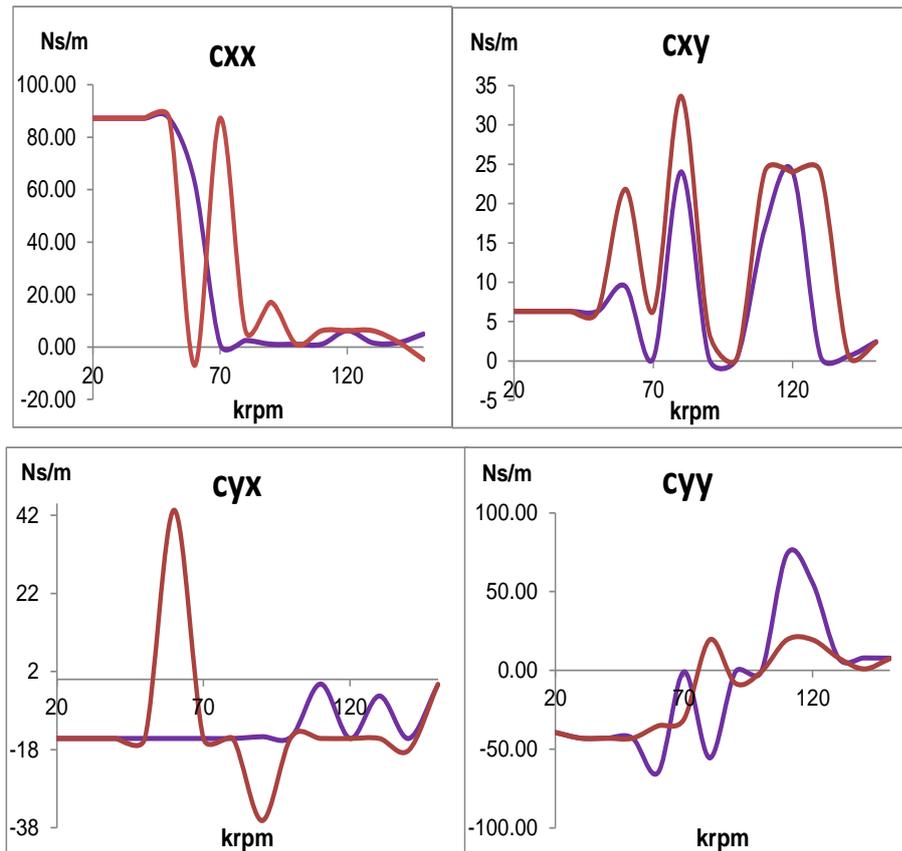


Figura 3.26 Comparación entre coeficientes estacionarios y coeficientes transitorios

FUENTE: El Autor

### 3.7 Conclusiones

Se determinaron los coeficientes de rigidez y amortiguación de la película de aceite, bajo ciertas suposiciones, la primera el comportamiento lineal a lo largo del eje rígido, y la segunda el comportamiento de la película de aceite en el interior del cojinete.

Con un análisis extenso a diferentes velocidades se puede observar que la amplitud de las órbitas es mayor a altas y bajas rpm, y es menor en velocidades intermedias del rango establecido de 20 krpm a 150 krpm como se observó en la Figura 3.18 y en la Figura 3.20, esto debido al fenómeno que se produce durante el giro del TC en donde intervienen 3 fuerzas fundamentales, la fuerza de desequilibrio o propia del eje, la fuerza de la película de lubricación y la fuerza de los gases de escape.

Se comprobó que los resultados están de acuerdo con la teoría aplicada, se puede observar que los coeficientes cumplen con el fenómeno que ocurre en el eje del turbocompresor en donde las órbitas cambian de acuerdo a la variación de estos.

A bajas revoluciones el ajuste de coeficientes tuvo mayor complejidad debido a que las fuerzas pulsantes de los gases de escape y admisión tienen mayor incidencia en las órbitas a estas revoluciones y con las fuerzas menores de lubricación provocan órbitas de mayor amplitud.

Se obtuvieron las ecuaciones características en cada uno de los coeficientes, con la finalidad de generalizar el sistema y proponer estos resultados para un análisis posterior.

Cada coeficiente mantiene un comportamiento característico en los tres rangos de velocidad seleccionados anteriormente esto debido a que mantienen sus signos y son importantes en el análisis de las fuerzas de la película de lubricación, con las ecuaciones se calcularon las órbitas a 55, 85 y 135 krpm obteniendo resultados con un error de 11% promedio entre las órbitas modeladas estacionarias y órbitas experimentales transitorias.

### **3.8 Bibliografía**

Hung, N. S. (2012). *Rotordynamics of Automotive Turbochargers*. Springer.

J.R. Serrano, M. L. (2012). Study of turbocharger shaft motion by means of non-invasive optical techniques: Application to the behaviour analysis in turbocharger lubrication failures. *Science Direct*.

J.R. Serrano, M. L. (2014). Study of the turbocharger shaft motion by means of infrared sensors. *Science Direct*.

Kelly, A. D. (2010). Rotordynamic characterization and comparison of Turbocharger bearing systems. *Borg Warner Turbo and Emissions Systems*.

López, A. (2014). *Estudio teórico experimental de la Dinámica Rotacional de Turbocompresores de MCIA. Aplicación al diagnóstico de fallos*. Valencia: Politécnica de Valencia.

Schweizer, B. (2009). Total instability of turbocharger rotors. *Journal of Sound and Vibration*.

Schweizer, G. (2009). *Applications and Research Topics for Active Magnetic Bearings*. Springer-Verlag.

## CAPITULO 4

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### Introducción

En el capítulo final se expondrá una breve reseña de los temas estudiados anteriormente, con la finalidad de ir analizando cada resultado que se obtuvo.

El primer capítulo inicia presentando una introducción preliminar a la presente tesis, seguida de la organización de la temática que se pretende desarrollar; y, plantea los objetivos principales que van a cumplirse al finalizar la investigación.

El segundo capítulo muestra el estado del arte, el cual aborda la dinámica rotacional en cojinetes siendo el tema principal de la investigación. Se revisa la teoría de ejes para poder analizar la modelación en cojinetes aplicando la ecuación de Reynolds linealizada.

En el tercer capítulo se realizó todo el análisis de la investigación mediante la metodología desarrollada en (López, 2014). Asimismo, se obtuvieron los coeficientes de la película de lubricación que fueron aplicados para la obtención de las órbitas con el modelo propuesto. Posteriormente se compararon los resultados teóricos con los obtenidos experimentalmente, además se ajustó cada coeficiente con la finalidad de conseguir los valores más aproximados. Por último, se lograron las ecuaciones características para cada coeficiente; las cuales permiten predecir las orbitas con el modelo 2D con un error promedio de hasta el 11%.

#### **4.1 Conclusiones sobre la obtención de Coeficientes de Rigidez y Amortiguación.**

Para la estimación de estos coeficientes se utilizó el método de resolución de cojinete corto de la ecuación de Reynolds y la suposición de eje rígido; estas suposiciones a pesar de no tener un grado adecuado de precisión, nos permiten una primera aproximación para obtener las fuerzas en la película de lubricación, condiciones que sirven como parámetros de ingreso en el modelo resorte-amortiguador.

Los resultados que se obtuvieron validaron el modelo aplicado, ya que como se vio en la Tabla 3.1 del capítulo 3, están dentro del orden de magnitud que varios investigadores han obtenido con anterioridad como (Kelly, 2010), (Hung, 2012), (Schweizer, 2009).

Las diferencias que se presentan inicialmente corresponden al tipo de análisis que cada investigador realiza, en este caso se empleó un turbocompresor de cojinetes semiflotantes, donde se aplicó el análisis con cojinete corto. Otra de las razones tiene que ver con las fuerzas pulsantes de los gases de escape y admisión de aire que no se tomaron en cuenta.

#### **4.2 Conclusión sobre la obtención de órbitas**

El comportamiento de las órbitas modeladas es similar al comportamiento de las experimentales, obteniendo órbitas de mayor amplitud en altas y bajas rpm.

Esto se debe a la influencia de la fuerza de desequilibrio en el eje y la fuerza de la película de lubricación durante la generación de las órbitas, como se indicó en la Figura 3.17 capítulo 3; demostrando que la metodología es bien aplicada, debido a las diferencias mínimas entre los datos experimentales y modelados, que están en el orden de 10% de error promedio.

Estas órbitas modeladas fueron comparadas con las experimentales mediante la amplitud de sus semiejes, los errores obtenidos servirán de parámetros para el ajuste de coeficientes, en la Figura 4.1 se observa los errores finales obtenidos en el ajuste de coeficientes, aquí se muestra el error de cada semieje a lo largo de la velocidad en el eje del TC.

La diferencia a 40 krpm se debe a la forma especial de la órbita experimental que se va generando, esto se puede observar en la Figura 3.15, por lo que el ajuste no fue el correcto y no consiguió aproximarse a los valores de la órbita experimental.

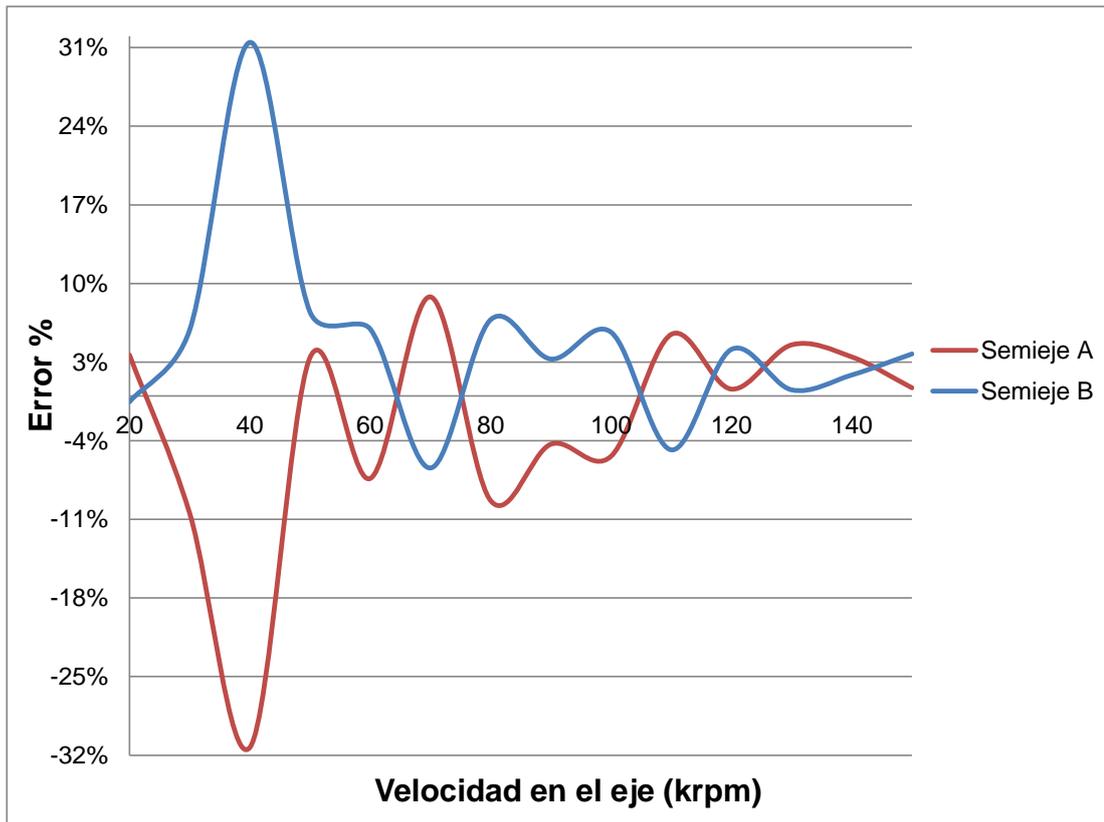


Figura 4.1 Errores finales en los semiejes.

FUENTE: El Autor

### 4.3 Conclusión sobre el ajuste de coeficientes

El método más acertado fue el de buscar las tendencias de comportamiento de cada coeficiente, mediante un ajuste porcentual manual. En vista de la complejidad del fenómeno que ocurre en el eje, se hace demasiado complejo la aplicación de otros métodos científicos que supondrían una mayor cantidad de tiempo y recursos, aun así, previamente se aplicaron otras metodologías.

En la aplicación del método de diseño de experimentos (DOE), se pudo obtener coeficientes de la misma magnitud, pero al momento de ingresar los valores en el modelo los resultados de la órbita a obtener generaban errores cada vez mayores.

Otro método que se utilizó fue el de crear un modelo de optimización aplicando la herramienta *solver* en Excel, se crearon las respectivas ecuaciones, sin embargo, al momento de optimizar, los valores de los coeficientes presentaban errores grandes y perdían sus magnitudes.

Se concluyó que el problema con estos métodos es que la relación entre coeficientes no tiene un orden definido y se observa al momento de modelar, donde cada variación afecta de diferente manera la órbita a obtener; también está el hecho de que el análisis tiene un rango de velocidades desde 20 krpm a 150 krpm haciendo mucho más extensa la obtención de dichos coeficientes, por lo tanto, el método de ajuste porcentual manual seleccionado permite obtener buenos resultados y agilizar el proceso.

Los ajustes fueron más sencillos en los coeficientes a altas rpm, debido a que el modelo está relacionado directamente con la velocidad en el eje, por lo que a altas rpm la magnitud de los coeficientes será mayor en el cálculo, el comportamiento entre coeficientes es similar y con menor número de ajustes cumplirán con las órbitas experimentales.

La metodología en la búsqueda de las tendencias se vuelve más complicada mientras la velocidad del eje va disminuyendo. Al disminuir la velocidad disminuye la magnitud de los coeficientes y al modelar estos obtienen órbitas de menor amplitud dando errores mayores, que son difíciles de corregir, por lo que fue necesario ir modificando permanentemente cada coeficiente y viendo la influencia individual en cada órbita a diferente velocidad.

Se obtuvieron errores promedio entre las órbitas de +/- 10% en casi todas las velocidades, estos errores graficados en la Figura 4.1, son los mínimos que se lograron, cualquier variación en los coeficientes solo aumentará el error porcentual.

También es importante mencionar que las órbitas experimentales en algunas velocidades no tienen formas definidas, razón por la cual se calcularon los semiejes promedio, que son realmente los parámetros a comparar con los semiejes obtenidos con el modelo.

En la velocidad de 40 krpm en el eje del TC, la forma que se alcanza en la órbita experimental no es definida y los errores son los mayores, que están fuera de los valores permisibles, es así que se considera un ajuste incorrecto.

Esta metodología es un complemento a la investigación iniciada anteriormente por (López, 2014) en donde ya se había obtenido y ajustado los coeficientes a la velocidad de 150 krpm.

#### **4.4 Conclusión sobre la obtención de las ecuaciones características de los coeficientes.**

La intención de este procedimiento es describir todo el comportamiento de las órbitas y los coeficientes en los diferentes rangos de velocidad seleccionados.

Se observa que el orden de ecuación es el mismo para cada coeficiente en el rango al que pertenece, entre 20 krpm y 60 krpm fue de cuarto orden, entre 70 krpm y 100 krpm fue de tercer orden y por último entre 110 krpm y 150 krpm fue igualmente de cuarto orden (el orden de la ecuación va a estar en función del número de datos experimentales), las ecuaciones están en función de la velocidad de giro en el eje del turbocompresor debido a que la regresión polinómica se realizó en función de esta variable.

Este procedimiento se valida al predecir órbitas intermedias que no fueron medidas en estado estacionario (55 krpm, 85 krpm, 135 krpm) para luego compararlas con órbitas, en estado transitorio, obteniendo resultados con un error de 11% promedio.

Estas ecuaciones proporcionan resultados que están dentro del comportamiento de las órbitas en estado transitorio (que fueron medidas experimentalmente), entonces se puede decir que son aplicables al análisis transitorio.

De esta manera se demostró que se pueden utilizar estas velocidades estacionarias para determinar el comportamiento de los coeficientes de rigidez y amortiguación en un estado transitorio.

#### **4.5 Recomendaciones y trabajos posteriores**

Se recomienda utilizar estos coeficientes para su aplicación en turbocompresores de este tipo, con cojinetes semiflotantes, también analizar cada una de las ecuaciones obtenidas con la finalidad de obtener ecuaciones más generales.

Podrían aplicar estas ecuaciones en otros turbocompresores, analizar los errores posibles y poder ajustar estas ecuaciones para cada modelo de TC.

Para completar esta investigación sería conveniente realizar la obtención de las velocidades críticas en el eje de este TC, utilizando los resultados de los coeficientes y las órbitas obtenidas en el modelo.

Un proyecto a futuro es el análisis de las fuerzas pulsantes de los gases de escape y aire de la admisión que ingresa al motor, tomando como base los resultados de esta investigación, sobre todo las ecuaciones características que tienen implícitas estas fuerzas pulsantes.

También se propone realizar nuevamente este análisis transitorio utilizando el mismo método de cálculo, y aplicarlo para cojinetes largos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alfred J Büchi. (s.f.). <http://ae-plus.com/milestones/alfred-bchi-the-inventor-of-the-turbocharger>.
- Brown R.D., D. G. (2000). *Journal of Engineering Tribology*.
- Chen, J. W. (2007). Introduction to dynamic of Rotor Bearing Systems. Trafford publishing.
- Daimler Gottlieb. (s.f.). <http://www.buscabiografias.com>.
- Hung, N. S. (2012). Rotordynamics of Automotive Turbochargers. *Springer*.
- J.R. Serrano, M. L. (2012). Study of turbocharger shaft motion by means of non-invasive optical techniques: Application to the behaviour analysis in turbocharger lubrication failures. *Science Direct*.
- J.R. Serrano, M. L. (2014). Study of the turbocharger shaft motion by means of infrared sensors. *Science Direct*.
- Juan Ignacio, H. (2004). Curso de Introducción a la Dinámica de Rotaciones.
- Kelly, A. D. (2010). Rotordynamic characterization and comparison of Turbocharger bearing systems. *Borg Warner Turbo and Emissions Systems*.
- Kirk R.G., A. A. (2008). *Experimental Test Results for Vibration of a High Speed Diesel Engine Turbocharger*.
- López, A. (2014). *Estudio teórico experimental de la Dinámica Rotacional de Turbocompresores de MCI. Aplicación al diagnóstico de fallos*. Valencia: Politécnica de Valencia.
- Louis Renault. (s.f.). <http://www.buscabiografias.com>.
- Office. (s.f.). *Ayuda y aprendizaje de Office*. Recuperado el 2016
- Payri F., y. D. (2011). *Motores de combustión interna alternativos*. Barcelona: Reverté.
- Schweizer, B. (2009). Total instability of turbocharger rotors. *Journal of Sound and Vibration*.
- Schweizer, G. (2009). *Applications and Research Topics for Active Magnetic Bearings*. Springer-Verlag.
- Tian L., W. W. (2013). *Nonlinear effects of unbalance in the rotor floating ring bearing system of turbochargers*. Mechanical Systems and signal Processing.
- Vistamehr, A. (2009). *Analysis of Automotive turbocharger nonlinear vibration including bifurcations*. Master Tesis.
- Yukio, H. (2006). *Hydrodynamic Lubrication*. Tokyo: Yokendo Ltd.

# **ANEXOS**

**Anexo. 1** *Coefficientes de Rigidez y Amortiguación obtenidos a diferentes velocidades.*

<b>krpm</b>	<b>kxx</b>	<b>kxy</b>	<b>kyx</b>	<b>kyy</b>
20	2.83E+04	1.92E+03	-1.72E+04	2.03E+04
30	4.06E+04	4.06E+04	-2.24E+04	-2.24E+04
40	4.97E+04	-3.12E+03	-1.92E+04	4.74E+04
50	6.33E+04	-5.54E+03	-1.68E+04	5.77E+04
60	6.41E+04	-1.69E+04	6.41E+04	1.91E+05
70	1.03E+05	1.13E+04	-1.21E+04	9.79E+04
80	1.13E+05	3.13E+03	-3.78E+04	7.94E+04
90	1.26E+05	7.53E+03	-4.24E+04	9.45E+04
100	6.61E+04	-8.52E+04	-7.92E+04	6.38E+04
110	1.44E+05	-2.95E+03	-3.94E+03	1.66E+05
120	1.54E+05	2.30E+03	-4.66E+04	1.75E+05
130	1.74E+05	1.38E+04	-7.18E+04	1.61E+05
140	1.95E+05	1.51E+04	-1.22E+05	1.25E+05
150	1.52E+05	3.14E+04	-1.00E+05	9.54E+04

<b>krpm</b>	<b>cxx</b>	<b>cxy</b>	<b>cyx</b>	<b>cyy</b>
20	18.63	6.92	-38.35	-13.98
30	11.52	4.14	-31.76	-10.66
40	14.20	3.65	-36.17	-8.22
50	18.03	1.30	-34.03	-2.47
60	-7.00	21.82	43.31	-35.19
70	1.92	0.33	-12.24	-0.69
80	29.05	-9.10	-70.30	-3.18
90	3.07	1.08	-12.29	-0.46
100	1.05	0.32	-14.68	-0.87
110	1.07	-16.81	-1.19	73.86
120	6.22	-24.02	-15.13	55.56
130	-1.60	0.63	-4.25	7.98
140	4.05	-20.76	-9.25	33.05
150	-4.03	1.99	-1.09	6.33

## Anexo. 2 Código utilizado en APDL para la obtención de órbitas en el modelo 2D (López, 2014).

```

finish
/title, dinamica rotacional de un turbocompresor
/units,SI
/com *****
/prep7
mp,ex,10,2.05e+11      !definición del módulo de elasticidad del material ID 1
mp,dens,10,7850      !definición de la densidad del material en 1, para las unidades, voir /status,unidades
mp,prxy,10,0.29      !definición del coeficiente de poisson
mp,ex,11,6.89e+10      !compresor
mp,dens,11,2710
mp,prxy,11,0.33
mp,ex,3,1.2e+11      !helice
mp,dens,3,4370
mp,prxy,3,0.32
mp,ex,4,1.9e+11      !soporte
mp,dens,4,7690.4
mp,prxy,4,0.26
loc_force_1=0.020548880      !en m
loc_force_2=0.10124      !en m
loc_force_3=0.0298      !en m
debut_coussinet_1=0.04245      !en m
fin_coussinet_1=0.04645      !en m
debut_coussinet_2=0.0653      !en m
fin_coussinet_2=0.0689      !en m
F01 = 0.25e-6      !(es 8.6749167e-8) force au mass point 1 en kg.m ce n'est pas ue force mais
seulement une masse fois la distance
F02 = 0.25e-6      !force au mass point 2 en kg.m
!F03 = 0      ! magnitu de fuerza puesta por Clement 4.8823579e-8
lag =45      !en deg
loc_orbite= 0      !en m
nbre_step=10      !nombre de step pour l'étude
nbre_step_visualisation=5      !numero su step pour le plorb
step_caracteristique_orbite=5      !numero du step pour la caracteristique de l'orbite
K11=-31363.28617
K12=-2433.405351      !caract coussinet en kg.s-2 Calculo final archivo excel velocidades_20k_150k
K21=22923.16883
K22=-82437.27263
C11=0.648810695
C12=0.249220729
C21=-6.054090024
C22=3.172976497
longueur_axe=0.103
spinRpm1 = -140000
spinRpm2 = -160000
loc_coj = 0.04245
loc_coj_2 = 0.0694
/com *****
etude_noeud1=0
nset,s,loc,z,0      ! extremité 1 de l'axe
nset,r,loc,y,0
etude_noeud1=ndnext(etude_noeud1)
etude_noeud2=0      ! extremité 2 de l'axe
nset,s,loc,z,longueur_axe
nset,r,loc,y,0
etude_noeud2=ndnext(etude_noeud2)
et,10,SOLID272      ! On crée un nouvel élément de type 1 solid 272
allsel
esel,s,type,,3,4      ! on selectionne tout les éléments mesh 200
esel,a,type,,6,9
emodif,all,type,10      ! On remplace 200 avec 272
emodif,all,mat,10
emodif,all,real,10

```

```

emodif,all,secnum,1
et,11,SOLID272
esel,s,type,,5
emodif,all,type,11
emodif,all,mat,11
emodif,all,real,11
emodif,all,secnum,1
allsel
et,3,SOLID272
esel,s,type,,2
emodif,all,type,3
emodif,all,mat,3
emodif,all,real,3
emodif,all,secnum,1
allsel
et,4,SOLID272
esel,s,type,,1
emodif,all,type,4
emodif,all,mat,4
emodif,all,real,4
emodif,all,secnum,1
allsel
keyopt,10,2,3      ! commande obligatoire
keyopt,11,2,3
keyopt,3,2,3
keyopt,4,2,3
sectype,1,axis,,
secdata,1,0,0,0,0,1      ! on définit notre axe de rotation suivant la méthode 1, l'axe étant Z
naxis
/view,1,1,0,0
nplot
esel,all
epplot
/com *****
/com, Creation des coussinets
/com *****
seltol,7e-5
nset,s,loc,z,debut_coussinet_1,fin_coussinet_1
nset,a,loc,z,debut_coussinet_2,fin_coussinet_2
seltol,2e-5
nset,r,loc,y,0
seltol,7e-5
*get,numn,node,,count
dnumn=numn/10
dnumnarr=nint(dnumn)
nn=0
debut=1
fin=10
*DIM,tableau,ARRAY,numn
*IF,dnumn,le,dnumnarr,then
  *do,i1,1,dnumnarr
    *do,i2,debut,fin
      nn=ndnext(nn)
      TABLEAU(i2)=nn
    *enddo
    debut=debut+10
    fin=fin+10
  *enddo
*else
dnumnarr=dnumnarr+1
  *do,i1,1,dnumnarr
    *do,i2,debut,fin
      nn=ndnext(nn)
      TABLEAU(i2)=nn
    *enddo
  *if,numn-fin,ge,10,then

```

```

        debut=debut+10
        fin=fin+10
    *else
        debut=debut+10
        fin=numn
    *endif
*enddo
*endif

*vwrite,SEQU,tableau(1)
(F3.0,' ',F8.0)

ntid=15
ncid=14
numpilote1=130000
numcoussinetsup1=150000
numero_contact=200000
numero_bearing=210000
*do,para,1,numn
ntid=ntid+2
ncid=ncid+2
numero=tableau(para)
/post1
*get,zposition,node,numero,loc,z
/plot7
/com *****
/com, Create Bonded contact pair - 2(Bearing - 1)
/com *****
*set,tid,ntid
*set,cid,ncid
et,cid,175                ! Define CONTA175 element
et,tid,170                ! Define TARGE170 element
keyo,tid,2,1              ! Don't fix the pilot node
keyo,tid,4,111111
keyo,cid,12,5             ! Bonded Contact
keyo,cid,4,1              ! Deformable RBE3 style load
keyo,cid,2,2              ! MPC style contact
nset,s,loc,z,zposition
nplot
type,cid

real,cid
mat,cid
/com *****
/com, Loop to create bonded contact elements (for Bearing 1)
/com *****
nn = 0
*get,numnbis,node,,count
*do,i,1,numnbis
nn = ndnext(nn)          !selectionne le numéro suivant du noeud de la selection
en,numero_contact,nn
numero_contact=numero_contact+1
*enddo
/com *****
/com, Create Target element TARGE170 on pilot node (for bearing 1)
/com *****
*set,_npilot,numero
type,tid
mat ,cid
real,cid
tshape,pilo
numpilote1=numpilote1+1
en,numpilote1,_npilot
tshape
/com *****
/com, Create additional nodes for modeling bearings

```

```

/com *****
numcoussinetsup1=numcoussinetsup1+1
n,numcoussinetsup1,0,0.015,zposition

/com *****
/com, Modeling bearing using COMBI214 element
/com *****
*set,_jid,200
et,_jid,combi214          ! Element Type # 9: Bearing element
keyopt,_jid,2,0          ! XY Plane
keyopt,_jid,3,1          ! Element is symmetric
r,_jid,K11,K22,K12,K21,C11,C22,C12,C21      ! Real constants ( K11,K22,K12,K21,C11,C22)
mat,_jid
real,_jid
type,_jid
en,numero_bearing,numero,numcoussinetsup1
numero_bearing=numero_bearing+1
/com *****
/com, Constraint rotor in axial and rotation DOF (i.e. UX & ROTX) at bearing locations
/com *****
d,numero,uz
d,numero,roty
d,numero,rotx
/com *****
/com, Define fixed support condition to the second nodes of Bearing elements
/com *****
d,numcoussinetsup1,all          ! Second nodes of bearing
*vwrite,SEQU,tableau(1)
(F3.0,' ',F8.0)
*enddo
allsel,all,all
finish
/com *****
/com, Create mass less line element (BEAM188 elements)to produce orbits plot
/com *****
/prep7
mp,ex,201,205e+9          !définition du module élastique du matériau d'ID 11
mp,dens,201,0.0000001     !définition de la densité du matériau 11
mp,prxy,201,0.29         !définition du coefficient de poisson
et,201,188,,2            !définition d'un élément d'ID 11 de nom 188, le 2 correspond à une poutre basé sur une
quadtratic shape fonction
sectype,201,beam,csolid  !définition de la section numéro 11 de type poutre circulaire (csolid= solide circulaire)
secdata,0.0000001,16     ! rayon de 0.01524 et nombre de division sur la circonférence 32
seltol,2e-5
nset,r,loc,y,0
seltol,7e-5
*get,nbrelocy,node,,count
ecart=longueur_axe/nbrelocy
numero_noeud=140000
nbrelocy=nbrelocy+1
distance=0
*do,k,1,nbrelocy
numero_noeud=numero_noeud+1
n,numero_noeud,, distance
distance=distance+ecart
*enddo
numero_final=numero_noeud-1
type,201
mat,201
secnum,201
*do,i,140001,numero_final,1
e,i,i+1 !on crée un élément entre le ième et le i+1ème noeud de type 11
*enddo
eplot
nset,s,loc,y,0          ! on selectionne les noeuds se trouvant à y=0

```

```

cpintf,ux,0.000247    ! on définit des degrés de liberté en X entre des noeuds coincidents( 0.01 correspond à la
tolérance qui permet de dire que les noeuds sont coincident ou non)
cpintf,uy,0.000247
cpintf,uz,0.000247
allsel,all,all
eplot
finish
/com *****
/solu
/com *****
/com, Select all rotating elements supporting Coriolis command
/com *****
esel,,ename,,272    !On selectionne les éléments qui portent le nom 272
esel,a,ename,,188
cm,rot_part,elem    ! creer un composant rot_part regroupant tout les éléments selectionnés auparavant
esel,all
/com *****
/com, Force = mass * radius.
/com, Co-ordinate of node nn1 = node(0,0,25) and Co-ordinate of node nn2 = node(0,0,86)
/com *****
nodeUnb1 = node(0,0,loc_force_1)
nodeUnb2 = node(0,0,loc_force_2)
nodeUnb3 = node(0,0,loc_force_3)
/com *****
/com, Applying rotating forces in the clockwise direction
/com *****
/com *****
/com, Applying rotating forces in the clockwise direction
/com *****
lag_rad=lag*acos(-1)/180
!Fy03=F03*cos(lag_rad)
!Fx03=F03*sin(lag_rad)
Fy01=F01*cos(lag_rad)
Fx01=F01*sin(lag_rad)
Fy02=F02*cos(lag_rad)
Fx02=F02*sin(lag_rad)
f,nodeUnb1,fy,-Fy01,Fx01    ! Real FY component at node 'nodeUnb'
f,nodeUnb2,fy,-Fy02,Fx02    ! Real FY component at node 'nodeUnb'
!f,nodeUnb3,fy,-Fy03,Fx03    ! Real FY component at node 'nodeUnb'
/com *****
/com, Solution Controls for Full Harmonic analysis
/com, Frequency range of excitation is 0 - 150,000 rpm
/com *****
/com Output the stiffness and Mass Matrix
spinRds = 1    ! Rotating velocity of the shaft to specify the spin axis
begin_freq = spinRpm1/60    ! Begin frequency of excitation

end_freq = spinRpm2/60    ! End frequency of excitation
antype,harmic    ! Perform Harmonic analysis
hropt,full    ! Choose full harmonic analysis
synchro,,rot_part
nsubst,nbre_step    !nombre de substeps
harfrq,begin_freq,end_freq
kbc,1
dmpmat,0    ! Define structural damping ratio 0.01=1%
cmomega,rot_part,,spinRds    ! Specify rotation velocity to the rotor, on définit ici l'axe z car spinrds est en
3ème coordonnées (cad qu'il y a 3 virgules avant)
coriolis,on,,on    ! Coriolis command activated
solve
finish
/com *****
/post26
/out,
/com *****
/com, Output: Amplitude at nodes 1306 (tuerca) and 426 (other extremity) as a function of the frequency
/com *****

```

```

/com *****
/com, Node tuerca
/com *****
nsol,2,etude_noeud1,U,Y,UY !On rentre dans le numéro de référence 2 le déplacement en Y du noeud 62 le
résultat apparaitra sous le nom UY
nsol,3,etude_noeud1,U,X,UX
realvar,4,2,,UYR !On rentre dans le numéro de référence 4 la partie réel du numéro de référence 2 le résultat
apparaitra sous le nom de UYR
realvar,5,3,,UXR
prod,6,4,4,,UYR_2 !On rentre dans le numéro de référence 6 le produit UYR par lui meme
prod,7,5,5,,UXR_2
add,8,6,7,,UYR_2+UXR_2 !On rentre dans le numéro de référence 8 la somme UYR_2 plus UZR_2 2 veut dire au
carré
sqrt,9,8,,AMPL_extremity1_tuerca
extreme
/com *****
/com, Node other extremity
/com *****
nsol,2,etude_noeud2,U,Y,UY
nsol,3,etude_noeud2,U,X,UX
realvar,4,2,,UYR
realvar,5,3,,UXR
prod,6,4,4,,UYR_2
prod,7,5,5,,UXR_2
add,8,6,7,,UYR_2+UXR_2
sqrt,10,8,,AMPL_extremity2
extreme
/com *****
/com, Graphics display
/com *****
/gropt,logy,1 !echelle logarithmique en Y
/yrange,1.0e-8,5e-3 !définir l'étendue de Y
plvar,9,10 ! Displays variables in the form of a graph
finish
/com *****
/com, Output: Orbits plot at the given frequency
/com *****
/post1
etude_noeud3=0
esel,s,ename,,188
allsel,below,elem
nsel,r,loc,z,loc_orbite
etude_noeud3=ndnext(etude_noeud3)
*dim,Aorbt,,6 ! création d'un tableau nommé Aorbt à 4 lignes
*dim,Norbt,string,8,6 ! création d'un tableau nommé Norbt à 8 lignes et 4 colonnes dont les entrées sont des
chaines de caractère
Norbt(1,1) = 'A' ! On met A dans la première ligne 1ère colonne
Norbt(1,2) = 'B' ! On met B dans la première ligne 2ème colonne
Norbt(1,3) = 'YMAX'
Norbt(1,4) = 'ZMAX' ! Ne pas changer Zmax ou Ymax en Xmax, on parle ici des axes locaux de l'orbite:
Xmax n'existe pas
Norbt(1,5) = 'PSI'
Norbt(1,6) = 'PHI'
esel,s,ename,,188 ! reselect a set from the current set, selection par le nom de l'élément ou son numéro
d'identifiant, ici 188
allsel,below,elem ! Selects all items directly associated with and below the selected items of the specified
entity type.
nsel,r,loc,z,loc_orbite
set,1,step_caracteristique_orbite ! visualise les orbites à une fréquence de 2500Hz
prorb ! Store the orbital motion characteristics of a rotating structure
/com, Node(=etude_noeud3) selected at the rigid disk location
*get,Aorbt(1),node,etude_noeud3,ORBT,A
!Aorbt(1) est le nom du résultat: semi-major axis
*get,Aorbt(2),node,etude_noeud3,ORBT,B
!Aorbt(2) est le nom du résultat: semi-minor axis
*get,Aorbt(3),node,etude_noeud3,ORBT,YMAX

```

```
!déplacement max suivant l'axe Y
*get,Aorbt(4),node,etude_noeud3,ORBT,ZMAX
*get,Aorbt(5),node,etude_noeud3,ORBT,PSI
*get,Aorbt(6),node,etude_noeud3,ORBT,PHI
/com, =====
/com, Orbital Motion Characteristics of Node (=etude_noeud3)
/com, =====
/com,
/com,          | ANSYS |
/com,
/out,
*vwrite,Norbt(1),Aorbt(1)
(5X,a,5X,F12.10)
finish
```

**Anexo. 3** *Semiejes medidos y perímetros experimentales*

	SEMIEJES		
Regimen (rpm)	A (mm)	B (mm)	Perímetro (mm)
20000	5.07E-02	3.65E-02	2.76E-01
30000	5.09E-02	6.27E-05	2.03E-01
40000	3.03E-02	6.89E-05	1.21E-01
50000	6.99E-03	5.26E-03	3.87E-02
60000	1.03E-02	2.95E-03	4.48E-02
70000	1.40E-02	3.75E-03	6.05E-02
80000	7.70E-03	1.71E-03	3.27E-02
90000	1.46E-02	9.82E-03	7.75E-02
100000	1.79E-02	5.17E-03	7.81E-02
110000	1.20E-02	4.82E-03	5.51E-02
120000	3.60E-02	2.68E-02	1.98E-01
130000	3.92E-02	2.33E-02	2.00E-01
140000	4.71E-02	3.65E-02	2.64E-01
150000	5.55E-02	4.26E-02	3.10E-01

**Anexo. 4** Órbitas calculadas a diferentes velocidades

krpm	APDL		EXPERIMENTAL	
	A (m)	B (m)	A (m)	B (m)
20	3.87E-06	1.83E-07	5.07E-05	3.65E-05
30	2.73E-06	9.58E-07	5.09E-05	6.27E-08
40	5.20E-06	9.10E-09	3.03E-05	6.89E-08
50	5.31E-06	3.09E-08	6.99E-06	5.26E-06
60	7.13E-06	1.75E-07	1.03E-05	2.95E-06
70	7.42E-06	4.09E-07	1.40E-05	3.75E-06
80	1.29E-05	2.02E-06	7.70E-06	1.71E-06
90	2.73E-05	1.56E-05	1.46E-05	9.82E-06
100	8.96E-06	2.10E-06	1.79E-05	5.17E-06
110	2.46E-06	2.07E-06	1.20E-05	4.82E-06
120	5.04E-06	2.45E-06	3.60E-05	2.68E-05
130	5.63E-06	2.89E-06	3.92E-05	2.33E-05
140	1.19E-05	7.53E-06	4.71E-05	3.65E-05
150	6.70E-05	5.67E-05	5.55E-05	4.26E-05

Anexo. 5 Coeficientes y órbitas ajustadas.

krpm	EXPERIMENTAL ESTACIONARIO										APDL		ERROR%	
	kxx	kxy	kyy	kxx	cxy	cyy	cyy	A (m)	B (m)	A	B	Semieje A	Semieje B	
20	-2.03E+04	-1.34E+05	1.40E+04	87.21	6.309	-15.135	-39.42	5.49E-05	3.23E-05	5.29E-05	3.25E-05	3.63%	-0.53%	
30	-2.03E+04	-3.34E+05	3.51E+04	87.21	6.309	-15.135	-43.03	4.20E-05	3.30E-05	4.64E-05	3.11E-05	-10.48%	5.88%	
40	-8.10E+04	-3.09E+05	7.01E+04	87.21	6.309	-15.135	-43.03	2.93E-05	2.61E-05	3.85E-05	1.79E-05	-31.30%	31.46%	
50	-6.23E+04	-2.29E+05	1.10E+05	87.21	6.309	-15.135	-43.03	8.97E-06	3.27E-06	8.67E-06	3.03E-06	3.43%	7.44%	
60	-7.97E+04	-3.62E+05	3.29E+05	62.84	9.486	-15.135	-64.7	9.35E-06	3.40E-06	1.00E-05	3.20E-06	-7.36%	5.94%	
70	1.28E+04	-2.30E+05	4.26E+05	1.058	0.328	-15.135	-0.875	1.40E-05	3.75E-06	1.28E-05	3.99E-06	8.81%	-6.42%	
80	3.08E+04	-5.06E+03	2.15E+05	2.492	24.03	-15.135	-55.56	7.70E-06	1.71E-06	8.42E-06	1.59E-06	-9.33%	6.78%	
90	3.19E+04	-4.11E+04	7.10E+05	1.058	0.328	-14.682	-0.875	1.46E-05	9.82E-06	1.52E-05	9.50E-06	-4.31%	3.27%	
100	1.28E+05	-1.64E+05	1.69E+05	1.058	0.328	-14.682	-0.875	1.79E-05	5.17E-06	1.89E-05	4.87E-06	-5.38%	5.66%	
110	-5.76E+05	-1.18E+04	-9.14E+05	1.07	16.81	-1.1901	73.863	1.20E-05	4.82E-06	1.13E-05	5.05E-06	5.47%	-4.81%	
120	-1.08E+06	-1.61E+04	-1.57E+06	6.229	24.03	-15.135	55.565	3.60E-05	2.68E-05	3.57E-05	2.57E-05	0.60%	4.13%	
130	-2.62E+05	-2.07E+04	-7.24E+05	1.609	0.631	-4.2523	7.9878	3.92E-05	2.33E-05	3.74E-05	2.32E-05	4.53%	0.53%	
140	-2.61E+05	-2.03E+04	-6.87E+05	1.622	0.623	-15.135	7.9324	4.71E-05	3.65E-05	4.36E-05	3.40E-05	7.27%	6.87%	
150	-3.14E+04	-2.43E+03	-8.24E+04	0.649	0.249	-6.0541	3.173	5.50E-05	4.26E-05	4.96E-05	4.70E-05	9.82%	-10.39%	

Anexo. 6 Metodología “modelo matemático aplicado a 140 krpm”.

ORBITA COJINETE		COORDENADAS CENTRO ORBITA				Rj	c	$\mu$	k	$\omega$	L	e	$\theta'$
x(m)	y(m)	x(m)	y(m)	y(m)	(m)	(m)	(Ns/m <sup>2</sup> )	(m)	(rad/s)	(m)	(m)	(rad/s)	
8.97354E-06	7.86922E-07	0	5.5904E-20		0.003106	0.003064	0.00658977	0.2144756	14660.7657	0.004	9.00798E-06	0	
8.97613E-06	6.94128E-07							0.21435535			9.00292E-06	1.03E+03	
8.9794E-06	6.01301E-07							0.21427417			8.99952E-06	1.03E+03	
8.98375E-06	5.08446E-07							0.21424107			8.99812E-06	1.03E+03	
8.98949E-06	4.1557E-07							0.21426417			8.9991E-06	1.03E+03	
8.99694E-06	3.22678E-07							0.21435054			9.00272E-06	1.03E+03	
9.00632E-06	2.29777E-07							0.21450604			9.00925E-06	1.03E+03	
9.01784E-06	1.36873E-07							0.21473513			9.01888E-06	1.03E+03	
9.03161E-06	4.39722E-08							0.21504085			9.03172E-06	1.03E+03	
9.0477E-06	-4.8919E-08							0.21542468			9.04784E-06	4.71E+05	
9.06612E-06	-1.41795E-07							0.21588651			9.06723E-06	1.02E+03	
9.08681E-06	-2.34648E-07							0.21642469			9.08984E-06	1.02E+03	
9.10963E-06	-3.27474E-07							0.21703602			9.11551E-06	1.01E+03	
9.1344E-06	-4.20265E-07							0.21771581			9.14406E-06	1.00E+03	
9.16088E-06	-5.13016E-07							0.21845802			9.17524E-06	9.97E+02	
9.18878E-06	-6.05721E-07							0.21925539			9.20873E-06	9.88E+02	
9.21776E-06	-6.98373E-07							0.22009956			9.24418E-06	9.79E+02	
9.24745E-06	-7.90965E-07							0.22098132			9.28122E-06	9.71E+02	
9.27744E-06	-8.83493E-07							0.22189074			9.31941E-06	9.62E+02	

MÁXIMA EXCENTRICIDAD DE ORBITA  
9.5185E-06

COEFICIENTES CALCULADOS MATLAB		AMORTIGUACION	
RIGIDEZ			
kxx	195045.312	cxx	4.055066845
kxy	15133.11786	cxy	-20.76839411
kyy	-121866.9263	cyy	-9.254828333
	125326.5113		33.05183852
<b>VALORES DE ORBITA EXPERIMENTAL</b>			
A	1.19323E-05	A	4.70597E-05
B	7.5298E-06	B	3.65068E-05
YMAX	1.18503E-05		
ZMAX	7.65830E-06		
PSI	8.68161		

v(x)		v(y)		k		t		$\theta$		FUERZAS		FUERZAS X,Y	
x(m/s)	y(m/s)	x(m/s)	y(m/s)			(seg)	(rad)	F(t)	F(tg)	F(X) (N)	F(Y) (N)		
0	0	0	0	0	0	0	0.08746982	-0.54281982	1.94152026	1.8866779	0.710353		
2.59E-04	9.28E-03	12.0245264	1.00E-05	0.07717692	-0.48302019	1.67198134	1.6297634	0.610493					
3.28E-04	9.28E-03	8.11789735	2.00E-05	0.06686467	-0.47696754	1.66939719	1.6337982	0.587442					
4.34E-04	9.29E-03	3.31059857	3.00E-05	0.05653593	-0.469895	1.66700815	1.6377929	0.56334					
5.75E-04	9.29E-03	2.30989357	4.00E-05	0.0461955	-0.46850485	1.66655954	1.6431465	0.544965					
7.44E-04	9.29E-03	8.63738837	5.00E-05	0.03584994	-0.47782086	1.66937577	1.651177	0.537348					
9.38E-04	9.29E-03	15.5493676	6.00E-05	0.02550731	-0.48835813	1.67322646	1.6602268	0.530874					
1.15E-03	9.29E-03	22.9097532	7.00E-05	0.01517685	-0.49996071	1.67814071	1.6703599	0.525371					
1.38E-03	9.29E-03	30.5719925	8.00E-05	0.00486866	-0.51244964	1.68412294	1.681608	0.520643					
1.61E-03	9.29E-03	38.3823875	9.00E-05	4.7179572	34.636775	-123.494429	-35.30397	123.3054					
1.84E-03	9.29E-03	46.1835918	0.0001	4.72802775	-0.53927858	1.69918223	0.5657847	-1.690541					
2.07E-03	9.29E-03	53.8181876	0.00011	4.73820621	-0.55318124	1.70814226	0.5970915	-1.693293					
2.28E-03	9.28E-03	61.1322618	0.00012	4.74832162	-0.56710453	1.71793825	0.6284552	-1.696456					
2.48E-03	9.28E-03	67.978892	0.00013	4.75836564	-0.58081698	1.72845499	0.6596438	-1.699934					
2.65E-03	9.28E-03	74.2214627	0.00014	4.7683313	-0.59409063	1.7395587	0.6904255	-1.70362					
2.79E-03	9.27E-03	79.7367338	0.00015	4.77821334	-0.60670582	1.75110025	0.7205737	-1.707401					
2.90E-03	9.27E-03	84.417592	0.00016	4.78800829	-0.61845589	1.76291881	0.7498722	-1.711158					
2.97E-03	9.26E-03	88.1754238	0.00017	4.79771467	-0.62915178	1.77484593	0.7781192	-1.714771					
3.00E-03	9.25E-03	90.9420594	0.00018	4.80733297	-0.63862622	1.78670985	0.8051326	-1.71812					



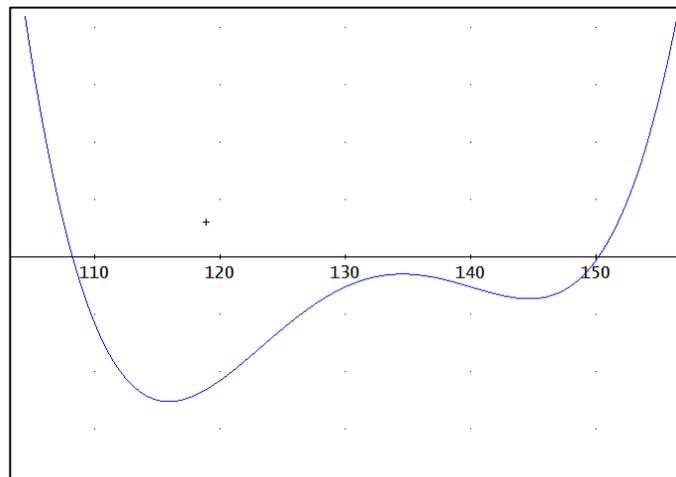


**Anexo. 9** Procedimiento para la obtención de las ecuaciones características en Derive 6.0.

$$k_{xx} = \text{POLY\_INTERPOLATE} \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} 110 \quad -576281.34 \\ 120 \quad -1077545.612 \\ 130 \quad -261698.8586 \\ 140 \quad -261360.7181 \\ 150 \quad -31363.28617 \end{array} \right) , \omega \end{array} \right)$$

$$k_{xx} = 2.285713191 \cdot 10^{-27} \cdot (5.792844647 \cdot 10^{27} \cdot \omega^4 - 3.051925913 \cdot 10^{30} \cdot \omega^3 + 6.004934486 \cdot 10^{32} \cdot \omega^2 - 5.228135286 \cdot 10^{34} \cdot \omega + 1.698708969 \cdot 10^{36})$$

$$k_{xx} = 13.24078142 \cdot \omega^4 - 6975.827317 \cdot \omega^3 + 1.372555796 \cdot 10^6 \cdot \omega^2 - 1.195001778 \cdot 10^8 \cdot \omega + 3.882761498 \cdot 10^9$$



**Anexo. 10** Coeficientes de rigidez y amortiguación obtenidos en estado transitorio

krpm	kxx	kxy	kyy	kyy	cxx	cxy	cyx	cyy
20	-2.03E+04	-1.34E+05	-1.21E+05	1.40E+04	87.21	6.31	-15.14	-39.42
30	-2.03E+04	-3.34E+05	-1.21E+05	3.51E+04	87.21	6.31	-15.14	-43.03
40	-8.10E+04	-3.09E+05	-3.02E+05	7.01E+04	87.21	6.31	-15.14	-43.03
50	-3.77E+04	-6.21E+05	-2.25E+05	6.52E+04	87.21	6.31	-15.14	-43.03
60	9.62E+04	-8.44E+03	9.61E+04	8.60E+04	-7.00	21.82	43.32	-35.20
70	-6.23E+04	-5.34E+05	-3.02E+05	1.53E+05	87.21	6.31	-15.14	-30.98
80	-3.83E+07	-4.96E+03	2.30E+05	-9.93E+05	6.23	33.64	-15.14	19.45
90	4.97E+04	-3.12E+03	-2.89E+04	-4.03E+05	17.04	3.65	-36.17	-8.22
100	1.04E+05	-1.28E+05	-1.27E+05	1.12E+05	1.06	0.33	-14.68	-0.88
110	-4.65E+05	-4.96E+03	1.15E+05	-4.11E+05	6.23	24.03	-15.14	19.45
120	-1.19E+06	-1.77E+04	4.10E+05	-1.73E+06	6.23	24.03	-15.14	19.45
130	-2.96E+05	-2.34E+04	2.43E+05	-9.09E+05	6.23	24.03	-15.14	7.99
140	-2.51E+05	-2.43E+04	2.29E+05	-8.24E+05	1.95	0.75	-18.16	0.95
150	1.67E+05	3.45E+04	-1.10E+05	1.05E+05	-4.76	2.35	-1.29	7.48

krpm	EXPERIMENTAL TRANSITORIO		APDL		ERROR%	
	A (m)	B (m)	A	B	A	B
20	5.160E-05	3.010E-05	5.300E-05	3.200E-05	-2.71%	-6.31%
30	4.300E-05	3.300E-05	4.600E-05	3.106E-05	-6.98%	5.88%
40	3.700E-05	1.650E-05	3.800E-05	1.700E-05	-2.70%	-3.03%
50	2.400E-05	1.500E-05	2.600E-05	1.366E-05	-8.33%	8.93%
60	4.760E-06	1.180E-07	5.120E-06	1.108E-07	-7.56%	6.10%
70	1.100E-05	5.000E-06	1.200E-05	4.625E-06	-9.09%	7.50%
80	2.740E-06	1.710E-06	3.200E-06	1.388E-06	-16.79%	18.83%
90	5.530E-06	5.400E-07	5.900E-06	5.433E-07	-6.69%	-0.61%
100	1.097E-05	3.489E-06	1.190E-05	3.160E-06	-8.50%	9.42%
110	6.200E-06	3.600E-06	6.800E-06	3.250E-06	-9.68%	9.72%
120	5.080E-05	4.232E-05	5.328E-05	4.127E-05	-4.88%	2.48%
130	4.990E-05	3.510E-05	5.319E-05	3.216E-05	-6.59%	8.38%
140	4.350E-05	2.970E-05	4.247E-05	3.151E-05	2.37%	-6.09%
150	6.008E-05	4.422E-05	5.810E-05	4.805E-05	3.30%	-8.66%