



DEPARTAMENTO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

“Diseño de un controlador para el seguimiento de trayectorias con estimación de la incertidumbre. Aplicación a buques.”

**Trabajo de graduación previo a la obtención del título de
Magister en Matemáticas Aplicadas.**

Autores:

Ing. Xavier Armijos Cordero.

Ing. Xavier Mosquera Cedillo.

Director:

Dr. Gustavo Scaglia.

Cuenca – Ecuador.

2017

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todas las personas que han hecho posible directamente o indirectamente el desarrollo de este trabajo, de una manera especial a los doctores Gustavo Scaglia y Emanuel Serrano por su aporte intelectual y conocimiento científico de una manera incondicional y desinteresada

DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS CON ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE. APLICACIÓN A BUQUES

RESUMEN

En esta investigación se pretende mejorar el desempeño del controlador para seguimiento de trayectoria propuesto por el Dr. Gustavo Scaglia en su tesis doctoral (Scaglia G. E. p., 2006), mediante la inserción de la estimación de la incertidumbre en el sistema. Originalmente el método calcula las acciones de control necesarias para que la trayectoria del móvil se ajuste a la deseada en cada período de muestreo utilizando álgebra lineal. Las principales ventajas de este método radican en su simplicidad, bajo costo computacional y en la tendencia del error a converger a cero. El método fue aplicado al seguimiento de trayectorias de un buque minimizando el efecto de las perturbaciones y errores de modelado.

La trayectoria de un buque puede diferir de la planificada, debido a las características de la misma (por ejemplo a un controlador se le dificulta actuar en ángulos pronunciados, por lo cual la ruta que sigue se distancia de la referencial), así como también debido a que los modelos que se usan no son exactos, esto conlleva a que cuando se calcula la acción de control se produce un error entre lo real y planteado. La estimación de la incertidumbre posibilita tener un resultado aproximado del error futuro generando una acción de control que corrija la trayectoria de forma anticipada.

Para validar la acción del controlador se realizaron simulaciones con diferentes trayectorias en las cuales se ejecutó un análisis comparativo de los errores generados con y sin la adición de la incertidumbre.

PALABRAS CLAVE: Controlador aplicación a buque, Seguimiento de trayectorias, Estimación de la Incertidumbre.

DESIGN OF A TRAJECTORY TRACKING CONTROLLER WITH ESTIMATED UNCERTAINTIES, APPLIED TO SHIPS

ABSTRACT

This research aims to improve the performance of the Trajectory Tracking Controller proposed by Dr. Gustavo Scaglia in his doctoral thesis (Scaglia G. E. p., 2006), by inserting an uncertainty estimation input into the system. Initially, the method calculates by means of linear algebra, the control actions necessary for the mobile trajectory to match the desired one in each sampling period. The main advantages of this method lie in its simplicity, low computational cost and in the tendency of the error to converge to zero. The method was applied to the trajectory tracking of a ship, minimizing the effect of the modeling disturbances and errors.

The trajectory of a ship may differ from what was planned due to its characteristics (for example, a controller has difficulty acting at steep angles; consequently, the following route is distant from the reference). This also occurs because the models used are not accurate; which means that when the control action is calculated, an error between the real and the proposed occurs. The uncertainty estimation makes it possible to have an approximate result of the future error, generating a control action that corrects the trajectory in advance. In order to validate the controller action, simulations with different trajectories were carried out. In addition, a comparative analysis of the errors generated with and without the uncertainty input was performed.

KEYWORDS: Ship Application Controller, Trajectory Tracking, Uncertainty Estimation.



C.E.S. Idiomas



Translated by,
Lic. Lourdes Crespo

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	III
ABSTRACT	IV
ÍNDICE DE TABLAS.....	VI
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	VII
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPITULO I: MATERIALES Y MÉTODOS.....	2
PLANTA.....	2
CONTROLADOR	4
ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE	9
DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE PROPORCIONALIDAD	16
INCERTIDUMBRE	17
CAPITULO II: RESULTADOS	18
PARÁMETROS DE LA PLANTA	18
TRAYECTORIAS	18
DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES	20
TRAYECTORIAS CON O SIN ESTIMACION DE INCERTIDUMBRE	29
TRAYECTORIAS CON ADICIÓN DE INCERTIDUMBRE.....	35
CAPITULO III: DISCUSIÓN.....	44
CONCLUSIONES.....	45
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46
ANEXO.....	47

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Estimación de la función E.....	10
Tabla 2: Cálculo de Estimaciones.....	12
Tabla 3: Parámetros del Buque	18
Tabla 4: Trayectorias de Referencia.....	20
Tabla 5: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Cuadrada.....	21
Tabla 6: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Senoidal	22
Tabla 7: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Hexagonal	23
Tabla 8: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Triangular	24
Tabla 9: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Compuesta	25
Tabla 10: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Cuadrada.....	26
Tabla 11: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Senoidal	27
Tabla 12: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Hexagonal	27
Tabla 13: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Triangular	28
Tabla 14: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Compuesta	28
Tabla 15: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Cuadrada	29
Tabla 16: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Senoidal	30
Tabla 17: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Hexagonal.....	31
Tabla 18: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Triangular	33
Tabla 19: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Compuesta.....	34
Tabla 20: Costos con Incertidumbre T. Cuadrada.....	36
Tabla 21: Costos con Incertidumbre T. Senoidal.....	37
Tabla 22: Costos con Incertidumbre T. Hexagonal	39
Tabla 23: Costos con Incertidumbre T. Triangular	40
Tabla 24: Costos con Incertidumbre T. Combinada	42
Tabla 25: Porcentaje de Mejora con Estimación de Incertidumbre	44

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Diagrama de Bloques para el Diseño del Controlador	2
Ilustración 2: Marco de Referencia del Buque	3
Ilustración 3: Diagrama en Simulink del Buque	4
Ilustración 4: Diagrama de Flujo Montecarlo	17
Ilustración 5: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Cuadrada	30
Ilustración 6: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Senoidal	31
Ilustración 7: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Hexagonal	32
Ilustración 8: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Triangular	33
Ilustración 9: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Compuesta.....	35
Ilustración 10: Trayectoria Cuadrada con Incertidumbre	37
Ilustración 11: Trayectoria Senoidal con Incertidumbre.....	38
Ilustración 12:Trayectoria Hexagonal con Incertidumbre	40
Ilustración 13: Trayectoria Triangular con Incertidumbre	41
Ilustración 14: Trayectoria Combinada con Incertidumbre	43

INTRODUCCIÓN

En respuesta a una necesidad de transporte, ya sea personal, de carga o animales, el ser humano ha desarrollado vehículos que por lo general son manejados por personas capacitadas, esta situación pueden derivar en cansancio, estrés u otras afecciones en la salud del conductor, llevando así a disminuir las capacidades de reacción ante sucesos inesperados y provocando accidentes en muchas de las situaciones irremediables. Una alternativa que hoy en día está tomando auge son los vehículos autónomos, estos son capaces de percibir el medio que los rodean y navegar de un punto a otro, más aún pueden ser capaces de redefinir la trayectoria inicialmente planteada en función a obstáculos no considerados inicialmente.

Por lo cual el seguimiento de trayectoria es un importante problema que se plantea en la teoría de control. En el 2006 el Dr. Gustavo Scaglia plantea en su tesis doctoral un Modelo de controlador Basado en Álgebra Lineal (a este método se lo llamará MBAL en este documento) aplicable a sistemas tanto lineales como no lineales, variantes e invariantes en el tiempo. El método MBAL nos ofrece una solución simple para una diversidad de casos, uno de ellos es en la navegación, en donde se requiere que un barco siga una ruta prediseñada, para lo cual es importante validar el desempeño del controlador previo a su aplicación.

Para que un controlador de seguimiento de trayectoria sea preciso se requiere de una cantidad de energía muy elevada debido a la inercia del sistema controlado y más aún si se trata de trayectorias compuestas por variaciones bruscas como por ejemplo ángulos pronunciados. Otro impedimento es que los modelos matemáticos no son exactos por lo que no representan fielmente todos los fenómenos que afectan a los móviles, además existen errores en mediciones y cambios en sus parámetros que de considerarse aumentarían la complejidad del modelo, por ejemplo el hecho de que el buque consuma su combustible propicia que la masa cambie alterando el sistema original. El método MBAL, al basar su configuración en un modelo matemático, no es exacto y está sujeto a mejoras.

Debido a lo antes expuesto se plantea como problema la posibilidad de mejorar el controlador MBAL considerando incertidumbre en el modelo y calculando una estima de la misma que permita disminuir su efecto en el error de seguimiento. Esto se logrará con el cumplimiento de los objetivos específicos planteados:

- Obtener el controlador mediante la utilización del método MBAL para el seguimiento de trayectoria de un barco.
- Diseñar el controlador teniendo en cuenta la incertidumbre aditiva.
- Ajustar los parámetros de controlador.
- Simular el comportamiento del controlador con o sin incertidumbre y realizar un análisis comparativo.

CAPITULO I: MATERIALES Y MÉTODOS

En el presente trabajo investigativo, se partió de un modelo matemático multivariable de un buque utilizado por otros autores (Bao-li, 2009), (Ghommam J., 2009) para el seguimiento de trayectoria, este modelo fue implementado en Simulink de Matlab, adicionalmente se diseñó y simuló un controlador basado en algebra lineal y métodos numéricos (Scaglia G., 2005), dicho controlador se configura mediante un conjunto de parámetros destinados a minimizar el error de seguimiento en la trayectoria. La sintonización de dichos parámetros se consiguió utilizando la técnica de Montecarlo. Una vez establecidos los valores óptimos se procedió a añadir la incertidumbre aditiva con el objetivo de disminuir el error en la trayectoria, los resultados de la simulación con y sin incertidumbre fueron comparados para verificar el cumplimiento del objetivo ver Ilustración 1.

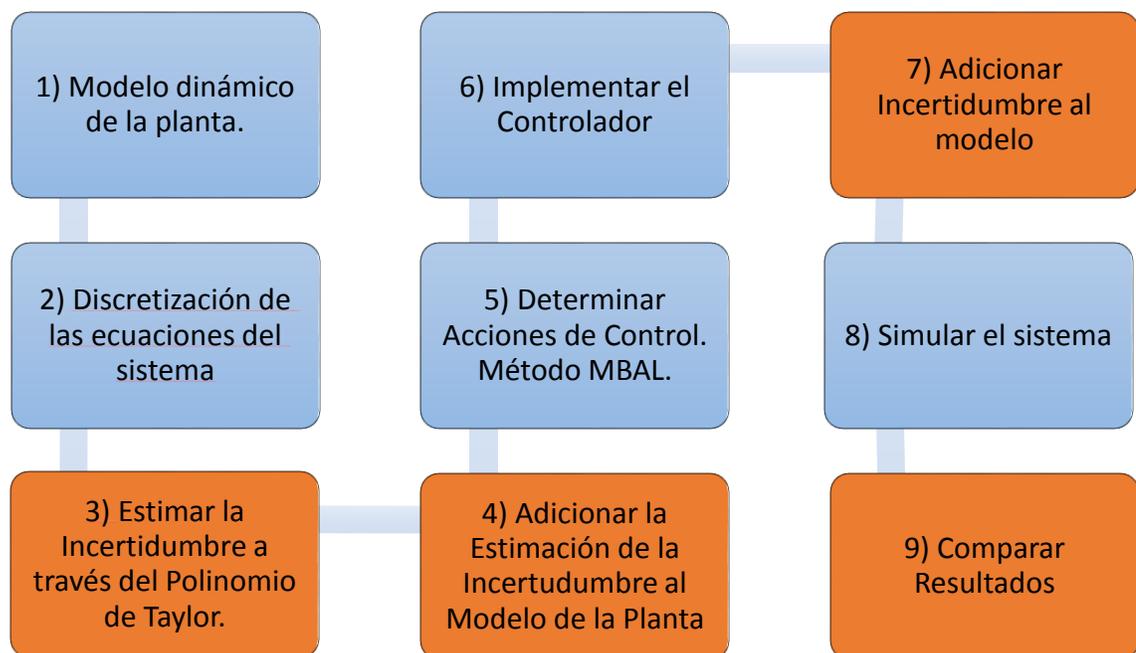


Ilustración 1: Diagrama de Bloques para el Diseño del Controlador

PLANTA

Considerando al buque como un cuerpo rígido situado en el espacio, este posee seis grados de libertad de movimiento (desplazamiento en dirección de los ejes x, y, z y rotación con respecto a los ejes x, y, z del buque) de los cuales se consideran los más importantes, el desplazamiento en el plano horizontal x, y y la rotación ψ alrededor del eje vertical z , controlados mediante una fuerza de empuje y un torque generados por la hélice del barco y el timón respectivamente, los demás movimientos son mínimos y no son relevantes para el seguimiento de la trayectoria.

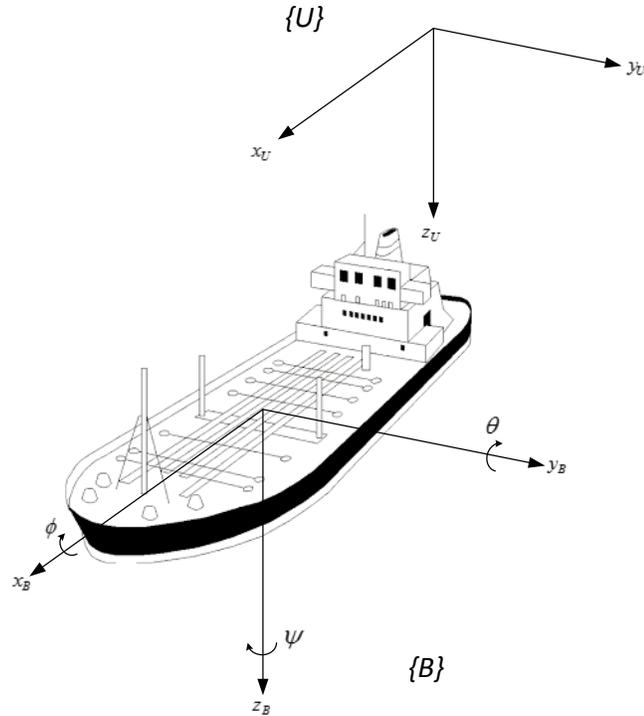


Ilustración 2: Marco de Referencia del Buque

Las ecuaciones que representan el movimiento del buque se describen a continuación

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\psi) - v \sin(\psi) \\ \dot{y} = u \sin(\psi) + v \cos(\psi) \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{u} = \frac{m_{22}}{m_{11}} v r - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} T_u \\ \dot{v} = -\frac{m_{11}}{m_{22}} u r - \frac{d_{22}}{m_{22}} v \\ \dot{r} = \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v u - \frac{d_{33}}{m_{33}} r + \frac{1}{m_{33}} T_r \end{cases} \quad (1)$$

Donde $(x, y) \in R^2$ representa la posición del buque con respecto a un sistema de coordenadas fijo, $\Psi \in (0, 2\pi)$ es el ángulo de rumbo de la embarcación con respecto al norte geográfico. Para este modelo u es la velocidad de avance, v es la velocidad transversal, r es la velocidad angular, m_{ii} están dados por la inercia de la nave, d_{ii} son parámetros dados por la amortiguación hidrodinámica. Las acciones de control disponibles son la fuerza de avance T_u y el torque T_r .

Para poder determinar el comportamiento del sistema, las ecuaciones fueron implementadas en Simulink de Matlab (Ilustración 3)

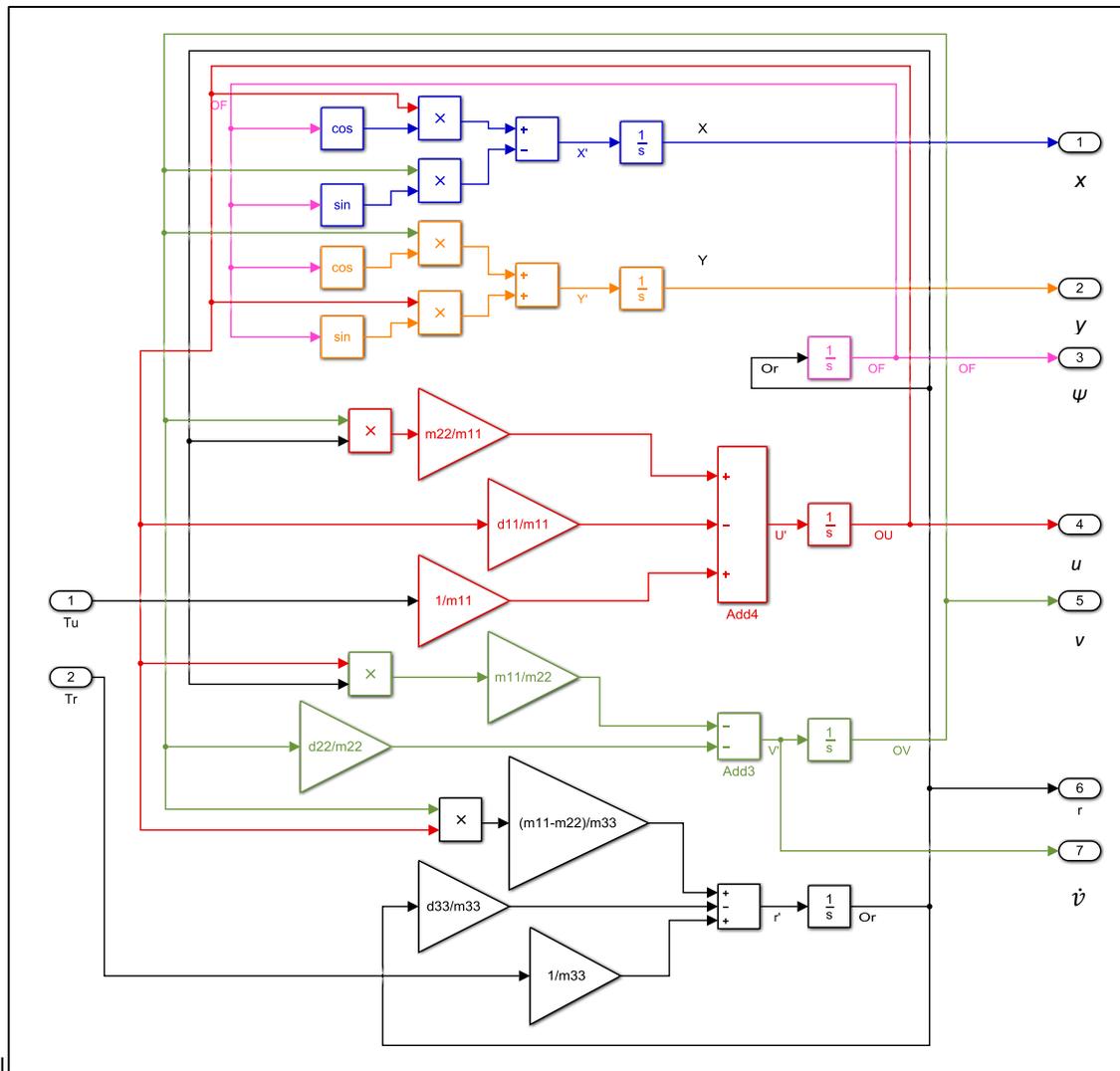


Ilustración 3: Diagrama en Simulink del Buque

En el diagrama se presenta cada ecuación con un color diferente y se aprecia además a la izquierda las entradas a la planta (T_u, T_r) y a la derecha las salidas (x, y, Ψ, u, v, r)

CONTROLADOR

Para el diseño del controlador se pretende como objetivo principal, encontrar los valores de T_u y T_r de tal forma que el buque pueda seguir una trayectoria preestablecida (x_{ref}, y_{ref}) con un error mínimo, con el fin de lograr esto se utilizará una metodología basada en álgebra lineal y métodos numéricos.

El primer paso de esta metodología consiste en discretizar las ecuaciones del modelo, donde los valores de $x(t), y(t), \psi(t), u(t), v(t), r(t), T_r$ y T_u pasados a tiempo discreto con la consideración de que $t = nT_0$ (T_0 periodo de muestreo para el tiempo discreto) se representan como $x_{(n)}, y_{(n)}, \psi_{(n)}, u_{(n)}, v_{(n)}, r_{(n)}, T_{u(n)}, T_{r(n)}$ respectivamente, obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_{(n+1)} - x_{(n)}}{T_0}\right) &= (u_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) \\
\left(\frac{y_{(n+1)} - y_{(n)}}{T_0}\right) &= (u_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) \\
\left(\frac{\psi_{(n+1)} - \psi_{(n)}}{T_0}\right) &= r_{(n)} \\
\left(\frac{v_{(n+1)} - v_{(n)}}{T_0}\right) &= \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}} u_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{22}}{m_{22}} v_{(n)}\right) \\
\left(\frac{u_{(n+1)} - u_{(n)}}{T_0}\right) &= \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{11}}{m_{11}} u_{(n)} + \frac{1}{m_{11}} T u_{(n)}\right) \\
\left(\frac{r_{(n+1)} - r_{(n)}}{T_0}\right) &= \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} - \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} + \frac{1}{m_{33}} T r_{(n)}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

El siguiente paso es colocar las ecuaciones discretizadas en el paso anterior, en forma matricial obteniendo el siguiente sistema, con esto se busca plantear el problema de seguimiento de trayectoria como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{m_{11}}{0} & \frac{1}{m_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T u_{(n)} \\ T r_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{x_{(n+1)} - x_{(n)}}{T_0}\right) - (u_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) \\ \left(\frac{y_{(n+1)} - y_{(n)}}{T_0}\right) - (u_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) \\ \left(\frac{\psi_{(n+1)} - \psi_{(n)}}{T_0}\right) - r_{(n)} \\ \left(\frac{v_{(n+1)} - v_{(n)}}{T_0}\right) - \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}} u_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{22}}{m_{22}} v_{(n)}\right) \\ \left(\frac{u_{(n+1)} - u_{(n)}}{T_0}\right) - \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{11}}{m_{11}} u_{(n)}\right) \\ \left(\frac{r_{(n+1)} - r_{(n)}}{T_0}\right) - \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} - \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)}\right) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Una vez que se tiene el sistema de ecuaciones en forma matricial se debe obtener las señales de control $T u_{(n)}$ y $T r_{(n)}$, para que el buque siga la trayectoria establecida, esto implica que el sistema de ecuaciones tenga siempre una solución exacta, para esto se calcularán las variables de estado $u_{(n)}, \psi_{(n)}, r_{(n)}$ de tal manera que permitan que el buque tienda a seguir la trayectoria de referencia y el error de seguimiento tienda a cero, además se asume como condición, la posibilidad de tener siempre los valores de las variables de estado en el instante n a través de algún dispositivo de medición.

Ahora se redefine el valor de las variables de estado en el instante de muestreo $n + 1$, de forma proporcional al error de seguimiento, esto con el objetivo de que el seguimiento de la trayectoria

sea paulatino, debido a que si el error de seguimiento es considerable en el instante de muestreo n no se puede esperar que el sistema en el siguiente instante de muestreo llegue a la trayectoria deseada, para esto las variables de estado en el instante $n + 1$ serán reemplazadas por:

$$x_{(n+1)} = x_{ref(n+1)} - k_x \underbrace{(x_{ref(n)} - x_{(n)})}_{e_{x(n)}} \quad (4)$$

$$y_{(n+1)} = y_{ref(n+1)} - k_y \underbrace{(y_{ref(n)} - y_{(n)})}_{e_{y(n)}} \quad (5)$$

y

$$e_{(n)} = \begin{bmatrix} e_{x(n)} \\ e_{y(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ref(n)} - x_{(n)} \\ y_{ref(n)} - y_{(n)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde k_x y k_y son los parámetros positivos de proporcionalidad del controlador cuyos valores están entre $0 < k < 1$. Se debe tener en cuenta que si $k = 0$ el valor de la variable de estado en $n + 1$ es igual al valor de la referencia en el mismo instante, por lo tanto se ajustaría a la trayectoria deseada en un solo paso, lo que muchas de las veces no se puede lograr debido a que el periodo de muestro T_0 suele ser pequeño, por el contrario si el valor de $k=1$ el error de seguimiento se mantendrá constante y nunca tendería a cero, es importante recalcar que los valores de k deberán estar entre $0 < k < 1$ y que valores aproximados a 1 harán que el seguimiento de la trayectoria sea progresivo.

Las demás variables $u_{(n+1)}, \psi_{(n+1)}, r_{(n+1)}$ se denotarán por $u_{ez(n+1)}, \psi_{ez(n+1)}, r_{ez(n+1)}$ donde estos representan los valores que adopta el sistema de ecuaciones, para que este tenga solución exacta, así mismo tendrán el mismo tratamiento que $x_{(n+1)}$ y $y_{(n+1)}$:

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{ez(n+1)} - k_\psi (\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) \quad (7)$$

$$u_{(n+1)} = u_{ez(n+1)} - k_u (u_{ez(n)} - u_{(n)}) \quad (8)$$

$$r_{(n+1)} = r_{ez(n+1)} - k_r (r_{ez(n)} - r_{(n)}) \quad (9)$$

Los valores de k_ψ, k_u y k_r son valores que se encuentran entre $0 < k < 1$ con el objetivo de que el error de seguimiento tienda a cero.

Reemplazando las ecuaciones (4) a la (9) en (3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{m_{11}}{0} & \frac{1}{m_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n)}{T_0} \right) - (u(n) \cos(\psi(n)) - v(n) \sin(\psi(n))) \\ \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n)}{T_0} \right) - (u(n) \sin(\psi(n)) + v(n) \cos(\psi(n))) \\ \left(\frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi(n)) - \psi(n)}{T_0} \right) - r(n) \\ \left(\frac{v(n+1) - v(n)}{T_0} \right) - \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}} u(n) r(n) - \frac{d_{22}}{m_{22}} v(n) \right) \\ \left(\frac{u_{ez(n+1)} - k_u(u_{ez(n)} - u(n)) - u(n)}{T_0} \right) - \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v(n) r(n) - \frac{d_{11}}{m_{11}} u(n) \right) \\ \left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r(n)) - r(n)}{T_0} \right) - \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v(n) u(n) - \frac{d_{33}}{m_{33}} r(n) \right) \end{bmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

A continuación se deberán encontrar los valores de las variables $u_{ez(n)}$, $\psi_{ez(n)}$, $r_{ez(n)}$ necesarios que permiten que el buque tienda a la trayectoria deseada, para esto forzaremos al sistema a que tenga una solución exacta, en primera instancia tomaremos las dos primeras ecuaciones del sistema (10) para determinar el valor de $u_{ez(n)}$, $\psi_{ez(n)}$, despejando $u(n)$ nos queda:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\psi(n)) \\ \sin(\psi(n)) \end{bmatrix}}_A \underbrace{u(n)}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n)}{T_0} \right) + v(n) \sin(\psi(n)) \\ \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n)}{T_0} \right) - v(n) \cos(\psi(n)) \end{bmatrix}}_b \quad (11)$$

Despejando $u(n)$ de cada ecuación del sistema e igualando se obtiene el valor de $\psi_{ez(n)}$

$$\frac{\sin(\psi_{ez(n)})}{\cos(\psi_{ez(n)})} = \tan(\psi_{ez(n)}) = \frac{\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n)}{T_0} \right) - v(n) \cos(\psi(n))}{\left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n)}{T_0} \right) + v(n) \sin(\psi(n))} \quad (12)$$

de donde

$$\psi_{ez(n)} = \operatorname{atan} \left(\frac{\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n)}{T_0} - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right)}{\left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n)}{T_0} + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right)} \right) \quad (13)$$

forzando al sistema a través de la multiplicación de la matriz transpuesta $B^T B u = B^T b$ se obtiene

$$u_{ez(n)} = \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n)}{T_0} - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \\ + \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n)}{T_0} + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) \quad (14)$$

A continuación se calcula el valor de $r_{ez(n)}$ mediante la tercera ecuación de (10) y con lo obtenido en (13)

$$r_{ez(n)} = \frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) - \psi_{(n)}}{T_0} \quad (15)$$

El término $\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}$ representa el error de orientación $e_{\psi(n)}$, el parámetro k_ψ del controlador ayuda a que el error de seguimiento tienda a cero progresivamente, $u_{ez(n)}$ y $r_{ez(n)}$ representan el valor deseado de u y r para que el error de seguimiento $e_{(n)}$ tienda a cero, tomando las dos últimas filas del sistema (10) y con los valores de $u_{ez(n)}$, $\psi_{ez(n)}$, $r_{ez(n)}$ se puede obtener los valores de las acciones de control $T_{u(n)}$ y $T_{r(n)}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_{ez(n+1)} - k_u(u_{ez(n)} - u(n)) - u(n)}{T_0} - \frac{m_{22}}{m_{11}} v(n) r(n) + \frac{d_{11}}{m_{11}} u(n) \\ \frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r(n)) - r(n)}{T_0} - \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v(n) u(n) + \frac{d_{33}}{m_{33}} r(n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

De (16) podemos despejar los valores de las acciones de control $T_{u(n)}$ y $T_{r(n)}$ necesarias para que el buque siga la trayectoria establecida dando como resultado:

$$\begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \left(\frac{u_{ez(n+1)} - k_u(u_{ez(n)} - u(n)) - u(n)}{T_0} - \frac{m_{22}}{m_{11}} v(n) r(n) + \frac{d_{11}}{m_{11}} u(n) \right) \\ m_{33} \left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r(n)) - r(n)}{T_0} - \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v(n) u(n) + \frac{d_{33}}{m_{33}} r(n) \right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Las acciones de control calculadas según (17) no contemplan incertidumbres en el sistema, por lo tanto si existe alguna diferencia entre el modelo real y el matemático que se muestra en la ecuación (2) entonces el barco seguirá la trayectoria deseada con error.

ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

En el presente sistema, al conocer los valores medidos de las entradas a la planta, variables y los parámetros, se calcula un estimado de las variables de estado en un tiempo posterior al instante en el que se tomó la muestra mediante la fórmula de Taylor (18)

$$E(t) = \sum_{n=0}^m \frac{E(t_0)^{(n)} (t - t_0)^n}{n!} \quad (18)$$

Siendo que t_0 corresponde al tiempo en el cual se toman las muestras y t el tiempo en el que se quiere calcular la estimación, entonces $(t - t_0)$ es igual al periodo de muestreo T_0 para estimar la

siguiente muestra. Además se puede discretizar la derivada utilizando una aproximación como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\dot{E}(n) = \frac{E(n) - E(n - 1)}{T_0} \tag{19}$$

Partiendo de las ecuaciones (18) y (19) se plantea la siguiente tabla para la estimación de la función E en el siguiente período de muestreo con un orden 0,1 y 2 .

Orden	Estimación de E
0	$E(n + 1) = E(n)$
1	$E(n + 1) = 2 * E(n) - E(n - 1)$
2	$E(n + 1) = 2 * E(n) - E(n - 1) + \frac{E(n) - 2 * E(n - 1) + E(n - 2)}{2}$

Tabla 1: Estimación de la función E

Incertidumbre (E): Si se calcula el valor de una variable a un tiempo T_0 en el futuro en base al modelo matemático del sistema, es poco probable que dicha estimación coincida con exactitud con el valor real, sin embargo la diferencia debe ser mínima y mucho más aún si el periodo de muestreo es pequeño. A esta diferencia la llamamos incertidumbre (E), la cual se calcula como se muestra a continuación:

$$\mathbf{E}_{(n)} = \begin{bmatrix} E_{x(n)} \\ E_{y(n)} \\ E_{u(n)} \\ E_{r(n)} \\ E_{\Psi(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) - \hat{x}(n) \\ y(n) - \hat{y}(n) \\ u(n) - \hat{u}(n) \\ r(n) - \hat{r}(n) \\ \Psi(n) - \hat{\Psi}(n) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$\mathbf{E}_{(n)}$ Representa la incertidumbre, $x(n), y(n), u(n), r(n), \Psi(n)$ son los valores de la posición (x,y), la velocidad (u), la velocidad angular (r) y el ángulo (Ψ) en la n -ésima muestra. Por otra parte las variables $\hat{x}(n), \hat{y}(n), \hat{u}(n), \hat{r}(n), \hat{\Psi}(n)$ son las estimadas en el período anterior de muestreo.

Las variables estimadas en un próximo instante de muestreo se calculan en base al modelo:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{(n+1)} \\ \hat{y}_{(n+1)} \\ \hat{u}_{(n+1)} \\ \hat{r}_{(n+1)} \\ \hat{\Psi}_{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(n)} + u_{(n)}T_0 \cdot \cos(\Psi_{(n)}) - v_{(n)}T_0 \cdot \text{sen}(\Psi_{(n)}) \\ y_{(n)} + u_{(n)}T_0 \cdot \text{sen}(\Psi_{(n)}) + v_{(n)}T_0 \cdot \cos(\Psi_{(n)}) \\ u_{(n)} + \frac{m_{22}}{m_{11}}v_{(n)}r_{(n)}T_0 - \frac{d_{11}}{m_{11}}u_{(n)}T_0 + \frac{Tu}{m_{11}}T_0 \\ r_{(n)} + \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}}u_{(n)}v_{(n)}T_0 - \frac{d_{33}}{m_{33}}r_{(n)}T_0 + \frac{Tr}{m_{33}}T_0 \\ r_{(n)}T_0 + \Psi_{(n)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Estimación de la incertidumbre:

Sea E un vector fila de n elementos que representa la incertidumbre, entonces se puede plantear una predicción de la incertidumbre en base a los valores anteriores por medio de la fórmula de Taylor:

$$\hat{E}_{(n+1)} = E_{(n)} + \dot{E}_{(n)}T_0 + \frac{\ddot{E}_{(n)}T_0^2}{2} + \frac{\dddot{E}_{(n)}T_0^3}{6} \dots \dots \quad (22)$$

Al discretizar, las derivadas se convierten en $\dot{E}_{(n)} = \frac{E_{(n)} - E_{(n-1)}}{T_0}$, $\ddot{E}_{(n)} = \frac{\dot{E}_{(n)} - \dot{E}_{(n-1)}}{T_0}$... y teniendo en cuenta que cada derivada multiplica el denominador por un T_0 , se define la siguiente tabla que muestra los numeradores de los términos de la ecuación (22) ubicados por columna en base al número de elemento anterior al que se requiere estimar. El denominador se calcula con el factorial del número de fila menos uno.

		n (Columna)					
		1	2	3	4	...	n
Fila 1	E	E ₍₁₎	E ₍₂₎	E ₍₃₎	E ₍₄₎	...	E _(n)
Fila 2	E'T ₀	---	E' ₍₂₎ T ₀ = E ₍₂₎ - E ₍₁₎	E' ₍₃₎ T ₀ = E ₍₃₎ - E ₍₂₎	E' ₍₄₎ T ₀ = E ₍₄₎ - E ₍₃₎	...	E' _(n) T ₀ = E _(n) - E _(n-1)
Fila 3	E''T ₀ ²	---	---	E'' ₍₃₎ T ₀ ² = E' ₍₃₎ - E' ₍₂₎	E'' ₍₄₎ T ₀ ² = E' ₍₄₎ - E' ₍₃₎	...	E'' _(n) T ₀ ² = E' _(n) - E' _(n-1)
Fila 4	E'''	---	---	---	E''' ₍₄₎ T ₀ ³ = E'' ₍₄₎ - E'' ₍₃₎	...	E''' _(n) T ₀ ³ = E'' _(n) - E'' _(n-1)
Fila 5	E ⁽⁴⁾	---	---	---	---	...	E ⁽⁴⁾ _(n) T ₀ ⁴ = E ⁽⁴⁾ _(n) - E ⁽⁴⁾ _(n-1)

Tabla 2: Cálculo de Estimaciones

Por ejemplo, si se requiere calcular una estimación de $E_{(5)}$, basta con sumar los productos de la columna 4 divididos para (número de fila-1)! :

$$E_{(5)} = \frac{E(4)}{0!} + \frac{E'(4)T_0}{1!} + \frac{E''(4)T_0^2}{2!} \dots \quad (23)$$

Sea M la matriz correspondiente a la tabla anterior, entonces:

$$E_{(5)} = \frac{M(1,4)}{0!} + \frac{M(2,4)}{1!} + \frac{M(3,4)}{2!} \dots \quad (24)$$

Es decir, sea M una matriz de $m \times n$, cuya primera fila es el vector E , entonces la estimación del $n + 1$ ésimo valor de E está dada por:

$$\hat{E}(n + 1) = \sum_{i=1}^m \frac{M(i, n)}{(n - 1)!} \quad (25)$$

Donde m es el orden de la estimación más 1. (número de filas de la matriz).

Ahora se incorpora la incertidumbre al modelo, partiendo del modelo discretizado (2), se despeja las variables en el instante de muestreo ($n + 1$)

$$\begin{aligned} x_{(n+1)} &= T_0(u_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) + x_{(n)} \\ y_{(n+1)} &= T_0(u_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) + y_{(n)} \\ \psi_{(n+1)} &= T_0 r_{(n)} + \psi_{(n)} \\ v_{(n+1)} &= T_0 \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}} u_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{22}}{m_{22}} v_{(n)} \right) + v_{(n)} \\ u_{(n+1)} &= T_0 \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{11}}{m_{11}} u_{(n)} + \frac{1}{m_{11}} T_{u(n)} \right) + u_{(n)} \\ r_{(n+1)} &= T_0 \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} - \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} + \frac{1}{m_{33}} T_{r(n)} \right) + r_{(n)} \end{aligned} \quad (26)$$

Al sistema planteado en (26) se lo expresa en forma matricial y se suma el vector de incertidumbre, generando el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} x_{(n+1)} \\ y_{(n+1)} \\ \psi_{(n+1)} \\ v_{(n+1)} \\ u_{(n+1)} \\ r_{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(n)} \\ y_{(n)} \\ \psi_{(n)} \\ v_{(n)} \\ u_{(n)} \\ r_{(n)} \end{bmatrix} + T_0 \begin{bmatrix} (u_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) \\ (u_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) \\ r_{(n)} \\ \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}} u_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{22}}{m_{22}} v_{(n)} \right) \\ \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{11}}{m_{11}} u_{(n)} + \frac{1}{m_{11}} T_{u(n)} \right) \\ \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} - \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} + \frac{1}{m_{33}} T_{r(n)} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{x(n+1)} \\ E_{y(n+1)} \\ E_{\psi(n+1)} \\ E_{v(n+1)} \\ E_{u(n+1)} \\ E_{r(n+1)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Debido a que la incertidumbre real E_{n+1} , es imposible de calcular en muestras futuras, esta es reemplazada por una estimación de la misma en base a los valores de los anteriores períodos de muestreo con la aplicación de polinomios de Taylor y se la denota con \hat{E}_{n+1} .

A continuación se despeja las acciones de control $T_{u(n)}$ y $T_{r(n)}$ y de igual forma se deja expresado en forma matricial y se redefine el valor de las variables de estado en el instante de muestreo $n + 1$, de forma proporcional; esto con el objetivo de que el seguimiento de la trayectoria sea paulatino, debido a que si el error de seguimiento es considerable en el instante de muestreo n no se puede pedir al sistema que en el siguiente instante de muestreo llegue a la trayectoria deseada, para esto las variables de estado en el instante $n + 1$ serán reemplazadas por el valor de referencia menos la constante de proporcionalidad por el error, dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{m_{11}} & \frac{1}{m_{33}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n) - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) - (u(n) \cos(\psi(n)) - v(n) \sin(\psi(n))) \\ \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n) - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right) - (u(n) \sin(\psi(n)) + v(n) \cos(\psi(n))) \\ \left(\frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi(n)) - \psi(n) - \hat{E}_{\psi(n+1)}}{T_0} \right) - r(n) \\ \left(\frac{v(n+1) - v(n) - \hat{E}_{v(n+1)}}{T_0} \right) - \left(-\frac{m_{11}}{m_{22}} u(n) r(n) - \frac{d_{22}}{m_{22}} v(n) \right) \\ \left(\frac{u_{ez(n+1)} - k_u(u_{ez(n)} - u(n)) - u(n) - \hat{E}_{u(n+1)}}{T_0} \right) - \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v(n) r(n) - \frac{d_{11}}{m_{11}} u(n) \right) \\ \left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r(n)) - r(n) - \hat{E}_{r(n+1)}}{T_0} \right) - \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v(n) u(n) - \frac{d_{33}}{m_{33}} r(n) \right) \end{bmatrix} \quad (28)
\end{aligned}$$

De igual manera como se opera sin incertidumbre se deberán encontrar los valores de las variables $u_{ez(n)}, \psi_{ez(n)}, r_{ez(n)}$ necesarios que permiten que el buque tienda a la trayectoria deseada, para esto forzaremos el sistema a que tenga una solución exacta, en primera instancia tomaremos las dos primeras ecuaciones del sistema (28) para determinar el valor de $u_{ez(n)}, \psi_{ez(n)}$, despejando $u(n)$ nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\begin{bmatrix} \cos(\psi(n)) \\ \sin(\psi(n)) \end{bmatrix}}{A} \frac{u(n)}{u} & = \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n) - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) + v(n) \sin(\psi(n)) \\ \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n) - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right) - v(n) \cos(\psi(n)) \end{bmatrix}}{b} \quad (29)
\end{aligned}$$

Despejando $u(n)$ de cada ecuación del sistema e igualando se obtiene el valor de $\psi_{ez(n)}$

$$\psi_{ez(n)} = \text{atan} \left(\frac{\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n) - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right) - v(n) \cos(\psi(n))}{\left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n) - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) + v(n) \sin(\psi(n))} \right) \quad (30)$$

Forzando al sistema a través de la multiplicación de la matriz transpuesta $B^T B u = B^T b$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 u_{ez(n)} = & \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y(n)) - y(n) - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} - v(n) \cos(\psi(n)) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \\
 & + \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x(n)) - x(n) - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right. \\
 & \left. + v(n) \sin(\psi(n)) \right) \cos(\psi_{ez(n)})
 \end{aligned} \tag{31}$$

A continuación se calcula el valor de $r_{ez(n)}$ mediante la tercera ecuación de (28) y con lo obtenido en (30)

$$r_{ez(n)} = \frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi(n)) - \psi(n) - \hat{E}_{\psi(n+1)}}{T_0} \tag{32}$$

Tomando las dos últimas filas del sistema (28) y con los valores de $u_{ez(n)}, \psi_{ez(n)}, r_{ez(n)}$ se puede obtener los valores de las acciones de control $T_{u(n)}$ y $T_{r(n)}$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \frac{u_{ez(n+1)} - k_u(u_{ez(n)} - u(n)) - u(n) - \hat{E}_{u(n+1)}}{T_0} - \frac{m_{22}}{m_{11}} v(n) r(n) + \frac{d_{11}}{m_{11}} u(n) \\ \frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r(n)) - r(n) - \hat{E}_{r(n+1)}}{T_0} - \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v(n) u(n) - \frac{d_{33}}{m_{33}} r(n) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{33}$$

Despejando las acciones de control, se obtiene la ecuación que permite calcular las acciones de control adicionada la incertidumbre al sistema

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} m_{11} \left(\frac{u_{ez(n+1)} - k_u(u_{ez(n)} - u(n)) - u(n) - \hat{E}_{u(n+1)}}{T_0} - \frac{m_{22}}{m_{11}} v(n) r(n) + \frac{d_{11}}{m_{11}} u(n) \right) \\ m_{33} \left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r(n)) - r(n) - \hat{E}_{r(n+1)}}{T_0} - \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v(n) u(n) - \frac{d_{33}}{m_{33}} r(n) \right) \end{bmatrix} \quad (34)
\end{aligned}$$

DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE PROPORCIONALIDAD

Las pruebas de Montecarlo se realizaron con el fin de sintonizar el controlador mediante la identificación de los parámetros de proporcionalidad, estos parámetros deben ser ajustados de tal manera que la diferencia entre la trayectoria programada y la que realmente realiza el buque sea mínima, es por esto que se requiere realizar simulaciones para probar varios valores de los parámetros e identificar los que entregue un error mínimo.

La medición del error se la hizo mediante la función de coste que se calcula sumando las diferencias al cuadrado tanto en x como en y de los puntos correspondientes entre la trayectoria deseada y la real del buque, multiplicado por $T_0/2$, en la Ecuación (35) se muestra la función de coste en donde (e_x, e_y) representan los vectores que contienen los errores en las direcciones (x, y) respectivamente de cada periodo de muestreo, una función de costo mayor implicaría un alejamiento entre las trayectorias, por lo tanto un mayor error.

$$Coste = [(e_x^T \cdot e_x) + (e_y^T \cdot e_y)] \frac{T_0}{2} \quad (35)$$

El método de Montecarlo utilizado para definir las constantes de proporcionalidad $k = (k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r)$ consiste en definir el intervalo de valores para k del cual se tomó aleatoriamente muestras con las que se simuló el sistema, calculando la función de costo y guardando los resultados. Luego se cambiaron los parámetros para realizar una nueva simulación, repitiendo el procedimiento mil veces y luego seleccionando el conjunto de valores de parámetros que ofrecieron un menor valor en la función de costo. Los valores obtenidos fueron con los que se configuró finalmente el sistema, este proceso está descrito gráficamente en la Ilustración 4.

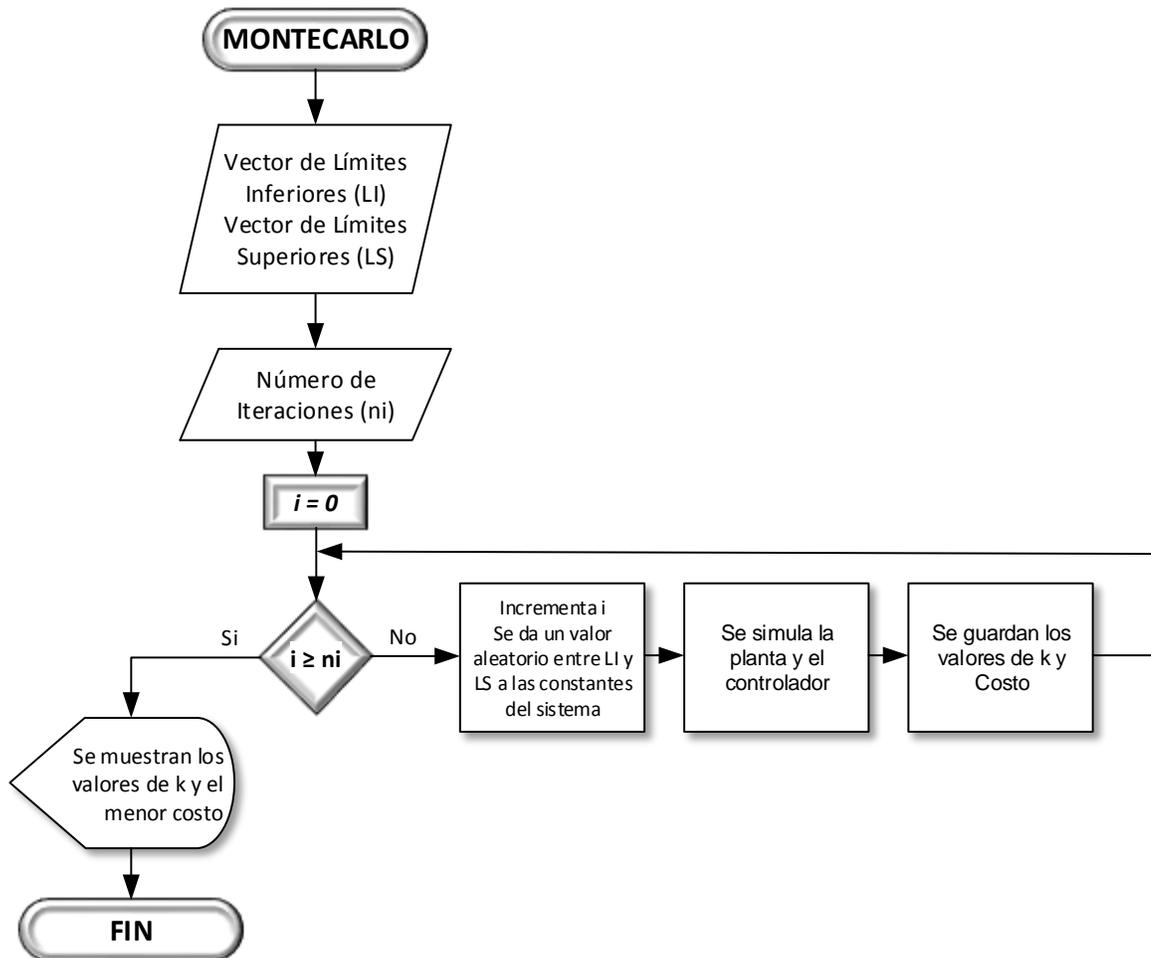


Ilustración 4: Diagrama de Flujo Montecarlo

INCERTIDUMBRE

Una vez determinados los parámetros de proporcionalidad del sistema para cada una de las trayectorias y luego de realizar las pruebas de seguimiento respectivas con y sin estima de la incertidumbre, se procederá a colocar incertidumbre al sistema a través de una perturbación aleatoria a las señales de control, en cada uno de los periodos de muestreo. Esta acción se considera para determinar la eficacia del controlador al estimar la posible incertidumbre que se pueda dar en la trayectoria.

CAPITULO II: RESULTADOS

PARÁMETROS DE LA PLANTA

Los parámetros del buque para la planta utilizados en el presente trabajo investigativo fueron tomados de investigaciones previas (Ghommam J., 2009), en donde la masa total del buque es de $17,6 \text{ kg}$ y su longitud de $1,19 \text{ m}$, en base a esto se establecen a continuación los parámetros del modelo:

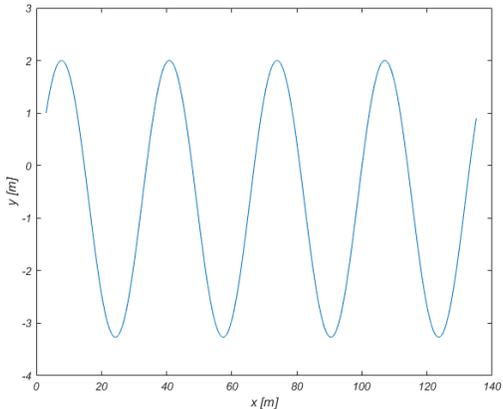
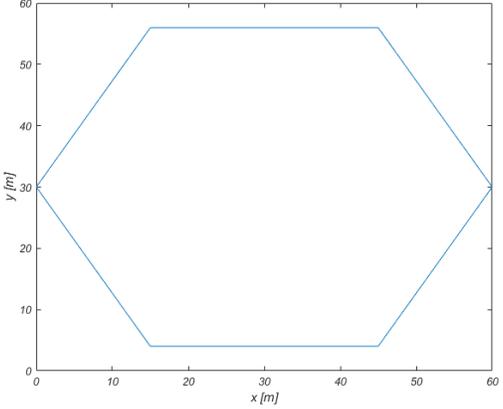
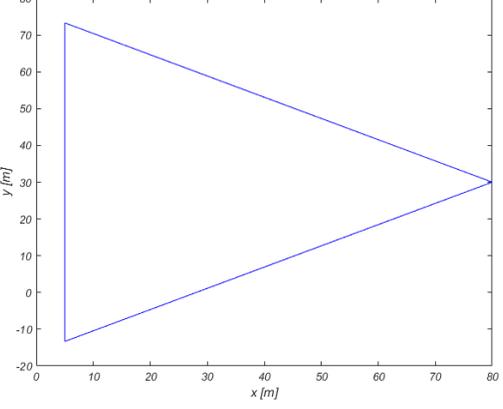
Parámetro	Valor
m_{11}	19 kg
m_{22}	$35,2 \text{ kg}$
m_{33}	$4,2 \text{ kg}$
d_{11}	4 kg/s
d_{22}	1 kg/s
d_{33}	10 kg/s

Tabla 3: Parámetros del Buque

TRAYECTORIAS

Las trayectorias de referencias utilizadas para las simulaciones fueron las que se muestran a continuación

NOMBRE	GRÁFICA
CUADRADO	

<p>SENO</p>	
<p>HEXÁGONO</p>	
<p>TRIANGULO</p>	

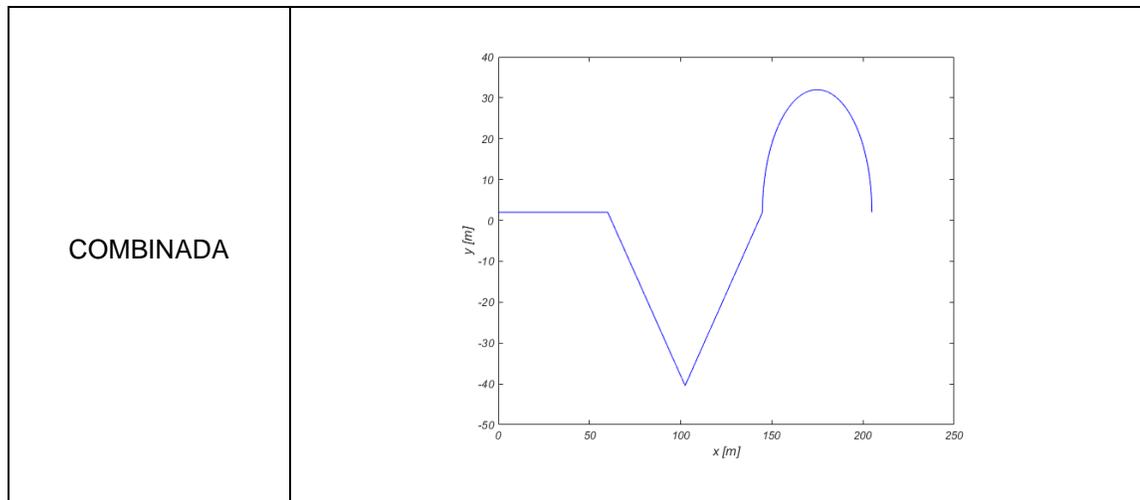


Tabla 4: Trayectorias de Referencia

DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES

Para la determinación de las constantes de proporcionalidad se estableció los vectores límite inferior, superior $LI(0.8 \ 0.8 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.4)$, $LS(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ los valores inferiores fueron escogidos de esta manera debido a que la trayectoria debe ajustarse a la deseada de forma paulatina, tomar valores cercanos a cero producen oscilaciones no deseadas en la trayectoria, los valores superiores no pueden ser mayores a uno porque esto produciría una divergencia del error de seguimiento y una posición de partida del buque diferente al origen de la trayectoria, esto con el fin de evidenciar el acercamiento a la de referencia. En mil simulaciones los resultados del experimento de Montecarlo obtenidos fueron los siguientes:

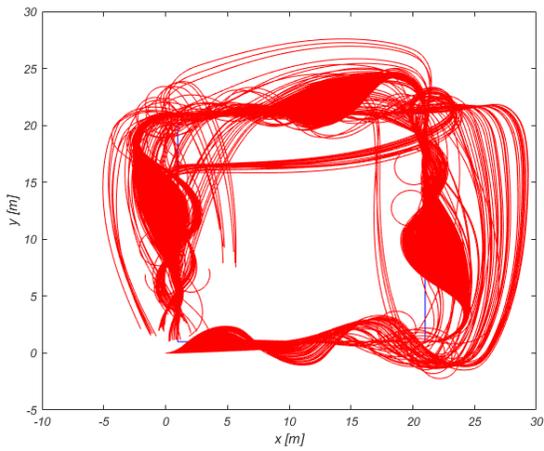
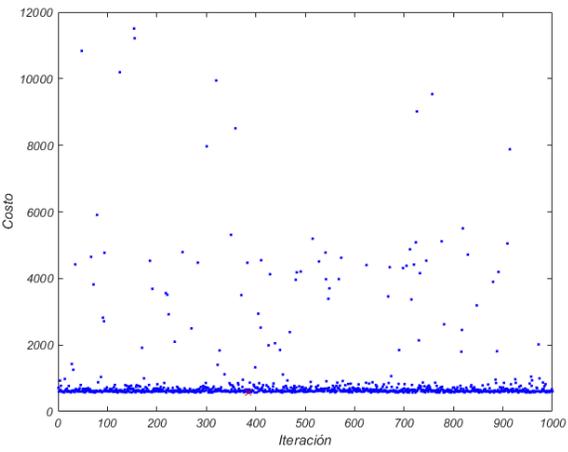
Trayectoria Cuadrada	Gráfico de las Trayectorias
	
	Gráfico de Costos
	
Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.947 \ 0.944 \ 0.721 \ 0.801 \ 0.563)$	
<i>Costo min = 600.5024</i>	

Tabla 5: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Cuadrada

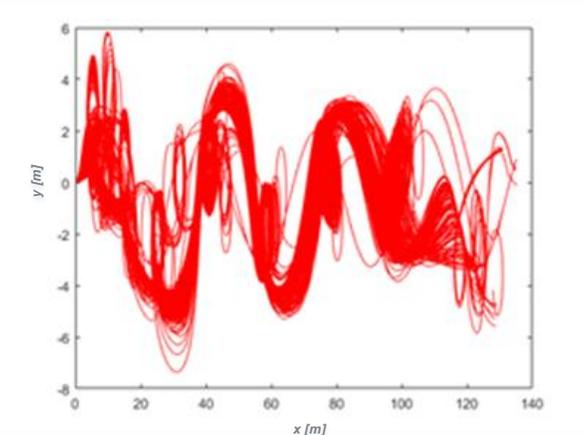
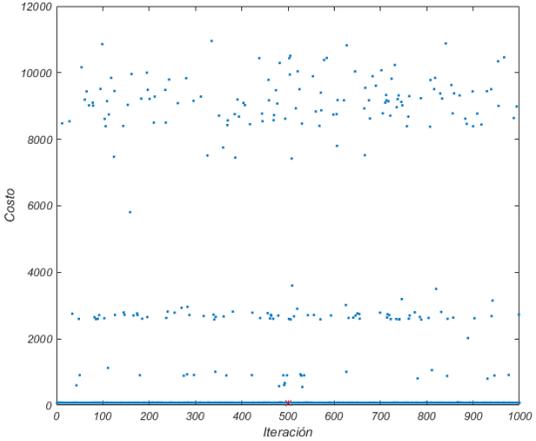
Trayectoria Senoidal	Gráfico de las Trayectorias
	
	Gráfico de Costos
	
Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.915 \ 0.918 \ 0.7842 \ 0.797 \ 0.595)$	
$Costo \ min = 74.8051$	

Tabla 6: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Senoidal

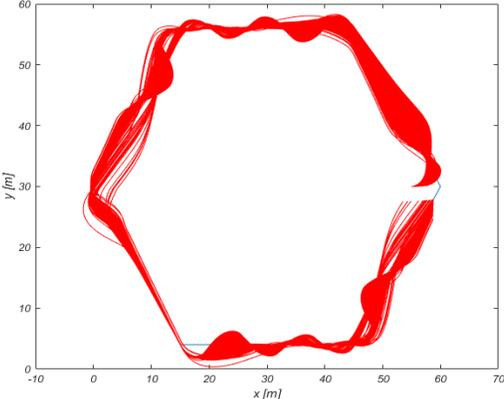
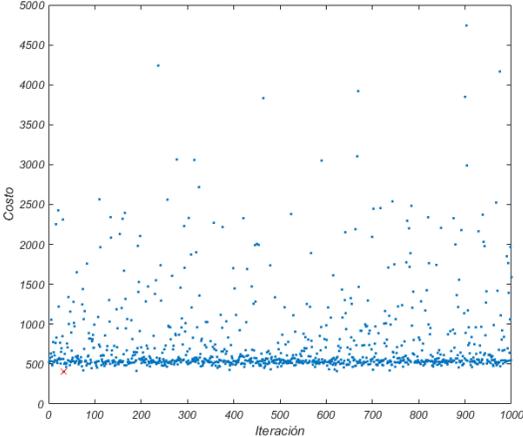
Trayectoria Hexagonal	Gráfico de las Trayectorias
	
	Gráfico de Costos
	
Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = [0.948 \ 0.952 \ 0.692 \ 0.786 \ 0.606]$	
<i>Costo min = 480.790</i>	

Tabla 7: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Hexagonal

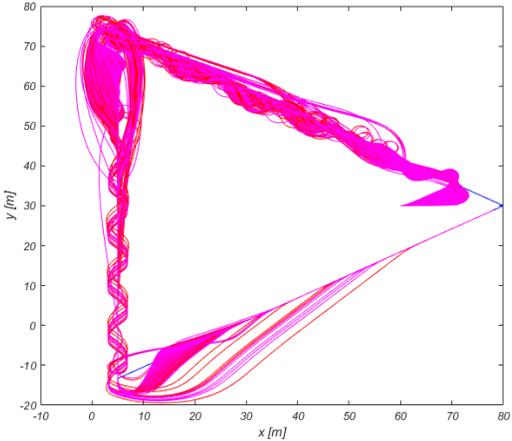
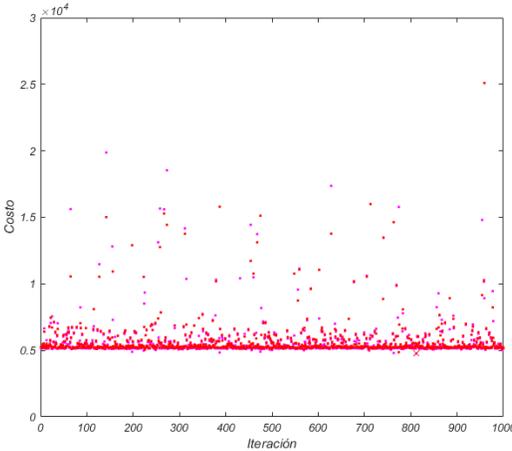
Trayectoria Combinada	<p style="text-align: center;">Gráfico de las Trayectorias</p> 
	<p style="text-align: center;">Gráfico de Costos</p> 
	<p style="text-align: center;">Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = [0.984 \ 0.967 \ 0.701 \ 0.670 \ 0.620]$</p> <p style="text-align: center;"><i>Costo min = 1928.29</i></p>

Tabla 8: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Triangular

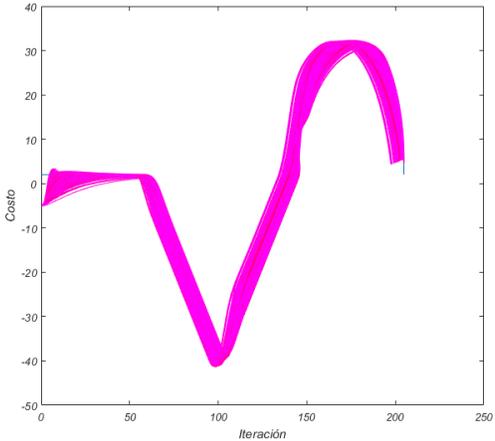
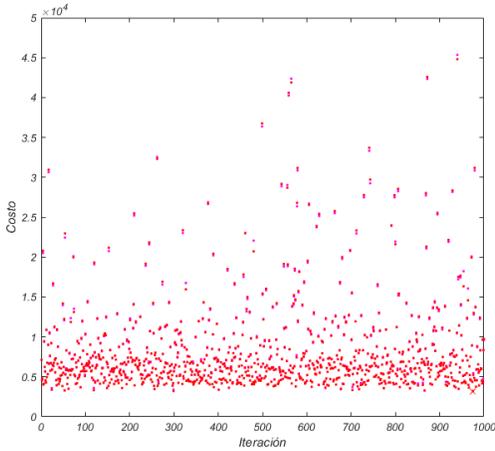
Trayectoria Combinada	Gráfico de las Trayectorias
	
	Gráfico de Costos
	
	Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_w, k_r] = [0.988 \ 0.974 \ 0.689 \ 0.691 \ 0.617]$
	<i>Costo min = 232.673</i>

Tabla 9: Resultados de Montecarlo 1000 Simulaciones Trayectoria Compuesta

En las tablas de la Tabla 5 a la Tabla 9 se muestran los resultados de haber aplicado el proceso de Montecarlo con mil simulaciones a las diferentes trayectorias, y se presentan las gráficas de trayectorias, de costos y las mejores constantes que arrojaron menor error.

Con el fin de optimizar aún más los valores de las constantes, se estableció un nuevo rango para los vectores límite superior e interior, considerando aproximadamente $\pm 5\%$, de las constantes obtenidas en el proceso anterior y en cien simulaciones adicionales los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Trayectoria Cuadrada	Gráfico de las Trayectorias
	Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.951 \ 0.949 \ 0.691 \ 0.789 \ 0.601)$
Costo $min = 600,473$	

Tabla 10: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Cuadrada

	Gráfico de las Trayectorias
--	-----------------------------

Trayectoria Senoidal	
	Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.916 \ 0.916 \ 0.784 \ 0.798 \ 0.593)$
	<i>Costo min = 74.818</i>

Tabla 11: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Senoidal

Trayectoria Hexagonal	Gráfico de las Trayectorias
	Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.951 \ 0.949 \ 0.691 \ 0.789 \ 0.601)$
	<i>Costo min = 474.206</i>

Tabla 12: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Hexagonal

	Gráfico de las Trayectorias
--	-----------------------------

Trayectoria Triangular	
	Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.978 \ 0.970 \ 0.696 \ 0.689 \ 0.622)$
	Costo $min = 1918.017$

Tabla 13: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Triangular

Trayectoria Combinada	Gráfico de las Trayectorias
	Constantes $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r] = (0.978 \ 0.970 \ 0.696 \ 0.689 \ 0.622)$
	Costo $min = 231.5468$

Tabla 14: Resultados de Montecarlo 100 Simulaciones Trayectoria Compuesta

En las tablas Tabla 10 a la 14 se muestra las simulaciones mediante el proceso de Montecarlo con 100 muestras, donde se puede observar que las trayectorias son más uniformes y cercanas

a la de referencia, además se presenta un nuevo vector con constantes mejoradas para un óptimo funcionamiento del controlador en cada curva.

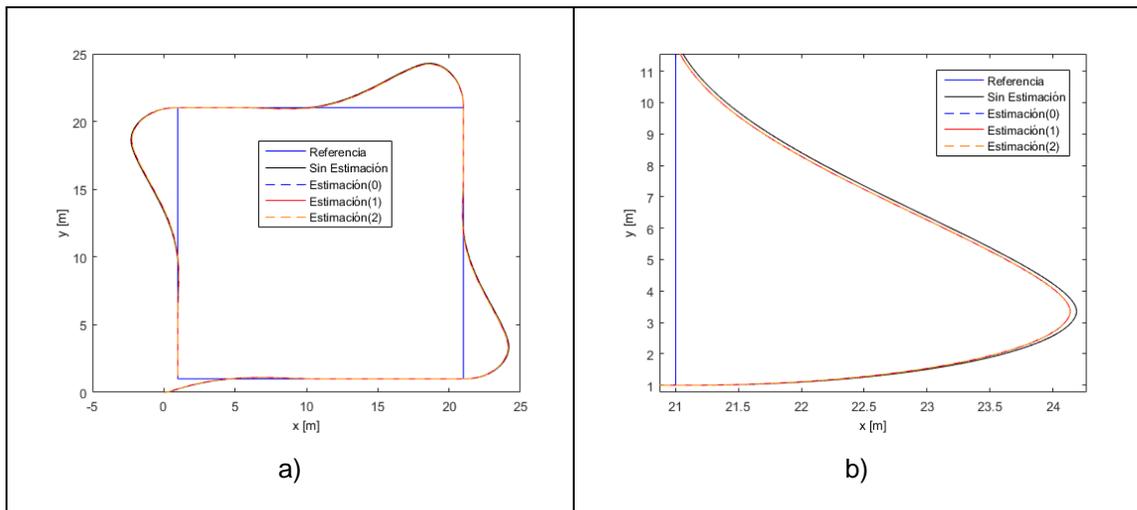
TRAYECTORIAS CON O SIN ESTIMACION DE INCERTIDUMBRE

Una vez seleccionados los mejores parámetros del controlador para cada trayectoria se procedió a realizar simulaciones sin estimación de incertidumbre y con estimación de incertidumbre de grado cero, uno y dos, los resultados se presentan en seguida:

CUADRADA

TRAYECTORIA	CUADRADA
POSICION INICIAL (x, y)	(0,0)
PARAMETROS $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r]$	(0.951 0.949 0.691 0.789 0.601)
COSTO SIN ESTIMA	600,473
COSTO CON ESTIMA (0)	573.805
COSTO CON ESTIMA (1)	573.804
COSTO CON ESTIMA (2)	573.804
PORCENTAJE DE MEJORA	4.6%

Tabla 15: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Cuadrada



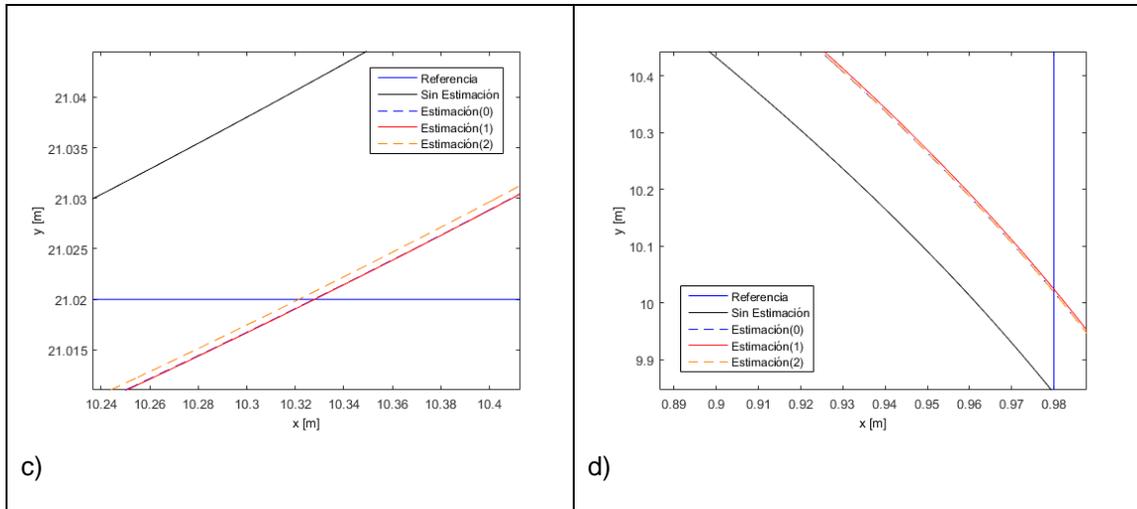


Ilustración 5: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Cuadrada

En la Ilustración 5 se muestran las trayectorias con y sin estimación de la incertidumbre de la figura cuadrada, en b), c) y d) se observan ampliaciones en los vértices inferior derecho, superior derecho e izquierda, donde se puede visualizar una mejora en el seguimiento al aplicar la estimación.

SENOIDAL

TRAYECTORIA	SENOIDAL
POSICION INICIAL	(0,0)
PARAMETROS $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r]$	(0.916 0.916 0.784 0.798 0.593)
COSTO SIN ESTIMA	74.8187
COSTO CON ESTIMA (0)	74.6878
COSTO CON ESTIMA (1)	74.6877
COSTO CON ESTIMA (2)	74.6877
% MEJORA CON ESTIMA	0.175%

Tabla 16: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Senoidal

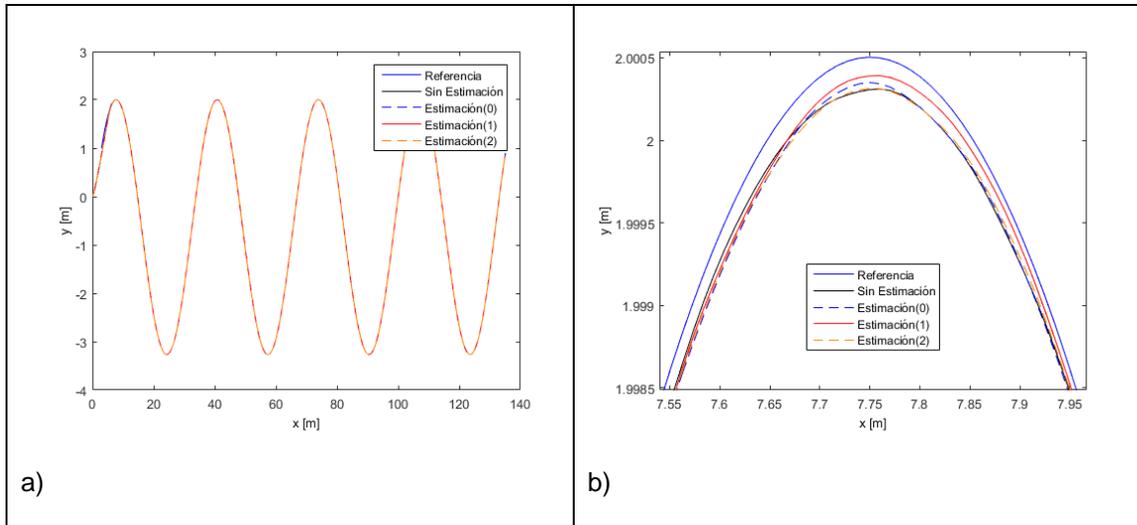


Ilustración 6: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Senoidal

En la Ilustración 6 se muestran la trayectoria con y sin estimación de la incertidumbre de la figura senoidal, en b) se observa el tramo de partida, en donde se puede apreciar una pequeña mejora en el seguimiento al aplicar la estimación.

HEXAGONAL

TRAYECTORIA	HEXAGONAL
POSICION INICIAL	(55,30)
PARAMETROS $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r]$	(0.951 0.949 0.691 0.789 0.601)
COSTO SIN ESTIMA	474.206
COSTO CON ESTIMA (0)	457.983
COSTO CON ESTIMA (1)	458.026
COSTO CON ESTIMA (2)	457.969
% MEJORA CON ESTIMA	3.5%

Tabla 17: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Hexagonal

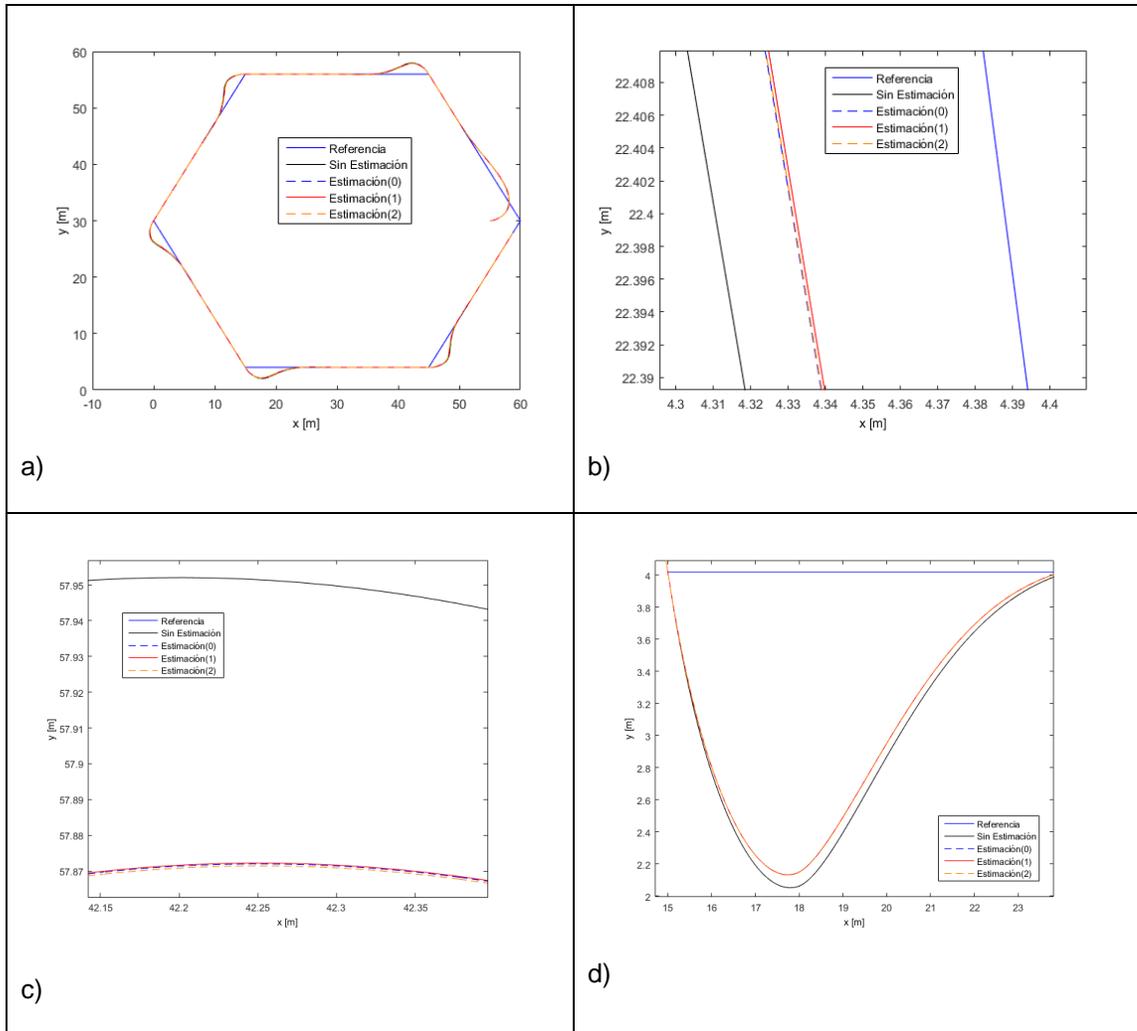


Ilustración 7: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Hexagonal

En la Ilustración 7 se muestran las trayectorias con y sin estimación de la incertidumbre de la figura hexagonal, en b), c) y d) se observan ampliaciones de tres de los seis vértices, donde se puede visualizar una mejora en el seguimiento al aplicar estimación.

TRIANGULAR

TRAYECTORIA	TRIANGULAR
POSICION INICIAL	(70,30)
PARAMETROS $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r]$	(0.932 0.891 0.814 0.932 0.569)

COSTO SIN ESTIMA	1928.017
COSTO CON ESTIMA (0)	1857.913
COSTO CON ESTIMA (1)	1857.932
COSTO CON ESTIMA (2)	1857.904
% MEJORA CON ESTIMA	3.77%

Tabla 18: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Triangular

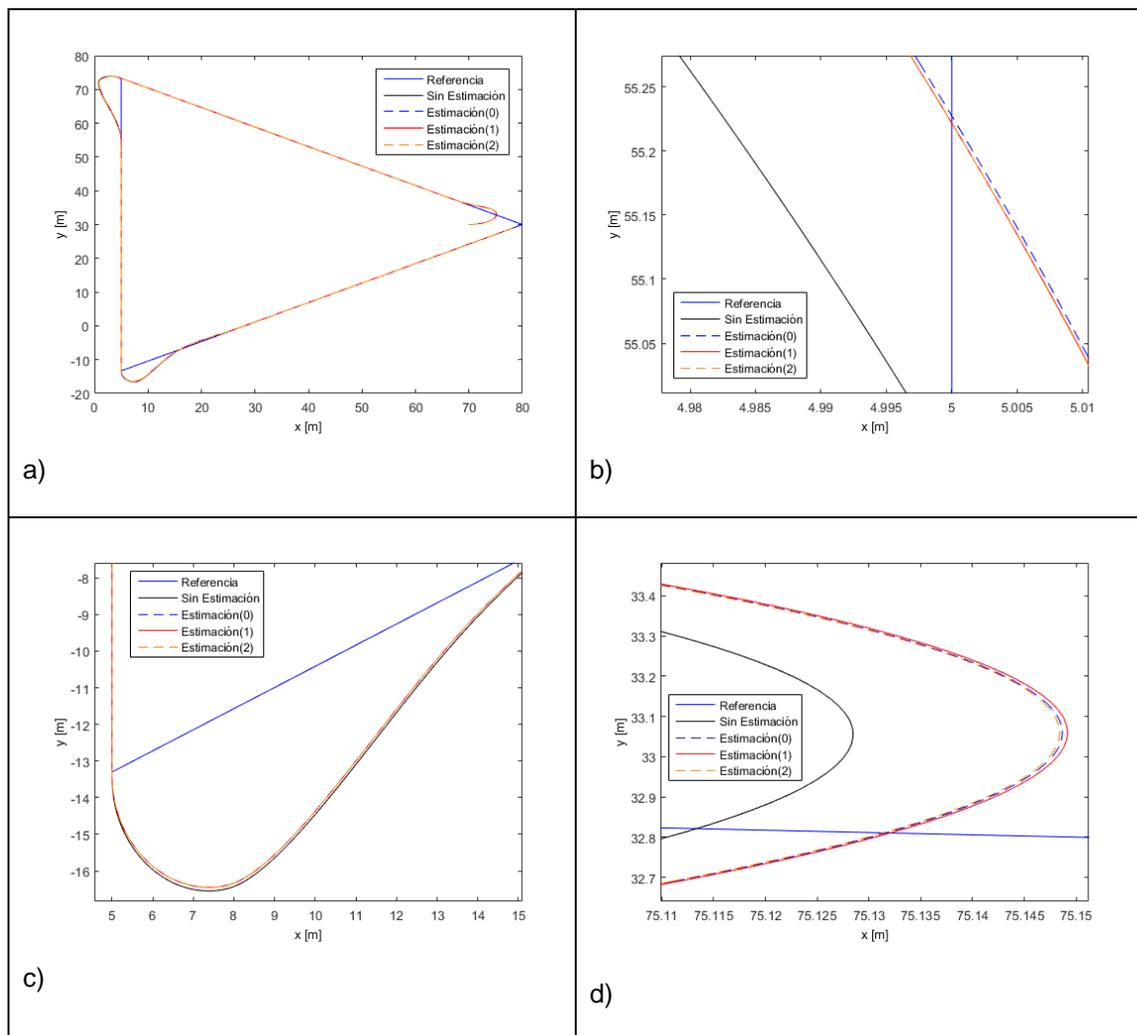


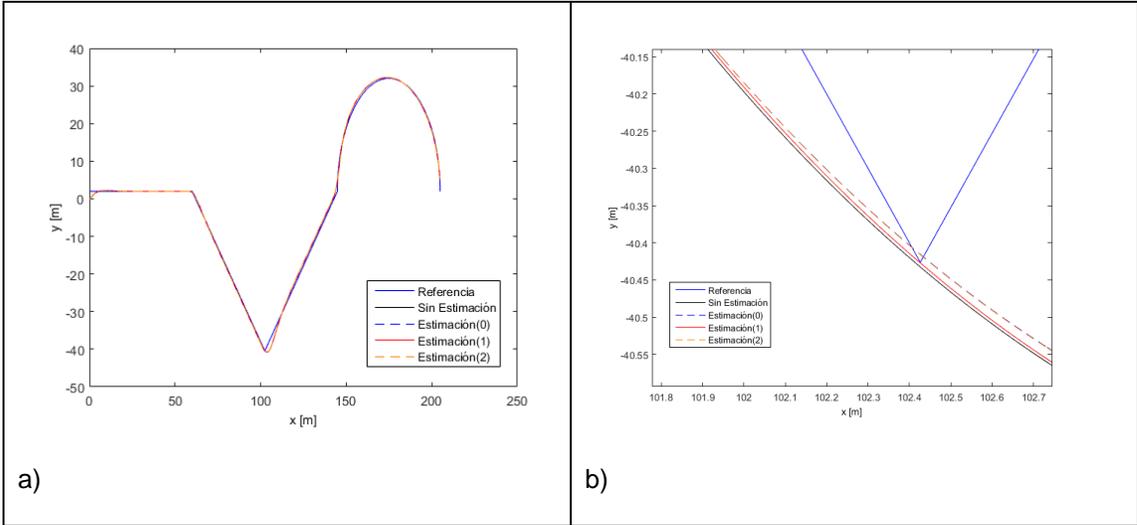
Ilustración 8: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Triangular

En la Ilustración 8 se muestran las trayectorias con y sin estimación de la incertidumbre de la figura hexagonal, en b), c) y d) se observan ampliaciones de los vértices, con una mejora en el seguimiento.

COMBINADA

TRAYECTORIA	COMBINADA
POSICION INICIAL	(0,0)
PARAMETROS $[k_x, k_y, k_\psi, k_u, k_r]$	(0.978 0.970 0.696 0.689 0.622)
COSTO SIN ESTIMA	231.5468
COSTO CON ESTIMA (0)	216.6574
COSTO CON ESTIMA (1)	216.7355
COSTO CON ESTIMA (2)	216.6467
% MEJORA CON ESTIMA	6.872%

Tabla 19: Costos Con y Sin Estima Trayectoria Compuesta



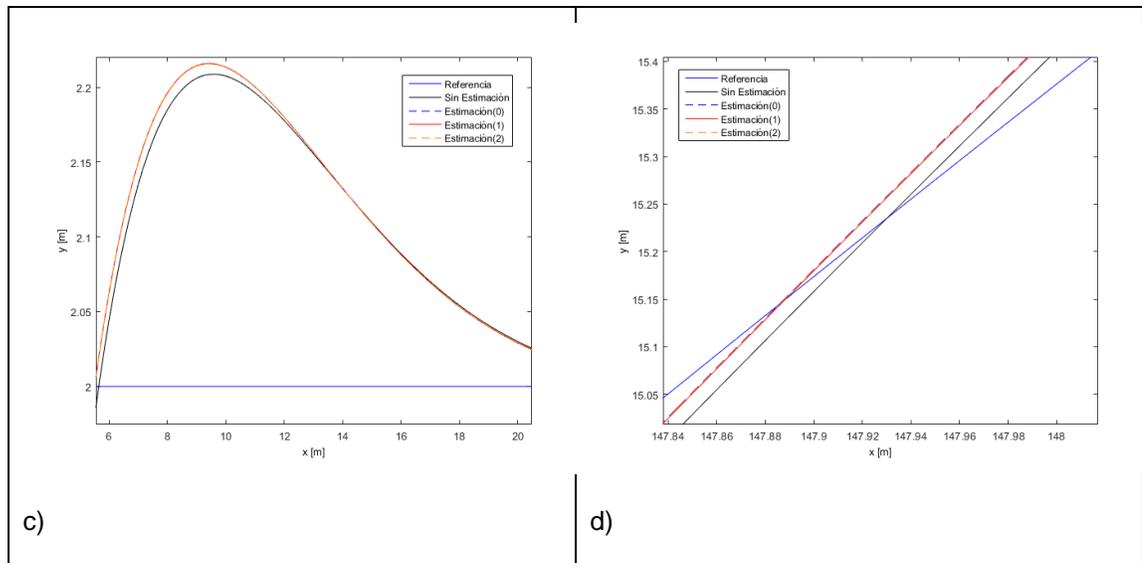


Ilustración 9: Trayectorias Con y Sin Estima Trayectoria Compuesta

En la Ilustración 9 se observa una trayectoria compuesta por tramos rectos y curvos, con el afán de que esta no sea homogénea y poner a prueba el comportamiento del controlador, en b), c) y d) se observan ampliaciones en diferentes puntos de la gráfica con evidente mejora en el seguimiento cuando se aplica estimación de la incertidumbre.

TRAYECTORIAS CON ADICIÓN DE INCERTIDUMBRE

Determinados las mejores constantes de proporcionalidad para cada una de las trayectorias establecidas y realizadas las pruebas de trayectoria con o sin estimación, se adicionó incertidumbre al sistema, mediante la variación de los parámetros del controlador en un rango aleatorio de $\pm 20\%$ del valor de la planta con el objetivo de simular errores de modelado. Además se adicionó perturbaciones a las señales de salida del controlador en cada periodo de muestreo en base a Ecuación (36), en donde N_1 aleatorio y N_2 aleatorio son valores randómicos entre ± 1 .

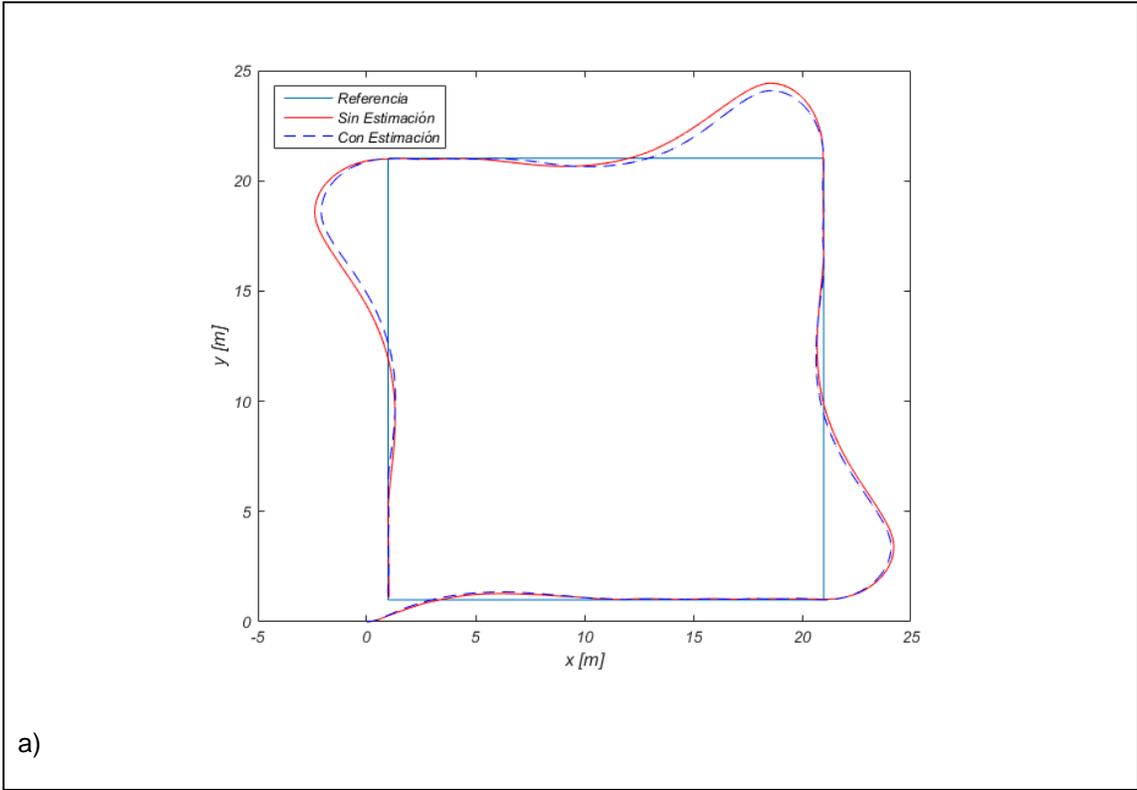
$$\begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{u(n)} \\ T_{r(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \text{ aleatorio} \\ N_2 \text{ aleatorio} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Debido a que los mejores resultados se obtienen con una estima de orden dos y que estos no distan mucho de los efectos de aplicar una de menor orden, en los siguientes análisis se consideró únicamente la estimación de la incertidumbre de segundo orden. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

CUADRADA

TRAYECTORIA	CUADRADA
COSTO SIN ESTIMA	626,933
COSTO CON ESTIMA	503.627
PORCENTAJE DE MEJORA	19.7%

Tabla 20: Costos con Incertidumbre T. Cuadrada



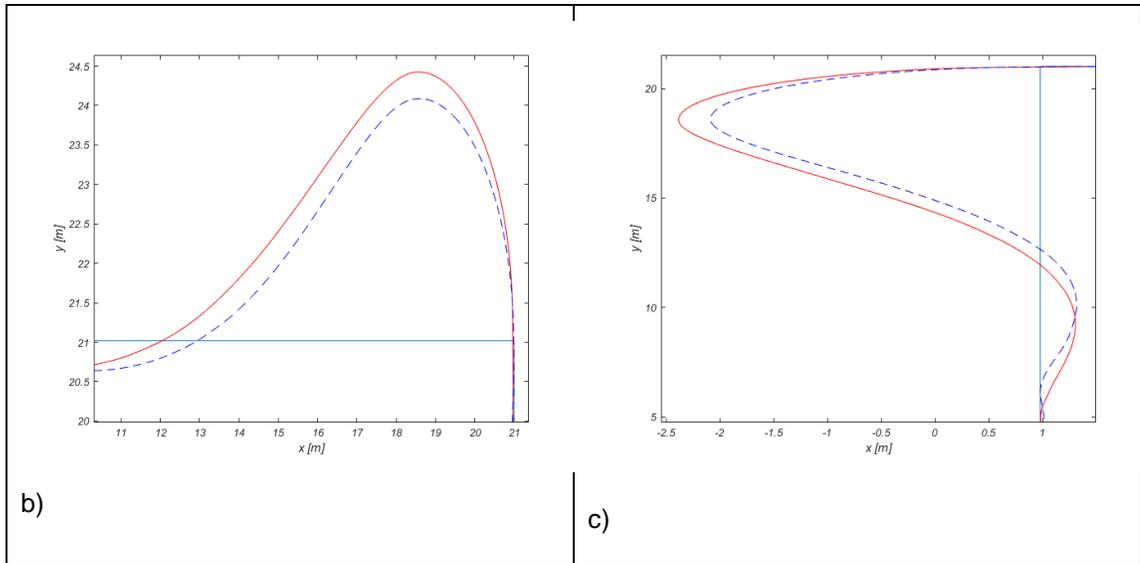


Ilustración 10: Trayectoria Cuadrada con Incertidumbre

En la ilustración se muestra una trayectoria cuadrada añadida incertidumbre, en b) y c) se observan ampliaciones en los vértices inferior derecho, superior derecho e izquierdo, donde se puede visualizar una mejora en el seguimiento al aplicar la estimación de la incertidumbre

SENOIDAL

TRAYECTORIA	CUADRADA
COSTO SIN ESTIMA	1815,2
COSTO CON ESTIMA	84,9

Tabla 21: Costos con Incertidumbre T. Senoidal

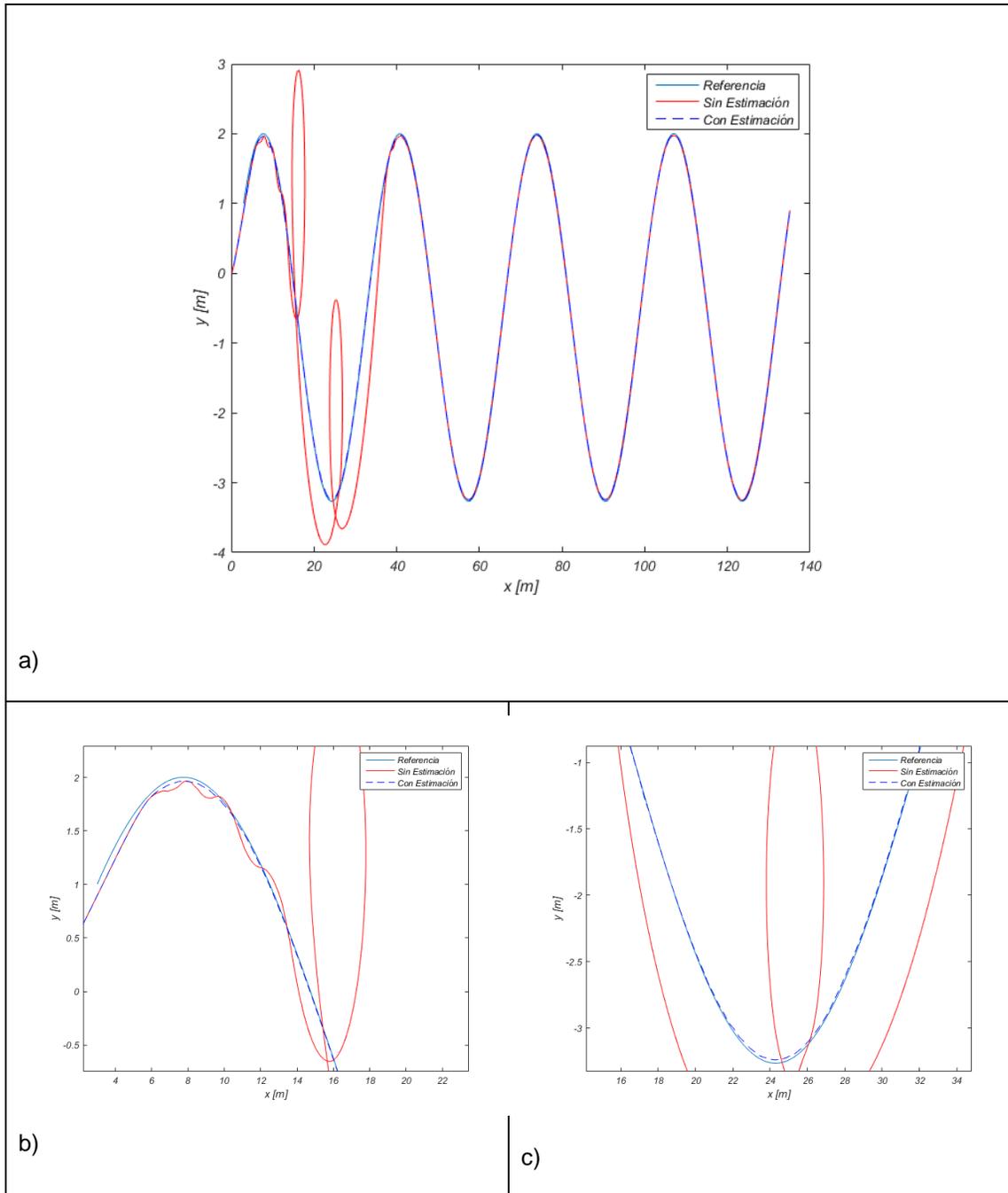


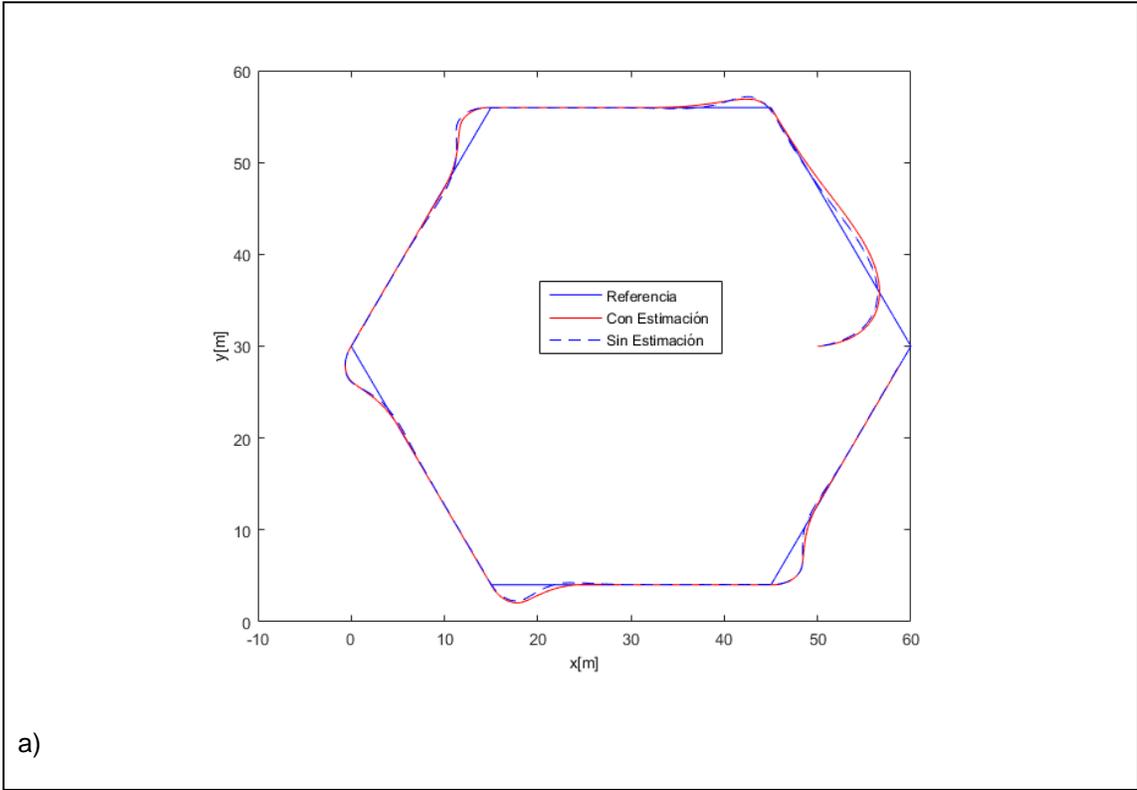
Ilustración 11: Trayectoria Senoidal con Incertidumbre

En la ilustración se muestra una trayectoria senoidal añadida incertidumbre, en a) se observa que el sistema se volvió por un momento inestable sin estimación de la incertidumbre, acción que fue corregida cuando se simula con estimación de la misma, en b) y c) se observan ampliaciones en la dos puntos de la trayectoria, donde se puede visualizar que la trayectoria con estimación de la incertidumbre sigue la trayectoria de referencia.

HEXAGONAL

TRAYECTORIA	CUADRADA
COSTO SIN ESTIMA	1366.7
COSTO CON ESTIMA	1260.2
PORCENTAJE DE MEJORA	7.8%

Tabla 22: Costos con Incertidumbre T. Hexagonal



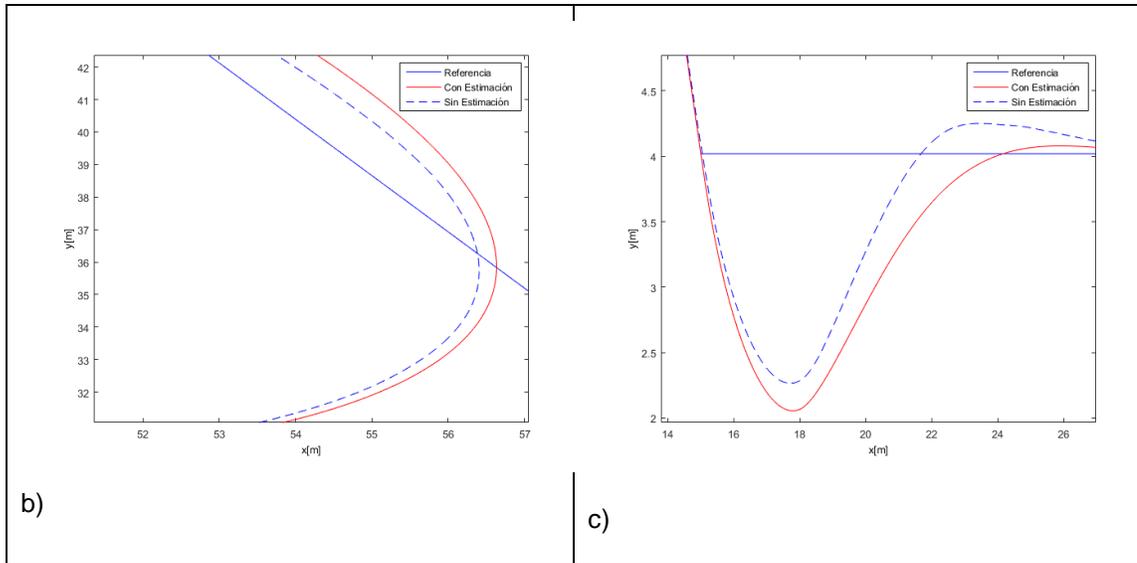


Ilustración 12: Trayectoria Hexagonal con Incertidumbre

En la ilustración se muestra una trayectoria hexagonal añadida incertidumbre, en b), c) y d) se observan ampliaciones de dos de los seis vértices, donde se puede visualizar una mejora en el seguimiento al aplicar estimación de la incertidumbre.

TRIANGULAR

TRAYECTORIA	CUADRADA
COSTO SIN ESTIMA	2005.1
COSTO CON ESTIMA	1791.8
PORCENTAJE DE MEJORA	10.6%

Tabla 23: Costos con Incertidumbre T. Triangular

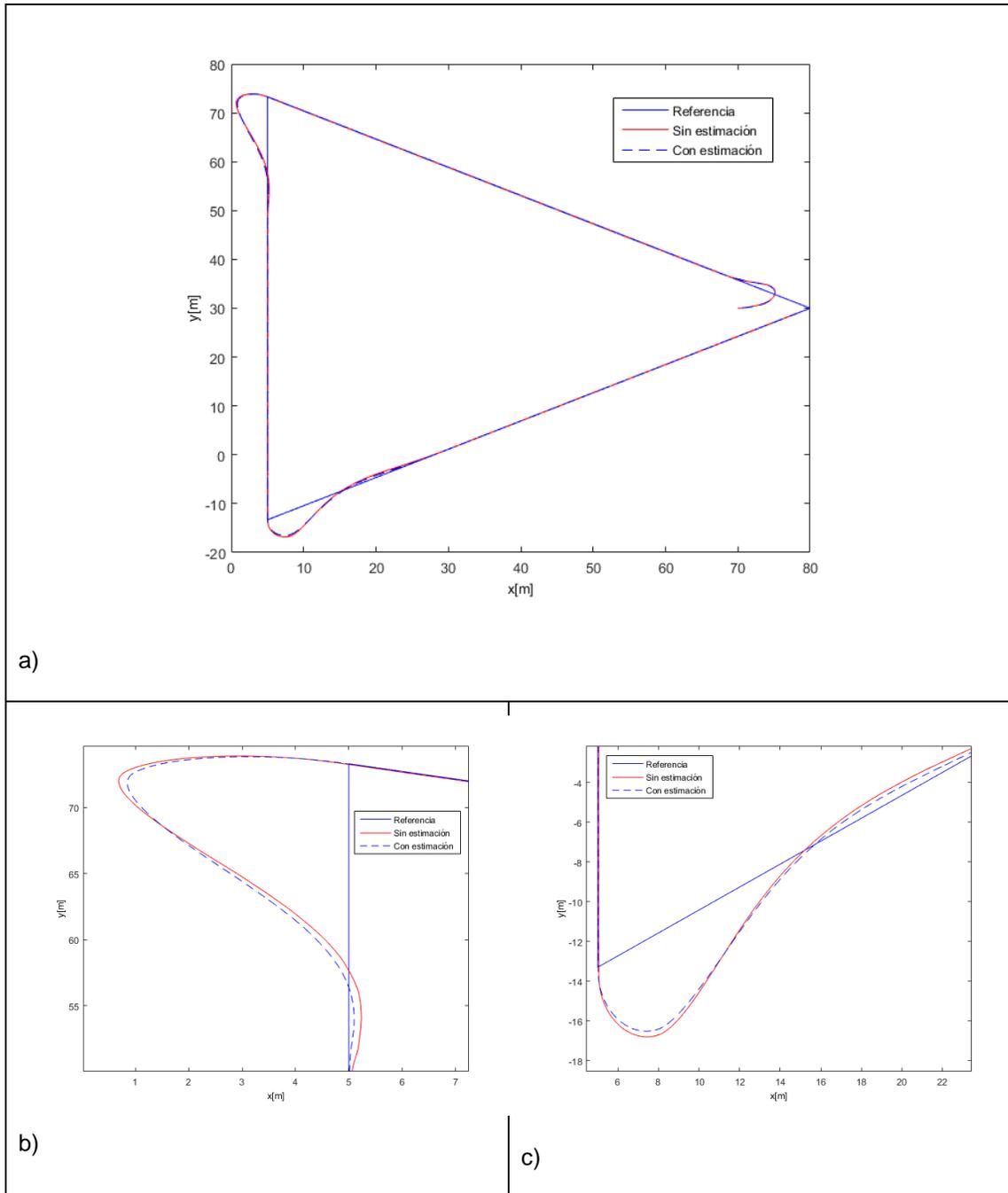


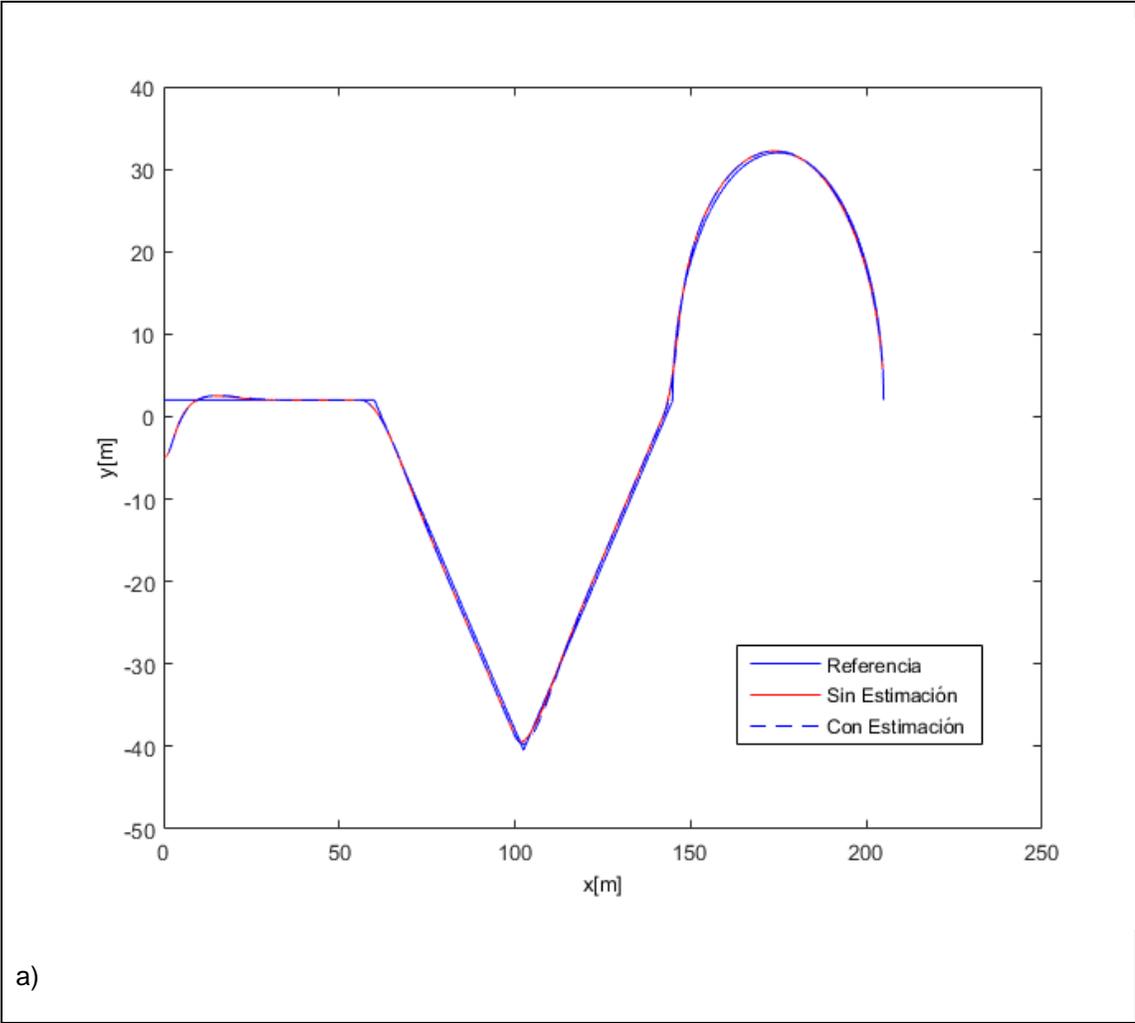
Ilustración 13: Trayectoria Triangular con Incertidumbre

En la ilustración se muestra una trayectoria triangular añadida incertidumbre, en b) y c) se observa mejoras en el seguimiento de la trayectoria, reduciendo así el valor del costo cuando se estima el valor de la incertidumbre.

COMBINADA

TRAYECTORIA	CUADRADA
COSTO SIN ESTIMA	7404,5
COSTO CON ESTIMA	6316,1
PORCENTAJE DE MEJORA	14.7%

Tabla 24: Costos con Incertidumbre T. Combinada



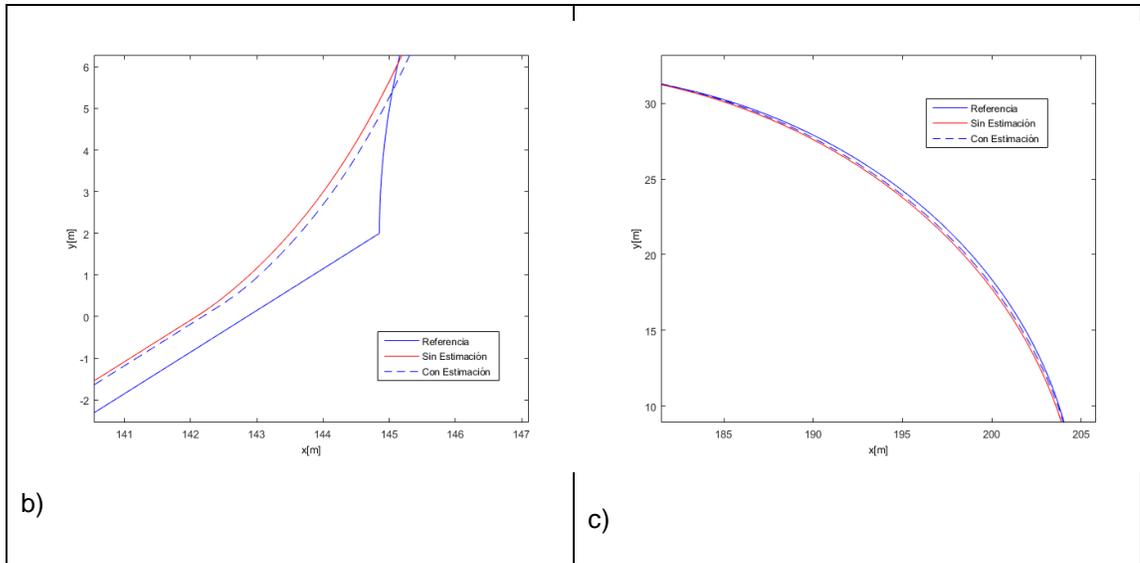


Ilustración 14: Trayectoria Combinada con Incertidumbre

En la ilustración se muestra la trayectoria combinada añadida incertidumbre, con el afán de que esta no sea homogénea y poner a prueba el comportamiento del controlador, en b) y c) se observan ampliaciones en diferentes puntos de la gráfica con evidente mejora en el seguimiento cuando se aplica estimación de la incertidumbre.

CAPITULO III: DISCUSIÓN

Esta investigación tuvo como propósito mejorar el desempeño del seguimiento a la trayectoria del controlador de un buque basado en algebra lineal con la inserción de la estimación de la incertidumbre, con el fin de disminuir el efecto en el error de seguimiento. Luego de haber realizado varias simulaciones en diferentes trayectorias incluyendo y no la estimación de la incertidumbre se obtuvieron los resultados que se detallan en el desarrollo de este capítulo:

Una vez comparados los valores de las constantes de proporcionalidad se observó que k_x y k_y son cercanas a uno, lo que hará que el seguimiento de la trayectoria sea progresivo, esta tendencia de valores cercanos a uno se repite en todas las trayectorias analizadas (cuadrada, senoidal, hexagonal, triangular, combinada).

Las trayectorias que experimentan cambios bruscos (ángulos pronunciados) son las que presentan mayor valor de la función de costo, esto se puede constatar al mirar las gráficas de seguimiento que en los vértices la trayectoria real muestra un alejamiento de la de referencia.

El comportamiento del controlador al optimizar los valores de las constantes de proporcionalidad un $\pm 5\%$ muestra trayectorias con poca dispersión, véase los gráficos de Tabla 10 a la Tabla 14

De todas las trayectorias simuladas la que mejor se ajusta es la senoidal, presentando valores de costo menores y al mismo tiempo es la que menor porcentaje de mejora presenta con la estimación de la incertidumbre.

Al observar las gráficas con mayor, se distingue que las trayectorias con estimación de la incertidumbre siempre están más detalle cercanas a la de referencia.

El porcentaje de mejora en el seguimiento de sistemas con incertidumbre aplicando su estimación mejora en porcentajes que oscilan entre el 7,8% y el 19,7% con un promedio del 13% sin considerar la trayectoria senoidal.

TRAYECTORIA	% DE MEJORA
CUADRADA	19.7
SENOIDAL	>100
HEXAGONAL	7,8
TRIANGULAR	10.6
COMBINADA	14.7

Tabla 25: Porcentaje de Mejora con Estimación de Incertidumbre

CONCLUSIONES

- El controlador MBAL utiliza una baja carga computacional debido a que sus algoritmos basan sus operaciones en álgebra lineal.
- Debido a que el controlador MBAL basa su funcionamiento en el modelo matemático de la planta, entonces está sujeto a errores de modelado y perturbaciones.
- Cuando existen pequeñas variaciones alrededor de las constantes de proporcionalidad optimizadas la variación en el seguimiento de la trayectoria es mínimo.
- La incorporación de la incertidumbre muestra mayores efectos sobre el seguimiento de la trayectoria cuando estas poseen cambios bruscos.
- Un orden superior en la estima de la incertidumbre no tiene mayor relevancia en una mejora del costo debido a que cada término agregado presenta un denominador numéricamente más alto, por consiguiente el valor del término es cada vez más pequeño (Véase Ecuación (25))
- Luego de analizar los resultados obtenidos en el presente trabajo investigativo se concluye que la incorporación de la estimación de la incertidumbre mejora el seguimiento de la trayectoria de un buque controlado mediante el método basado en álgebra lineal ya que en todas las simulaciones realizadas el costo disminuye al utilizarla. (Véase Tabla 25)
- La incertidumbre agregada al sistema pueden representar factores no considerados en el modelado, debido a esto la incorporación de la estima de dicha incertidumbre en el controlador mejora notablemente el seguimiento en la trayectoria del buque marino.
- La inclusión de la predicción de la incertidumbre no aumenta el orden del controlador.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- B.L.Ma. (2009). Global exponential asymptotic stabilization of underactuated surface vessels. *Systems and Control Letters*, pp 194-201.
- Bao-li. (2009). Global k-exponential asymptotic stabilization of underactuated surface vessels. *System & Control Letters*, 194-201.
- Ghommam J., M. F. (2009). Global stabilisation and tracking control of underactuated surface vessels. *IET Control Theory and Applications*.
- K.Y.Pettersen and O.Egeland. (1996). Exponential stabilization of an underactuated surface vessels. *Conference on Decision and Control*, pp. 967-972.
- Richard. Burden, D. F. (2011). *Analisis Numerico*. Mexico: Cengage.
- Scaglia G., E. p. (2006). *Estrategias para seguimiento de trayectorias*,. San Juan,: Universidad Nacional de San Juan.
- Scaglia G., M. V. (2007). Tracking Control of a Mobile Robot using Linear Interpolation. *Proceeding of the 3rd International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation*.
- Scaglia G., P. J. (2005). Trajectory control using numerical methods. *IFAC Congress Praha*.
- Scaglia G., P. J. (2005.). Trajectory control using numerical methods. *IFAC Congress Praha*.
- Scaglia Gustavo, Q. O. (2008). Numerical Methods Based Controller Design for Mobile Robots. *Cambridge University*.
- Scaglia, G. (2006). *Estrategias para seguimiento de trayectorias*. San Juan, Argentina.: Editorial Fundación Universidad Nacional de San Juan.
- T.I.Fossen. (2002.). Marine Control Systems. *Marine Cybernetics*.
- Z.P.Jiang. (2002). Global tracking control of underactuated ships by Lyapunov's direct methods. *Automatica*, 38(2), pp 301-309.
- Z.P.Jiang, T. a. (2004). New cascade approach for global k-exponential tracking of underactuated ships. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp 2297 - 2203.

ANEXO

Demostración de la convergencia a cero de los errores para el caso en que se utiliza estimación de la incertidumbre

Observación Considere la siguiente progresión geométrica,

$$\begin{aligned} a_1 &= ka_0 \\ a_2 &= ka_1 = k^2a_0 \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= ka_n = k^na_0 \end{aligned}$$

Entonces, si $0 < k < 1$ y $n \rightarrow \infty$ (con $n \in N$), entonces un $a_n \rightarrow 0$. (Mario Serrano, 2013)

Considerando la ecuación (27) y el controlador representado en la ecuación (34) se realiza la prueba de convergencia a cero de los errores para el caso en que se utiliza la estimación de la incertidumbre, empezando con la variable u .

$$u_{(n+1)} = u_{(n)} + T_o \left(\frac{m_{22}}{m_{11}} v_{(n)} r_{(n)} - \frac{d_{11}}{m_{11}} u_{(n)} + \frac{1}{m_{11}} T_{u(n)} \right) + E_{u(n+1)} \quad (37)$$

$$T_{u(n)} = m_{11} \left(\frac{u_{ez(n+1)} - k_u (u_{ez(n)} - u_{(n)}) - u_{(n)} - \hat{E}_{u(n+1)}}{T_o} - \frac{m_{22}}{m_{11}} v_{(n)} r_{(n)} + \frac{d_{11}}{m_{11}} u_{(n)} \right) \quad (38)$$

Reemplazando (38) en (37) y simplificando:

$$u_{(n+1)} = u_{(n)} + T_o \left(\left(\frac{u_{ez(n+1)} - k_u (u_{ez(n)} - u_{(n)}) - u_{(n)} - \hat{E}_{u(n+1)}}{T_o} \right) \right) + E_{u(n+1)} \quad (39)$$

Por simples operaciones matemáticas,

$$u_{(n+1)} = u_{ez(n+1)} - k_u (u_{ez(n)} - u_{(n)}) - \hat{E}_{u(n+1)} + E_{u(n+1)} \quad (40)$$

Debido a que $E_{u,n}$ es desconocido y que su estimación $\hat{E}_{u,n}$ es una aproximación numérica entonces estas son prácticamente iguales, por lo tanto pueden suprimirse

$$u_{ez(n+1)} - u_{(n+1)} = k_u (u_{ez(n)} - u_{(n)}) \quad (41)$$

$$e_{u,n+1} = k_u e_{u,n} \quad (42)$$

Entonces, $0 < k_u < 1$ y $n \rightarrow \infty$ (con $n \in N$), entonces $e_{u,n+1} \rightarrow 0$, (véase la Observación).

Análogamente se trabaja con la variable $r(n)$

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + T_0 \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} - \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} + \frac{1}{m_{33}} T_{r(n)} \right) + E_{r(n+1)} \quad (43)$$

$$T_{r(n)} = m_{33} \left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r_{(n)}) - r_{(n)} - \hat{E}_{r(n+1)}}{T_0} - \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} + \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} \right) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} r_{(n+1)} = r_{(n)} + T_0 & \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} - \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} \right. \\ & + \frac{1}{m_{33}} m_{33} \left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r_{(n)}) - r_{(n)} - \hat{E}_{r(n+1)}}{T_0} \right. \\ & \left. \left. - \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} v_{(n)} u_{(n)} + \frac{d_{33}}{m_{33}} r_{(n)} \right) \right) + E_{r(n+1)} \end{aligned} \quad (45)$$

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + T_0 \left(\left(\frac{r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r_{(n)}) - r_{(n)} - \hat{E}_{r(n+1)}}{T_0} \right) \right) + E_{r(n+1)} \quad (46)$$

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r_{(n)}) - r_{(n)} - \hat{E}_{r(n+1)} + E_{r(n+1)} \quad (47)$$

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + r_{ez(n+1)} - k_r(r_{ez(n)} - r_{(n)}) - r_{(n)} \quad (48)$$

$$r_{ez(n+1)} - r_{(n+1)} = k_r(r_{ez(n)} - r_{(n)}) \quad (49)$$

$$e_{r,n+1} = k_r e_{r,n} \quad (50)$$

Entonces, $0 < k_r < 1$ y $n \rightarrow \infty$ (con $n \in N$), entonces $e_{r,n+1} \rightarrow 0$, (véase la Observación).

Ahora lo hacemos con $\psi(n)$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{(n)} + T_0 r_{(n)} + E_{\psi(n+1)} \quad (51)$$

$$e_{r(n)} = r_{ez(n)} - r_{(n)} \quad (52)$$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{(n)} + T_0 (r_{ez(n)} - e_{r(n)}) + E_{\psi(n+1)} \quad (53)$$

$$r_{ez(n)} = \frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) - \psi_{(n)} - \hat{E}\psi_{(n+1)}}{T_0} \quad (54)$$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{(n)} + T_0 \left(\frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) - \psi_{(n)} - \hat{E}\psi_{(n+1)}}{T_0} - e_{r(n)} \right) + E\psi_{(n+1)} \quad (55)$$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{(n)} + T_0 \left(\frac{\psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) - \psi_{(n)} - \hat{E}\psi_{(n+1)} - T_0 e_{r(n)}}{T_0} \right) + E\psi_{(n+1)} \quad (56)$$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{(n)} + \psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) - \psi_{(n)} - \hat{E}\psi_{(n+1)} - T_0 e_{r(n)} + E\psi_{(n+1)} \quad (57)$$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) - \hat{E}\psi_{(n+1)} + E\psi_{(n+1)} \quad (58)$$

$$\psi_{(n+1)} = \psi_{ez(n+1)} - k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) \quad (59)$$

$$\psi_{ez(n+1)} - \psi_{(n+1)} = k_\psi(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}) \quad (60)$$

$$e_{\psi,n+1} = k_\psi e_{\psi,n} \quad (61)$$

Entonces, $0 < k_\psi < 1$ y $n \rightarrow \infty$ (con $n \in N$), entonces $e_{\psi,n+1} \rightarrow 0$, (véase la Observación).

A continuación se desarrolla los errores de e_x y e_y . A partir de la ecuación correspondiente del sistema (27) y $e_{u(n)}$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0(u_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) + E_{x(n+1)} \quad (62)$$

$$e_{u(n)} = u_{ez(n)} - u_{(n)} \quad (63)$$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0((u_{ez(n)} - e_{u(n)}) \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) + E_{x(n+1)} \quad (64)$$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0(u_{ez(n)} \cos(\psi_{(n)}) - e_{u(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) + E_{x(n+1)} \quad (65)$$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0(u_{ez(n)} \cos(\psi_{(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) - T_0 e_{u(n)} \cos(\psi_{(n)}) + E_{x(n+1)} \quad (66)$$

Mediante el uso de la regla de interpolación de Taylor, las funciones $\cos(\psi_n)$ se pueden expresar alrededor de $\psi_{ez(n)}$ como:

$$\cos(\psi_n) = \cos(\psi_{ez(n)}) - \underbrace{\sin(\psi_{ez(n)} + \zeta(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}))}_{\theta_{\lambda,n}} (\psi_{(n)} - \psi_{ez(n)}) \quad (67)$$

Con $0 < \zeta < 1$

Definiendo que

$$e_{\psi(n)} = \psi_{ez(n)} - \psi(n) \quad (68)$$

Y reemplazando en (67):

$$\cos(\psi_n) = \cos(\psi_{ez(n)}) + e_{\psi(n)} \sin\left(\frac{\psi_{ez(n)} - \zeta(e_{\psi(n)})}{\psi_{\zeta(n)}}\right) \quad (69)$$

A partir de las ecuaciones (66) y (69):

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \left(\cos(\psi_{ez(n)}) + e_{\psi(n)} \sin\left(\frac{\psi_{ez(n)} - \zeta(e_{\psi(n)})}{\psi_{\zeta(n)}}\right) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) - T_0 e_{u(n)} (\cos(\psi_{(n)})) + E_{x(n+1)} \right) \quad (70)$$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \cos(\psi_{ez(n)}) + u_{ez(n)} e_{\psi(n)} \sin\left(\frac{\psi_{ez(n)} - \zeta(e_{\psi(n)})}{\psi_{\zeta(n)}}\right) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) - T_0 e_{u(n)} (\cos(\psi_{(n)})) + E_{x(n+1)} \quad (71)$$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \cos(\psi_{ez(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) - T_0 \left(e_{u(n)} \cos(\psi_{(n)}) - u_{ez(n)} e_{\psi(n)} \sin\left(\frac{\psi_{ez(n)} - \zeta(e_{\psi(n)})}{\psi_{\zeta(n)}}\right) \right) + E_{x(n+1)} \right) \quad (72)$$

Asumiendo que

$$f(n) = -T_0 \left(e_{u(n)} \cos(\psi_{(n)}) - u_{ez(n)} e_{\psi(n)} \sin\left(\frac{\psi_{ez(n)} - \zeta(e_{\psi(n)})}{\psi_{\zeta(n)}}\right) \right) \quad (73)$$

Y conociendo la expresión que define a $u_{ez(n)}$:

$$u_{ez(n)} = \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) + \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) \quad (74)$$

Reemplazando nos da:

$$\begin{aligned}
 x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0 & \left(\left(\left(\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) + f(n) \\
 & + E_{x(n+1)}
 \end{aligned} \tag{75}$$

De la ecuación (30) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right) - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \\
 & = \left(\left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) \right. \\
 & \left. + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \frac{\sin(\psi_{ez(n)})}{\cos(\psi_{ez(n)})}
 \end{aligned} \tag{76}$$

Reemplazando en (75):

$$\begin{aligned}
 x_{(n+1)} = x_{(n)} + T_0 & \left(\left(\left(\left(\left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \frac{\sin(\psi_{ez(n)})}{\cos(\psi_{ez(n)})} \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) + f(n) \\
 & + E_{x(n+1)}
 \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
 x_{(n+1)} = & x_{(n)} + (x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)} \\
 & + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) \sin^2(\psi_{ez(n)}) \\
 & + (x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)} \\
 & + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)})) \cos^2(\psi_{ez(n)}) - v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) + f(n) + E_{x(n+1)}
 \end{aligned} \tag{78}$$

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)} + f(n) + E_{x(n+1)} \tag{79}$$

Entonces, si $E_{x,n+1}$ es desconocido y cada componente es un polinomio de orden m , la incertidumbre $E_{x,n+1}$ y su valor estimado $\hat{E}_{x,n+1}$ pueden eliminarse

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} + x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} + f(n) \tag{80}$$

$$x_{ref(n+1)} - x_{(n+1)} = k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) + f(n) \tag{81}$$

$$e_{x(n+1)} = k_x(e_{x(n)}) + f(n) \tag{82}$$

Realizando el mismo análisis para $e_{y(n)}$ partimos de

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0(u_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) + E_{y(n+1)} \tag{83}$$

Sabiendo

$$e_{u(n)} = u_{ez(n)} - u_{(n)} \tag{84}$$

Reemplazando

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0((u_{ez(n)} - e_{u(n)}) \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) + E_{y(n+1)} \tag{85}$$

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0(u_{ez(n)} \sin(\psi_{(n)}) - e_{u(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) + E_{y(n+1)} \tag{86}$$

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0(u_{ez(n)} \sin(\psi_{(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) - T_0 e_{u(n)} \sin(\psi_{(n)}) + E_{y(n+1)} \tag{87}$$

Mediante el uso de la regla de interpolación de Taylor, las funciones $\sin(\psi_n)$ se pueden expresar alrededor del punto $\psi_{ez(n)}$ como:

$$\sin(\psi_n) = \sin(\psi_{ez(n)}) + \underbrace{\cos(\psi_{ez(n)} + \theta(\psi_{ez(n)} - \psi_{(n)}))}_{\psi_{\zeta,n}} (\psi_{(n)} - \psi_{ez(n)}) \quad (88)$$

Con $0 < \theta < 1$ y Definiendo:

$$e_{\psi(n)} = \psi_{ez(n)} - \psi_{(n)} \quad (89)$$

Al reemplazar la ecuación anterior en (89) el $\sin(\psi_n)$ queda como se muestra a continuación:

$$\sin(\psi_n) = \sin(\psi_{ez(n)}) - e_{\psi(n)} \underbrace{\cos(\psi_{ez(n)} - \theta(e_{\psi(n)}))}_{\psi_{\theta(n)}} \quad (90)$$

Si se sustituya la ecuación anterior en (88) queda:

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \left(\sin(\psi_{ez(n)}) - e_{\psi(n)} \underbrace{\cos(\psi_{ez(n)} - \theta(e_{\psi(n)}))}_{\psi_{\theta(n)}} \right) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) - T_0 e_{u(n)} (\sin(\psi_{(n)})) + E_{y(n+1)} \quad (91)$$

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \sin(\psi_{ez(n)}) - u_{ez(n)} e_{\psi(n)} \cos(\psi_{ez(n)} - \theta(e_{\psi(n)})) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) - T_0 e_{u(n)} (\sin(\psi_{(n)})) + E_{y(n+1)} \quad (92)$$

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \sin(\psi_{ez(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) - T_0 \left(e_{u(n)} \sin(\psi_{(n)}) + u_{ez(n)} e_{\psi(n)} \cos(\psi_{ez(n)} - \theta e_{\psi(n)}) \right) + E_{y(n+1)} \quad (93)$$

Donde se define a $g_{(n)}$ como sigue:

$$g_{(n)} = -T_0 \left(e_{u(n)} \sin(\psi_{(n)}) + u_{ez(n)} e_{\psi(n)} \cos(\psi_{ez(n)} - \theta e_{\psi(n)}) \right) \quad (94)$$

De modo que $y_{(n+1)}$ queda como sigue:

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0 \left(u_{ez(n)} \sin(\psi_{ez(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) + g_{(n)} + E_{y(n+1)} \quad (95)$$

Ahora se reemplaza el valor de $u_{ez(n)}$:

$$\begin{aligned}
y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0 & \left(\left(\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \right) \cos(\psi_{ez(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) + g_{(n)} \\
& + E_{y(n+1)}
\end{aligned} \tag{96}$$

De la ecuación (30) se puede obtener la expresión que sigue:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x_{ref(n+1)} - k_x(x_{ref(n)} - x_{(n)}) - x_{(n)} - \hat{E}_{x(n+1)}}{T_0} \right) + v_{(n)} \sin(\psi_{(n)}) \\
& = \left(\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right) \right. \\
& \left. - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \frac{\cos(\psi_{ez(n)})}{\sin(\psi_{ez(n)})}
\end{aligned} \tag{97}$$

Y reemplazando en (97) :

$$\begin{aligned}
 y_{(n+1)} = y_{(n)} + T_0 & \left(\left(\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\left(\left(\frac{y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)}}{T_0} \right) \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) \frac{\cos(\psi_{ez(n)})}{\sin(\psi_{ez(n)})} \cos(\psi_{ez(n)}) \right) \sin(\psi_{ez(n)}) \right. \\
 & \left. \left. + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \right) + g_{(n)} + E_{y(n+1)} \right) \quad (98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{(n+1)} = y_{(n)} + & (y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)} \\
 & - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) \sin^2(\psi_{ez(n)}) \\
 & + (y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)} \\
 & - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)})) \cos^2(\psi_{ez(n)}) + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) + g_{(n)} + E_{y(n+1)} \quad (99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{(n+1)} = y_{(n)} + & y_{ref(n+1)} - k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - y_{(n)} - \hat{E}_{y(n+1)} - v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) \\
 & + v_{(n)} \cos(\psi_{(n)}) + g_{(n)} + E_{y(n+1)} \quad (100)
 \end{aligned}$$

$$y_{ref(n+1)} - y_{(n+1)} = k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) - \hat{E}_{y(n+1)} + g_{(n)} + E_{y(n+1)} \quad (101)$$

Si $E_{y,n+1}$ es desconocida y $\hat{E}_{y,n+1}$ es su aproximación numérica, entonces la incertidumbre $E_{y,n+1}$ y su valor estimado $\hat{E}_{y,n+1}$ se pueden eliminar en la ecuación anterior:

$$y_{ref(n+1)} - y_{(n+1)} = k_y(y_{ref(n)} - y_{(n)}) + g_{(n)} \quad (102)$$

$$e_{y(n+1)} = k_y(e_{y(n)}) + g_{(n)} \quad (103)$$

Agrupando en forma matricial las ecuaciones (83) y (104) se obtiene el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_{x,n+1} \\ e_{y,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x,n} \\ e_{y,n} \end{bmatrix} - T_0 \begin{bmatrix} \cos(\psi_{(n)}) & -u_{ez(n)} \sin(\psi_{ez(n)} - \zeta e_{\psi(n)}) \\ \sin(\psi_{(n)}) & +u_{ez(n)} \cos(\psi_{ez(n)} - \theta e_{\psi(n)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{u(n)} \\ e_{\psi(n)} \end{bmatrix} \quad (104)$$

La ecuación anterior tiende a cero cuando n tiende a infinito debido a la convergencia a cero de

$$\begin{bmatrix} e_{x,n} \\ e_{y,n} \end{bmatrix}.$$