



Departamento de Posgrados
Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Diseño de un controlador para seguimiento de la trayectoria
no lineal de robots móviles con regulación de la limitación de
la velocidad a través de la variación de los parámetros.**

**Trabajo de graduación previo a la obtención del Título de Magister en
Matemáticas Aplicadas**

Autor:
Ing. Elec. Francisco Eugenio Vásquez Calero

Director: Dr. Gustavo Scaglia, PhD
Codirector: Dr. Emanuel Serrano, PhD

Cuenca – Ecuador
2017

A la memoria de Mons. Luis Alberto Luna Tobar

AGRADECIMIENTO

A la Universidad del Azuay y su Departamento de Postgrados.

A los miembros del Departamento de Ciencias Matemáticas de Universidad EAFIT de Medellín, Colombia, que fueron profesores de la Maestría en Matemáticas Aplicadas de la Universidad del Azuay.

Al Codirector: Dr. Emanuel Serrano, de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina.

Un muy especial agradecimiento al Dr. Gustavo Scaglia, de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, Director y mentor del presente trabajo.

RESUMEN

Diseño de un controlador para seguimiento de la trayectoria no lineal de robots móviles con regulación de la limitación de la velocidad a través de la variación de los parámetros.

Se desarrolla el modelo matemático para un sistema de control que se aplica a un robot móvil monociclo, en el cual, debido a sus características, no se pueden exceder los límites de velocidad tanto lineal como angular, mientras se aproxima a una trayectoria de referencia.

Para este propósito se procura que los errores entre la posición del robot y la posición de referencia sean lo menor posibles, actuando sobre los parámetros de control k_v y k_ω , que a su vez están delimitados en un intervalo acotado por un valor máximos y un valor mínimo.

En el modelado se aplica el método interpolación lineal y se lo implementa por medio de un algoritmo de control que se basa en el denominado método delta.

La validación del controlador se la realiza aplicando el sistema en diferentes trayectorias no lineales.

PALABRAS CLAVE: Controlador para seguimiento de robot, Seguimiento de trayectoria con control de velocidad, Control de la saturación de la velocidad por variación de parámetros.

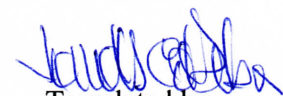
Design of a nonlinear trajectory tracking controller for mobile robots with velocity limitation via parameters variation

ABSTRACT

The mathematical model for a control system applied to a unicycle mobile robot was developed. Due to its characteristics, it was not possible to exceed linear and angular velocity limits while approaching a reference path. Therefore, it was intended that the errors between the robot position and the reference position should be kept as small as possible, acting on the k_v y k_ω control parameters, which in turn were delimited in a range defined by a maximum value and a minimum value. This modeling applied the linear interpolation method and it was implemented by means of a control algorithm based on the so-called delta method. The validation of the controller was done by applying the system in different non-linear paths.

KEYWORDS: robot tracking controller, trajectory tracking with velocity limitation, speed saturation control via parameter variation.


UNIVERSIDAD DEL
A. JAY
Dpt. Matemáticas


Translated by
Lic. Lourdes Crespo

ÍNDICE DE CONTENIDOS

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTO	iii
RESUMEN	iv
ABSTRACT	v
ÍNDICE DE CONTENIDOS	vi
ÍNDICE DE FIGURAS	viii
 INTRODUCCIÓN.....	 1
 CAPÍTULO 1:	
POSTULADOS TEÓRICOS	4
 1.- ELABORACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	4
1.1.- MODELO DINÁMICO DEL ROBOT MOVIL	5
1.2.- DISEÑO DEL CONTROLADOR	8
1.2.1.- INTERPOLACIÓN LINEAL	9
1.2.1.1.-Concepto de la variable sacrificada	14
1.2.1.2.- Análisis de los límites de los parámetros k_v y k_ω	17
1.2.1.3.- Análisis de la variación de los parámetros de referencia	23
1.2.2.- MÉTODO DELTA.....	24
 CAPÍTULO 2:	
SISTEMA DE CONTROL.....	26
 2.- APLICACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO	26
2.1.- ESTRUCTURACIÓN DE LA PLANTA	26
2.2.- ESTRUCTURACIÓN DEL CONTROLADOR.....	28
2.3.- APLICACIÓN DEL MODELO	29
2.3.1.- TRAYECTORIA SENOIDAL.....	29
2.3.2.- TRAYECTORIA EN “OCHO”	31

CAPÍTULO 3:

RESULTADOS	33
 3.- ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	33
3.1.- ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PARA LA TRAYECTORIA SENIODAL.....	33
3.1.1.- Seguimiento (Fig. 12):	34
3.1.2.- Errores (Fig. 13):	35
3.1.3.- Velocidad lineal y velocidad angular (Fig. 14 y Fig. 15)	35
3.1.4.- Variación de los parámetros k_v y k_ω (Fig. 16 y Fig. 17):	36
3.1.5.- Conclusión:	36
3.2.- ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PARA LA TRAYECTORIA CIRCULAR	37
3.2.1.- Seguimiento (Fig. 18):	37
3.2.2.- Errores (Fig. 19):	38
3.2.3.- Velocidad lineal y velocidad angular (Fig. 20 y Fig. 21)	39
3.2.4.- Variación de los parámetros k_v y k_ω (Fig. 22 y Fig. 23):	40
3.2.5.- Conclusión:	40
3.3.- TRAYECTORIA EN “OCHO”	40
3.3.1.- Seguimiento (Fig. 24):	41
3.3.2.- Errores (Fig. 25):	41
3.3.3.- Velocidad lineal y velocidad angular (Fig. 26 y Fig. 27):	42
3.3.4.- Variación de los parámetros k_v y k_ω (Fig. 28 y Fig. 29):	43
3.3.5.- Conclusión:	44
 CONCLUSIONES	45
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1: Parámetros del robot móvil tipo monociclo	5
Fig. 2: Función $g(x)$ y la recta $y=p(x)$	9
Fig. 3: Recta $y=P(t)$, aproximación lineal.....	10
Fig. 4: Robot PIONER 3DX	11
Fig. 5: Referencias para posiciones: cartesiana x,y ; angular ψ ; velocidades: lineal μ y angular ω	12
Fig. 6 Diagrama de flujo método delta	25
Fig. 7: Diseño en Simulink de la “máscara” para la planta para el robot PIONER 3DX.....	28
Fig. 8: Desarrollo de la máscara para la planta del robot PIONER 3DX.....	28
Fig. 9: Reportes de la simulación para una trayectoria senoidal.....	30
Fig. 10: Reportes de la simulación para una trayectoria Circular.....	31
Fig. 11: Reportes de la simulación para una trayectoria en “ocho”	32
Fig. 12: Trayectoria senoidal, seguimiento: referencia en rojo, trayectoria del robot en azul	34
Fig. 13: Trayectoria senoidal, gráfico de los errores en x y errores en y	34
Fig. 14: Trayectoria senoidal, velocidad Lineal	35
Fig. 15: Trayectoria senoidal, velocidad angular.....	35
Fig. 16: Trayectoria senoidal, variación del parámetro k_v	36
Fig. 17: Trayectoria senoidal, variación del parámetro k_ω	36
Fig. 18: Trayectoria circular, seguimiento: referencia en rojo, trayectoria del robot en azul .	37
Fig. 19: Trayectoria circular, gráfico de los errores en x y errores en y	38
Fig. 20: Trayectoria circular, velocidad Lineal	38
Fig. 21: Trayectoria circular, velocidad angular.....	39
Fig. 22: Trayectoria circular, variación del parámetro k_v	39
Fig. 23: Trayectoria circular, variación del parámetro k_ω	40
Fig. 24: Trayectoria en ocho, seguimiento: referencia en rojo, trayectoria del robot en azul	41
Fig. 25: Trayectoria en ocho, gráfico de los errores en x y errores en y	42
Fig. 26: Trayectoria en ocho, velocidad lineal	42
Fig. 27: Trayectoria en ocho, velocidad angular	43
Fig. 28: Trayectoria en ocho, variación del parámetro k_v	43
Fig. 29: Trayectoria en ocho, variación del parámetro k_ω	44

INTRODUCCIÓN

En los diferentes procesos de aplicación de robots se utilizan distintos modelos de equipos con características específicas para cada trabajo a realizar, existen modelos de robots de diferentes tamaños, potencia, velocidades, torques de arranque, número de ejes, número de ruedas, capacidades de maniobra, etc.

Uno de los principales problemas que se encuentran en el control de robots móviles es el seguimiento de trayectorias; en el presente trabajo se genera en el transcurso del tiempo una trayectoria de referencia y tiene por propósito que el robot móvil, que se encuentra a una determinada distancia de la posición deseada, pueda alcanzar una ubicación próxima o igual a la posición cartesiana prescrita en la trayectoria de referencia (x, y) , con una orientación preestablecida (ψ) , el seguimiento se lo va realizando en pequeños segmentos de tiempo que los denominamos períodos de muestreo. Estas acciones combinadas dan como resultado el seguimiento cada vez más próximo a la trayectoria deseada por parte del robot. Para alcanzar este objetivo, están disponibles dos variables de control, sobre las que se deberá actuar: la velocidad lineal " u " del robot y la velocidad angular " ω ", las mismas que tiene un límite máximo definido por las características del robot móvil.

Si la distancia entre el robot y la trayectoria es demasiado grande y la velocidad con la que se genera la trayectoria es superior a la velocidad máxima del robot, este se aproximará a la trayectoria, pero sin lograr alcanzarla, pero si la velocidad máxima permitida del robot es superior a la velocidad con la que se genera la trayectoria de referencia, en algún momento la alcanzará.

Este estudio se enfoca en el caso particular de un robot monociclo, es decir con un par de ruedas de tracción y una de soporte, que presenta las ventajas de alta movilidad, alta tracción y una configuración de rueda simple; el mismo que requiere realizar el seguimiento a la trayectoria preestablecida que se va marcando en el transcurso del tiempo, recalcando nuevamente, que en el proceso del seguimiento de esta trayectoria el robot tiene un límite de saturación.

Para el control de las velocidades lineal u se debe actuar sobre el parámetro kv en función del error de la posición cartesiana y para el controlar de la velocidad angular ω se deben realizar modificaciones en el parámetro $k\omega$ en función del error del ángulo de la dirección de movimiento.

Se delimitan el intervalo y los extremos de variación para cada uno de los parámetros kv y $k\omega$, realizando varias pruebas empíricas, de manera que garanticen una rápida convergencia.

En concreto por medio de los parámetros kv y $k\omega$, que pueden variar entre límites establecidos, se controla el seguimiento óptimo del robot hacia una trayectoria específica evitando que tanto la velocidad lineal, como la velocidad angular, superen los límites posibles del robot.

El objetivo del presente trabajo es modelar en términos matemáticos el controlador para un robot monociclo, de manera que vaya alcanzando una trayectoria de referencia preestablecida, la misma que se va generando en el transcurso del tiempo, procurando que la diferencia entre la posición del robot en movimiento y el punto correspondiente en la trayectoria de referencia, denominado error, sea lo más pequeño posible y que, en el transcurso del tiempo la posición del robot vaya igualando a la posición de referencia, es decir el error tienda a cero; recalando nuevamente que este seguimiento deberá hacerlo sin sobre limitar los niveles máximos prefijados tanto de velocidad lineal, como de velocidad angular. Se plantea que actuando debidamente sobre los parámetros de regulación kv y $k\omega$ en cada uno de los diferentes intervalos de tiempo de muestreo, que conforman el periodo total de funcionamiento, se puede alcanzar la trayectoria de referencia.

Existen diferentes técnica y métodos numéricos que nos pueden servir para tal propósito, en esta investigación se ha procurado hacerlo de la manera simple y concisa, pero sin perder precisión, ni calidad en sistema de control para el seguimiento.

A partir del modelo dinámico del robot y particularizando los parámetros para el robot PIONER 3DX, se desarrolla el modelo de la denominada "planta".

Este robot debe ser gobernado por un controlador que logre las condiciones de seguimiento óptimo sin exceder los límites de velocidad, en el algoritmo de control se considera la primicia que el robot en movimiento debe desplazarse hacia el punto correspondiente de la posición a seguir, para tal propósito, en cada período de muestreo, se inicia con valores máximos de kv (*parámetro para el control de la velocidad lineal en función de la posición cartesiana*) y $k\omega$ (*parámetro para el control de la velocidad angular en función del ángulo de la dirección de movimiento*), y aplicando el Método de Interpolación Lineal en cada intervalo de muestreo se encuentran los valores de la nueva posición, dirección, velocidades lineal y angular del equipo.

Para vigilar que las velocidades tanto lineales, como angulares no excedan los máximos establecidos, se desarrolla una rutina basada en el denominado Método Delta, el mismo que parte del análisis de los casos en que las velocidades calculadas superen a la velocidad máxima permitida, realiza pequeños decrementos (denominados delta) que corrigen los parámetros kv y $k\omega$ y a partir de estos nuevos valores se recalculan las variables de velocidad y posición, repitiendo este procedimiento hasta lograr que las velocidades sean inferiores a

las velocidades máximas permitidas; con los valores de k_v y k_ω finales, se definen de manera definitiva la velocidades y la posición para este período de muestreo. El procedimiento es el mismo en todos y cada uno de los siguientes períodos de muestreo que conforman el tiempo de acción del robot.

La contribución de esta metodología se basa en conceptos fácilmente comprensibles y que no necesitan de cálculos demasiado complejos para encontrar la señal adecuada de control. Se modela un controlador cinemático para seguimiento de trayectoria, que actúa sobre la velocidad, logrando que esta no llegue a la velocidad máxima de referencia para alcanzar el objetivo deseado.

CAPÍTULO 1:

POSTULADOS TEÓRICOS

El presente trabajo tiene como base de inicio, los proyectos de investigación anteriores, relacionados con temas afines y que en su mayoría fueron desarrollados por el Dr. Gustavo Scaglia, Dr. Emanuel Serrano, Dr. Andrés Rosales, Dr. Celso de la Cruz y sus equipos de investigación del *Instituto de Ingeniería Química, Universidad Nacional de San Juan, Argentina*.

1.- ELABORACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Partimos de modelo dinámico de un robot monociclo, en el cual se particularizarán los parámetros del robot PIONER 3DX, los mismos que fueron obtenidos en base a datos del fabricante y de mediciones y experimentaciones realizadas en el *Instituto de Automática (INAUT), Universidad Nacional de San Juan, Argentina*, a partir de lo cual se desarrolla el modelo de la planta.

Para el seguimiento de trayectorias del sistema de movimiento del robot, es necesario basarse en un camino a seguir, el mismo que se va generando en el tiempo y se denomina referencia; mientras que el algoritmo de control que gobierna el robot, genera señales para que el robot busque igualar la trayectoria de referencia.

Definimos el error para un instante dado, como la diferencia entre: el punto de la trayectoria de referencia que en ese momento debe asumir y la posición en la que se encuentra el robot; se debe procurar que este error cada vez sea menor, haciendo que el módulo de seguimiento de trayectoria oriente y mueva el robot hacia el punto en mención, recalculado en cada período de referencia la dirección y las velocidades.

En este trabajo se propone un enfoque sencillo para el seguimiento de trayectorias. Para lograr este objetivo, se aproxima la evolución del sistema por medio de una interpolación lineal en cada tiempo de muestreo. Bajo esta suposición, y conociendo el estado deseado, se puede obtener un valor para la acción de control necesaria para forzar al sistema a pasar de su estado actual, al deseado. Como es una aproximación lineal, claramente, los errores de seguimiento pueden reducirse disminuyendo el tiempo de muestreo.

La principal contribución de este trabajo es que la metodología propuesta se basa en conceptos fácilmente comprensibles y que no hay necesidad de cálculos complejos para alcanzar la señal de control.

En este proyecto se emplearán los esquemas de control presentados en Fierro y Lewis (1995), Fukao, Nakagawa y Adachi (2000), Kim et al. (2000), Shim y Sung (2004), Cruz, McClintock, Perteet, Orqueda y Cao (2007) y sobre todo de Scaglia y Serrano en sus diferentes proyectos. En consecuencia, primero se diseña un controlador cinemático, que genera la velocidad de referencia para alcanzar el objetivo deseado.

Aclarando que el robot PIONER 3DX, dispone internamente de un sistema que limita la velocidad en un valor máximo permitido, por lo tanto, se puede actuar sobre la velocidad sin sobrepasar dicho límite.

1.1.- MODELO DINÁMICO DEL ROBOT MOVIL

Partiendo del trabajo “*Dynamic model based formation control and obstacle avoidance of multi-robot systems*”, (De La Cruz & Carelli, 2008) tenemos las siguientes consideraciones para el modelado matemático del mismo:

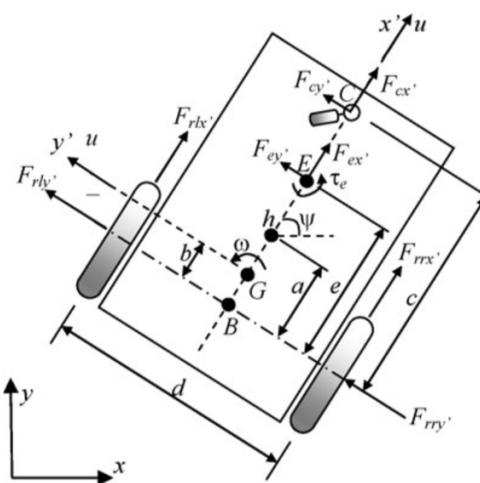


Fig. 1: Parámetros del robot móvil tipo monociclo

En la Fig.1, tenemos las siguientes consideraciones:

G: centro de masa

B: centro de referencia de la rueda

$h = [x \ y]^T$: punto que seguirá la trayectoria

u y $\bar{u}$: velocidades longitudinal y lateral del centro de masa

ω y ψ : velocidad angular y el rumbo del robot

d , b , a , e y c : distancias

$F_{rrx'}$ y $F_{rry'}$: fuerzas longitudinales y laterales del neumático de la rueda derecha;

$F_{rlx'}$ y $F_{rly'}$: fuerzas longitudinales y laterales del neumático de la rueda izquierda;

$F_{rx'}$ y $F_{ry'}$: fuerza longitudinal y lateral ejercida sobre **C** por la rueda

$F_{ex'}$ y $F_{ey'}$: fuerzas longitudinales y laterales ejercidas sobre E por la herramienta (por ejemplo, un brazo robótico o una pinza)

τ_e : momento ejercido por la herramienta.

Las ecuaciones de fuerza y momento vienen dadas por:

$$\sum F_{x'} = m(\dot{u} - \bar{u}\omega) = F_{rlx'} + F_{rrx'} + F_{ex'} + F_{cx} \quad (1)$$

$$\sum F_{y'} = m(\dot{u} - \bar{u}\omega) = F_{rly'} + F_{rry'} + F_{ey'} + F_{cy} \quad (2)$$

$$\sum M_Z = I_z \dot{\omega} = \frac{d}{2}(F_{rrx'} - F_{rlx'}) - b(F_{rly'} + F_{rry'}) + (e - b)F_{ey'} + (c - b)F_{cy'} + \tau_e \quad (3)$$

m : masa del robot

I_z : momento de inercia del robot respecto al eje vertical situado en G .

La cinemática del punto h es:

$$\dot{x} = u \cos \psi - \bar{u} \sin \psi - (a - b)\omega \sin \psi \quad (5)$$

$$\dot{y} = u \sin \psi - \bar{u} \cos \psi - (a - b)\omega \cos \psi \quad (6)$$

Las velocidades u , ω y $\bar{u}$, incluida la velocidad de deslizamiento son:

$$u = \frac{1}{2}[r(\omega_r + \omega_l) + (u_r^s + u_l^s)] \quad (7)$$

$$\omega = \frac{1}{d}[r(\omega_r + \omega_l) + (u_r^s + u_l^s)] \quad (8)$$

$$\bar{u} = \frac{b}{d}[r(\omega_r + \omega_l) + (u_r^s + u_l^s)] + \bar{u}^s \quad (9)$$

r : es el radio de las ruedas

ω_r y ω_l : son las velocidades angulares

u_r^s y u_l^s : son las velocidades de deslizamiento longitudinal

$\bar{u}^s$: es la velocidad de deslizamiento lateral de las ruedas.

Los modelos de motor obtenidos sin considerar la tensión en las inductancias se expresan:

$$\tau_r = \frac{k_a(v_r - k_b\omega_r)}{R_a} \quad (10)$$

$$\tau_l = \frac{k_a(v_l - k_b\omega_l)}{R_a} \quad (11)$$

Donde:

v_r y v_l : son las tensiones de entrada aplicadas a los motores derecho e izquierdo

K_b : constante de tensión multiplicada por la relación de transmisión

R_a : constante de resistencia eléctrica;

τ_r y τ_l : pares de motor derecha e izquierda multiplicados por la relación de transmisión;

k_a : constante de par multiplicada por la relación de transmisión.

Las ecuaciones dinámicas de las ruedas motrices:

$$I_e \dot{\omega}_r + B_e \omega_r = \tau_r - F_{rr'} \dot{R}_t \quad (12)$$

$$I_e \dot{\omega}_l + B_e \omega_l = \tau_l - F_{rl'} \dot{R}_t \quad (13)$$

Siendo:

I_e : momento de inercia

B_e : Coeficiente de fricción viscoso del rotor combinado con los del motor, caja de cambios y rueda

R_t : radio nominal del neumático

La mayoría de los robots disponibles en el mercado tienen controladores de velocidad **PID** de nivel bajo para alcanzar las velocidades de referencia y no permiten que la tensión eléctrica con que se alimenta al motor sea aplicada directamente. Por lo tanto, es útil expresar el modelo de robot móvil de una manera adecuada considerando velocidades de referencia lineales y angulares como señales de control. Para este propósito, los controladores de velocidad se incluyen en el modelo. En ausencia de deslizamientos, el punto **B** sólo tiene una velocidad longitudinal u , de modo que, en general, esta velocidad se denominará velocidad lineal. Para simplificar el modelo, se han considerado los controladores de velocidad **PD** y se describen por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{PT}(u_{ref} - u_{me}) - k_{DT}\dot{u}_{me} \\ k_{PR}(\omega_{ref} - \omega_{me}) - k_{DR}\dot{\omega}_{me} \end{bmatrix} \quad (14)$$

En donde:

$$u_{me} = \frac{1}{2}[r(\omega_r + \omega_l)] \quad (15)$$

$$\omega_{me} = \frac{1}{d}[r(\omega_r - \omega_l)] \quad (16)$$

$$v_u = \frac{v_l + v_r}{2} \quad (17)$$

$$v_\omega = \frac{v_r - v_l}{2} \quad (18)$$

Las variables $\dot{u}_{rf}$ y $\dot{\omega}_{rf}$ pueden ser ignoradas en (14) para simplificar el modelo

De todas las ecuaciones anteriores, desde la (1) a la (18), se obtiene el **Modelo Dinámico del Robot Móvil**:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a \omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a \omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\bar{\theta}_3^0}{\bar{\theta}_1^0} \omega^2 - \frac{\bar{\theta}_4^0}{\bar{\theta}_1^0} u \\ \frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} u \omega - \frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\theta}_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\theta}_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (19)$$

Siendo los parámetros del modelo dinámico: (R. A., Scaglia, Mut, & di Sciascio, 2009)

$$\bar{\theta}_1^0 = \frac{\frac{R_a}{k_a} (m R_t r + 2 I_e) + 2 r k_{DT}}{2 r k_{PT}} \quad (20)$$

$$\bar{\theta}_2^0 = \frac{\frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2 R_t r (I_z + m b^2)) + 2 r d k_{DR}}{2 r k_{PR}} \quad (21)$$

$$\bar{\theta}_3^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} m b R_t}{2 k_{PT}} \quad (22)$$

$$\bar{\theta}_4^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} (\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e)}{2 k_{PT}} + 1 \quad (23)$$

$$\bar{\theta}_5^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} (m b R_t)}{d k_{PR}} \quad (24)$$

$$\bar{\theta}_6^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} (\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e) d}{2 r k_{PR}} + 1 \quad (25)$$

1.2.- DISEÑO DEL CONTROLADOR

El desplazamiento de un robot es gobernado por el sistema de control, el mismo que se basa en algoritmos estructurados en base a diferentes principios matemáticos. En el presente proyecto partiremos del método de interpolación lineal; por medio del cual se desarrollarán las acciones de control, las mismas que están ligadas a los parámetros k_v que influye en la velocidad lineal y el parámetro k_ω que influye en la velocidad angular. (Scaglia , Montoya, Mut , & di Sciascio, Numerical methods based controller design for mobile robots, 2008)

Al ser un requisito del sistema establecer límites máximos tanto para la velocidad lineal μ_{max} , como para la velocidad angular ω_{max} , estas velocidades se regulan variando los parámetros k_v y k_ω para lo cual se aplica el denominado método delta.

En base a estos dos métodos desarrollamos el algoritmo de control.

1.2.1.- INTERPOLACIÓN LINEAL

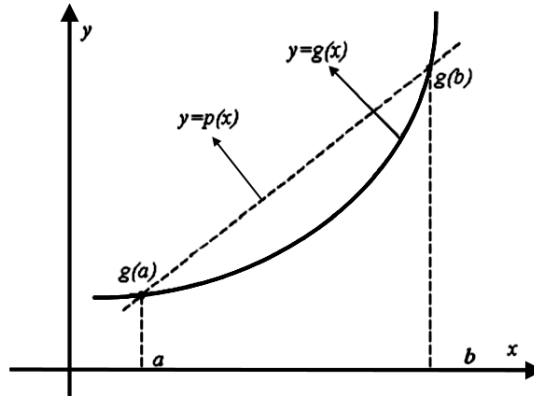


Fig. 2: Función $g(x)$ y la recta $y=p(x)$

La interpolación lineal (Scaglia, Rosales, Quintero, Mut, & Agarwal, A linear-interpolation-based controller design for trajectory tracking of mobile robots, 2010) es la base de muchos métodos numéricos. Consideremos la función no lineal $y=g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ entonces, una interpolación lineal es válida:

$$P(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a) + g(a) \quad (26)$$

El error de interpolación $e(x) = g(x) - p(x)$ es limitado y es validado por

$$|e(x)| \leq \frac{1}{2} |(x - a)(x - b)| \max_{a \leq x \leq b} |g''(x)| \quad (27)$$

Basándose en la continuidad y la suavidad de $g(x)$ y suponiendo un intervalo suficientemente pequeño $[a, b]$, se obtiene que el máximo de $g''(x)$ ocurre aproximadamente en el punto medio $x_m = 0.5(a + b)$, y si la segunda derivada permanece aproximadamente constante en el intervalo, entonces puede ser aproximada por $g''(x_m)$. En este trabajo, estos resultados se utilizarán para obtener el control para el seguimiento de referencia. Se describe a continuación la metodología utilizada.

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = f(y, t, u), \quad \text{con } y(0) = y_0 \quad (28)$$

Donde y representa la salida del sistema, u la acción de control y t el tiempo.

Los valores de $y(t)$ con el tiempo discreto $t=nT_0$, donde T_0 es el periodo de muestreo, que viene de la longitud de $[a, b]$, y $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ se denotará como y_n .

El valor de y_{n+1} se expresa:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} f(y, t, u) dt \quad (29)$$

Donde u permanece constante durante el intervalo $nT_0 \leq t \leq (n+1)T_0$. Por lo tanto, si se conoce de antemano la trayectoria deseada (denominada $yd(t)$), la trayectoria a seguir por $y(t)$, entonces y_{n+1} puede sustituirse por yd_{n+1} en (29) y considerando que el sistema evoluciona de acuerdo con la aproximación lineal $P(t)$ (véase la Fig. 3) y la ecuación (26), entonces es posible calcular u_n que representa la acción de control requerida para pasar del estado actual al deseado.

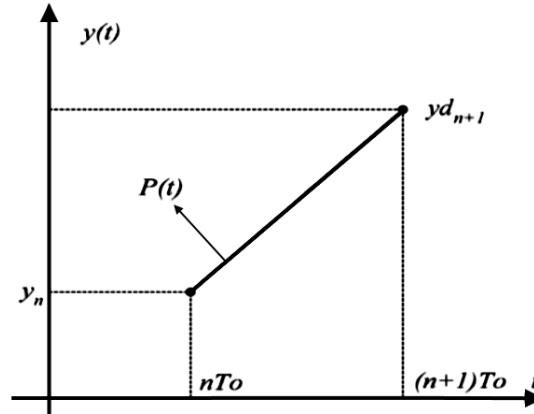


Fig. 3: Recta $y=P(t)$, aproximación lineal

$P(t)$ se define como una trayectoria del sistema desde la posición actual hasta la deseada en el siguiente tiempo de muestra, y usando interpolación lineal, se obtiene

$$P(t) = y_n + \frac{y_{d_{n+1}} - y_n}{T_0} (t - nT_0) \quad (30)$$

Esto ayudará a calcular la acción de control requerida para alcanzar el valor deseado, sustituyendo (30) en (29), se obtiene

$$y_{n+1} \approx y_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} f(p(t), t, u) dt \quad (31)$$

Finalmente, (31) se puede resolver para u , de tal manera que la distancia entre el estado actual y el deseado resulte mínima.



Fig. 4: Robot PIONEER 3DX

Fuente: Internet

La aproximación descrita en (31) se aplica a un modelo multivariable no lineal de un robot móvil (Fig. 4)

En este modelo multivariable no lineal, tomando las tres primeras ecuaciones del modelo expresado en el sistema matricial (19):

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos\psi - a\omega \sin\psi \\ \dot{y} = u \sin\psi - a\omega \cos\psi \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (32)$$

Considerando a (la distancia entre el centro de gravedad y el centro del eje), $a=0$, tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos\psi \\ \dot{y} = u \sin\psi \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (33)$$

La Fig. 5, corrobora estas estos planteamientos

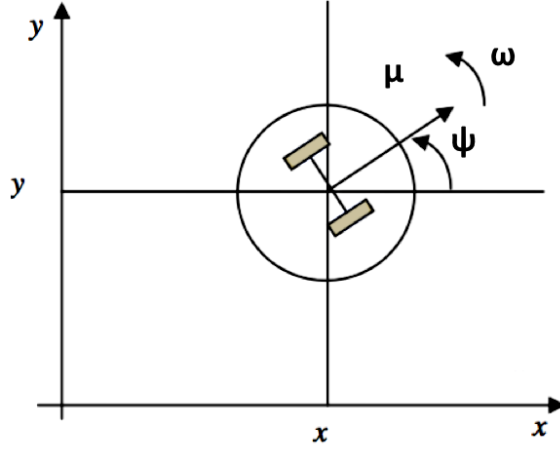


Fig. 5: Referencias para posiciones: cartesiana x, y ; angular ψ ; velocidades: lineal μ y angular ω

Donde u y ω son las velocidades lineales y angulares del robot móvil, respectivamente, x y y es la posición cartesiana y ψ es la orientación del robot móvil.

Entonces, el objetivo de este trabajo es encontrar los valores de u y ω , para que el robot móvil pueda seguir una trayectoria preestablecida.

Además, la trayectoria de referencia cumple:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ref} = u_{ref} \cos \psi_{ref} \\ \dot{y}_{ref} = u_{ref} \sin \psi_{ref} \\ \dot{\psi}_{ref} = \omega_{ref} \end{cases} \quad (34)$$

Donde u_{ref} y ω_{ref} son las velocidades lineales y angulares, respectivamente, usadas para generar la trayectoria de referencia que debe seguir el robot móvil. Las variables $x_{ref}(t)$, $y_{ref}(t)$ y $\psi_{ref}(t)$ son las posiciones y orientación que componen la trayectoria de referencia. De (34) y (31) se sigue:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u \cos \psi dt \\ y_{n+1} = y_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u \sin \psi dt \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} \omega dt \end{cases} \quad (35)$$

Donde u y ω permanecen constantes en el intervalo $nT_0 \leq t \leq (n+1)T_0$ e iguales a u_n y ω_n . La consideración de que las velocidades lineales y angulares se mantienen constantes durante cada tiempo de muestreo con discontinuidades para cada nT_0 no es real, porque las velocidades lineales y angulares de cualquier robot móvil cambian continuamente con el tiempo. Utilizando esta aproximación, se supone que la evolución de las variables de estado,

durante cada tiempo de muestreo, sigue una tendencia representada por una interpolación lineal. Entonces, para $t \in [nT_o, (n+1)T_o]$, es válido

$$\begin{cases} \psi(t) = \psi_n + \omega_n(t - nT_o) \\ \psi = \psi_n + \omega_n T_o \end{cases} \quad (36)$$

Sustituyendo (36) en (35) x puede ser representada:

$$x_{n+1} = x_n + u_n \int_{nT_o}^{(n+1)T_o} \cos[\psi_n + \omega_n(t - nT_o)] dt \quad (37)$$

En donde

$$\int_{nT_o}^{(n+1)T_o} \cos[\psi_n + \omega_n(t - nT_o)] dt = \frac{1}{\omega_n} \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\} \quad (38)$$

De (37) y (38) se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n + u_n \frac{1}{\omega_n} \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\} \quad (39)$$

Análogamente para y

$$y_{n+1} = y_n + u_n \frac{1}{\omega_n} \{\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}\} \quad (40)$$

Finalmente se logra la forma vectorial

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ \psi_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ \psi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n} \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\} & 0 \\ \frac{1}{\omega_n} \{\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}\} & 0 \\ 0 & T_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (41)$$

Observación. La Ecuación (41) permanece limitada cuando $\omega_n \rightarrow 0$. La expresión para x_{n+1} es analizada:

De (37) y (36):

$$x_{n+1} = x_n + u_n \frac{1}{\omega_n} \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\} = x_{n+1} = x_n + u_n \frac{T_o}{\psi_{n+1} - \psi_n} \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\} \quad (42)$$

entonces si $\omega_n \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega_n \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n} \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\} = \lim_{(\psi_{n+1} - \psi_n) \rightarrow 0} T_o \frac{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n}{\psi_{n+1} - \psi_n} = T_o \cos\psi_n \quad (43)$$

Obsérvese que cuando $\omega_n \rightarrow 0$ el término $1/\omega_n \{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n\}$ permanece acotado, de manera similar es demostrable que el término $1/\omega_n \{\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}\}$ también permanece limitado.

Puesto que el vector deseado $[\mathbf{x}_{ref_{n+1}} \ \mathbf{y}_{ref_{n+1}} \ \psi_{ref_{n+1}}]^T$ es conocido de antemano, puede sustituirse en lado izquierdo de (41) en lugar de $[\mathbf{x}_{ref_{n+1}} \ \mathbf{y}_{ref_{n+1}} \ \psi_{ref_{n+1}}]^T$ para calcular las señales de control $\mathbf{u}_n, \omega_n$ necesarios para el seguimiento de la trayectoria de movimiento.

$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{ref_{n+1}} - \mathbf{x}_n, \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_{ref_{n+1}} - \mathbf{y}_n, \Delta \psi = \psi_{ref_{n+1}} - \psi_n$, entonces, de (36)

$$\omega_n = \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{T_o} = \frac{\Delta \psi}{T_o} \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ref_{n+1}} - x_n \\ y_{ref_{n+1}} - y_n \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{T_o}} \sin \{ \sin \psi_{n+1} - \sin \psi_n \} \\ \frac{1}{\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{T_o}} \sin \{ \cos \psi_n - \sin \psi_{n+1} \} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{Haciendo } x = \mathbf{u}_n \quad b = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$A x = b \quad (46)$$

1.2.1.1.-Concepto de la variable sacrificada

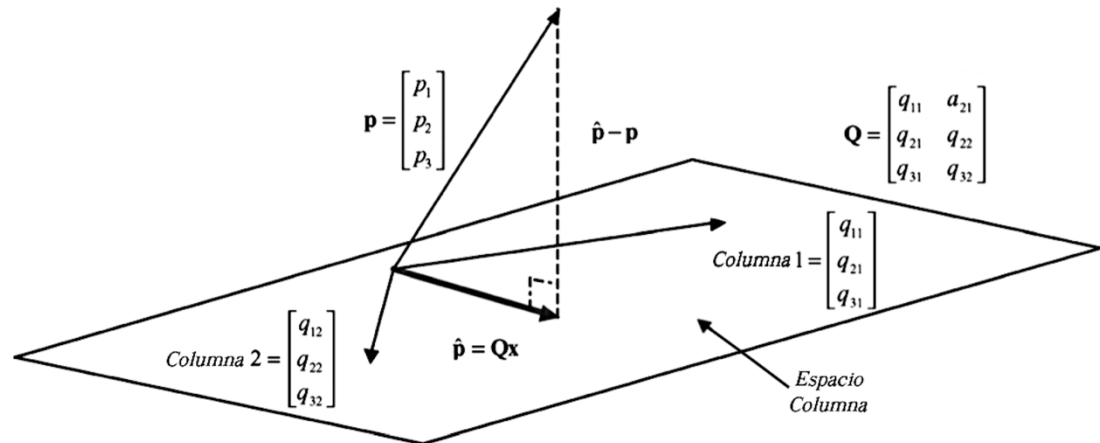


Fig. 6: Proyección del vector P de 3 dimensiones en el espacio columna de 2 dimensiones

-En el gráfico: vector $\vec{p}$ de componentes $[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]^T$ se proyecta en el espacio columna de $\mathbf{Q}$, obteniendo $\vec{p} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$, que ahora tiene 2 referentes (en $colum_1$ y $colum_2$, de *espacio columna*), con lo cual se “sacrificó” uno de los componentes- (R. A., Scaglia, Mut, & di Sciascio, 2009)

Para el presente caso, dada la ecuación matricial determinada previamente $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, la ecuación normal es aquella que minimiza la suma de las diferencias cuadráticas entre los lados izquierdo y derecho $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$

La solución de mínimos cuadrados a un sistema inconsistente $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ satisface $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Si las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ es invertible y $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

En álgebra lineal, el **espacio columna** de una matriz es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de sus vectores de columna.

El espacio de columna de una matriz $m \times n$ es un “**subespacio**” del espacio euclidiano de dimensión m .

La expresión (46) es un sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, esto es $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, cuya solución óptima por mínimos cuadrados es (Strong, 1980)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{AV}_n = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (47)$$

$$u_n = \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{(\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n)^2 + (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})^2} \left[\frac{\Delta x}{T_o} (\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n) + \frac{\Delta y}{T_o} (\cos\psi_n - \text{sen}\psi_{n+1}) \right] \quad (48)$$

En general, el sistema de ecuaciones (46) no tiene solución y (48) representa una aproximación, de acuerdo con los mínimos cuadrados.

Así que, para que (46) tenga una solución exacta, el término $\mathbf{b}$ debe pertenecer al **espacio columna** de $\mathbf{A}$ (**ECA**), donde **ECA** está finido por:

$$\text{ECA} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = kA, k \in \mathbb{R} \right\} \quad (49)$$

$\mathbb{R}$ Campo de números reales. Una base de ECA ($\mathbf{B}(\text{ECA})$) está dada por

$$\mathbf{B}(\text{ECA}) = \{V\} = \left\{ \begin{bmatrix} \text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n \\ \cos\psi_n - \cos\psi_{n+1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n)^2 (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})^2}} \right\} \quad (50)$$

Los componentes de $\mathbf{b}$ en el espacio columna de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{b}(\text{ECA})$) son:

$$b_{\text{ECA}} = (\mathbf{b}^T V)V = \frac{\Delta x (\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n) + \Delta y (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})}{(\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n)^2 (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})^2} \begin{bmatrix} (\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n) \\ (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (51)$$

Así que (46) tiene una solución exacta, si la condición $\mathbf{b}=\mathbf{b}_{\text{ECA}}$ se cumple, es decir

$$\frac{\Delta x(\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n) + \Delta y(\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})}{(\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n)^2(\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})^2} \begin{bmatrix} (\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n) \\ (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Delta x(\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n)^2 + \Delta y(\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})(\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n) \\ = \Delta x(\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n)^2 + (\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1})^2 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\Delta y(\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n) = \Delta x(\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}) \quad (54)$$

$$\frac{\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n}{\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (55)$$

El valor de ψ_{n+1} que satisface (55), se denominará $\psi_{ez_{n+1}}$ y representa la orientación móvil necesaria del robot, de modo que (46) tiene una solución exacta. De (41) $\psi_{ez_{n+1}}$ debe satisfacer

$$\begin{cases} \sin\psi_{n+1} = \frac{\omega_n}{u_n} \Delta x + \sin\psi_n \\ \cos\psi_{n+1} = \frac{\omega_n}{u_n} \Delta y + \cos\psi_n \end{cases} \quad (56)$$

Si ambos miembros están al cuadrado y se hace una adición, tenemos

$$\begin{aligned} (\sin\psi_{n+1})^2 + (\cos\psi_{n+1})^2 &= \left(\frac{\omega_n}{u_n} \Delta x\right)^2 + 2\frac{\omega_n}{u_n} \Delta x \sin\psi_n + (\sin\psi_n)^2 + \left(\frac{\omega_n}{u_n} \Delta y\right)^2 \\ &\quad + 2\frac{\omega_n}{u_n} \Delta y \cos\psi_n + (\cos\psi_n)^2 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\frac{\omega_n}{u_n} \left\{ \frac{\omega_n}{u_n} \Delta x^2 + 2\Delta x \sin\psi_n + \frac{\omega_n}{u_n} \Delta y^2 + 2\Delta y \cos\psi_n \right\} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\omega_n}{u_n} = \frac{2(\Delta y \cos\psi_n - \Delta x \sin\psi_n)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (59)$$

$$\psi_{ez_{n+1}} = \text{atan} \frac{\frac{\omega_n}{u_n} \Delta x + \sin\psi_n}{-\frac{\omega_n}{u_n} \Delta y + \cos\psi_n} \quad (60)$$

Se puede notar que (60) cumple (59).

Los errores x y y se definen como $e_{xn} = x_{ref_n} - x_n$, $e_{yn} = y_{ref_n} - y_n$ (los límites de los errores se demostrarán de manera posterior).

Para que el error tienda a cero definimos:

$$x_{ref_{n+1}} = x_{ref_n} - kv(x_{ref_n} - x_n) \quad (61)$$

$$e_{xn} = xref_n - x_n \quad (62)$$

$$yref_{n+1} = yref_n - kv(yref_n - y_n) \quad (63)$$

$$e_{yn} = yref_n - y_n \quad (64)$$

Donde kv satisface $0 < kv < 1$.

Consistentemente, una expresión para el valor deseado de la orientación ψ_{dn+1} para alcanzar error de seguimiento nulo:

$$\psi_{ez_{n+1}} = \psi_{ez_n} - k\omega(\psi_{ez_n} - \psi_n) \quad (65)$$

$$e_{\psi n} = \psi_{ez_n} - \psi_n \quad (66)$$

Donde $k\omega$ satisface: $0 < k\omega < 1$ y ψ_{ez} representa la orientación deseada que permite al error de posición tender a cero.

De (44), (48), (60) - (65) el controlador propuesto para el robot móvil se da como

$$\begin{bmatrix} u_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi_{ez_n} - \psi_n}{a^2 + b^2} \left[\frac{\Delta x}{To} a + \frac{\Delta y}{To} b \right] \\ \frac{\Delta \psi}{To} \end{bmatrix} \quad (67)$$

En donde:

$$a = \sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n \quad (68)$$

$$b = \cos\psi_n - \cos\psi_{n+1} \quad (69)$$

1.2.1.2.- Análisis de los límites de los parámetros kv y $k\omega$

Si el comportamiento del robot móvil es gobernado por (36), (39), (41), (Serrano, Scaglia, Cheein, Mut, & Ortiz, 2014) y el controlador está diseñado por (67), entonces, $\|e_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ cuando el posicionamiento ($Vref = 0$) y en la trayectoria se consideran los problemas de seguimiento ($0 < Vref < \infty$).

Tenemos:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{u_n}{\omega_n} \{\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n\} = x_n + u_n To \frac{\sin\psi_{n+1} - \sin\psi_n}{\psi_{n+1} - \psi_n} \quad (70)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{u_n}{\omega_n} \{\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}\} = y_n + u_n To \frac{\cos\psi_n - \cos\psi_{n+1}}{\psi_{n+1} - \psi_n} \quad (71)$$

Definiendo $f(\psi_{n+1})$ y aplicando la serie de Taylor

$$\begin{aligned}
 f(\psi_{n+1}) &= \frac{\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n}{\psi_{n+1} - \psi_n} \\
 &= f(\psi_{ez_{n+1}}) + \frac{df[\psi_{ez_{n+1}} + \xi(\psi_{n+1} - \psi_{ez_{n+1}})]}{\psi_{n+1} - \psi_n} (\psi_{n+1} - \psi_{ez_{n+1}}) \quad (72)
 \end{aligned}$$

Donde:

$$0 < \xi < 1 \quad (73)$$

$$\Psi = \psi_{ez_{n+1}} + \xi(\psi_{n+1} - \psi_{ez_{n+1}}) \quad (74)$$

$$\frac{df}{d\psi_{n+1}} = \frac{\cos\psi_{n+1}(\psi_{n+1} - \psi_n) - (\text{sen}\psi_{n+1} - \text{sen}\psi_n)}{(\psi_{n+1} - \psi_n)^2} \quad (75)$$

Si remplazamos (74) y (72) en (70) tenemos:

$$x_{n+1} = x_n + u_n T_o \left[\frac{\text{sen}\psi_{ez_{n+1}} - \text{sen}\psi_n}{\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n} + f'(\Psi)(\psi_{n+1} - \psi_{ez_n}) \right] \quad (76)$$

De (76) y (48) tenemos:

$$\begin{aligned}
 u_n T_o \frac{\text{sen}\psi_{ez_{n+1}} - \text{sen}\psi_n}{\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n} &= \frac{\psi_{ez_n} - \psi_n}{a^2 + b^2} \left[\frac{\Delta x}{T_o} a + \frac{\Delta y}{T_o} b \right] T_o \frac{\text{sen}\psi_{ez_{n+1}} - \text{sen}\psi_n}{\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n} \\
 &= \frac{\Delta x a^2 + \Delta y a b}{a^2 + b^2} \quad (77)
 \end{aligned}$$

$$\Delta x \frac{\omega_n}{u_n} = \text{sen}\psi_{ez_{n+1}} - \text{sen}\psi_n = a \quad (78)$$

$$\Delta y \frac{\omega_n}{u_n} = \cos\psi_n - \cos\psi_{ez_{n-1}} = b \quad (79)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{b}{a} \quad (80)$$

$$\Delta y = \Delta x \frac{b}{a} \quad (81)$$

Sustituyendo (81) en (77)

$$\frac{\Delta x a^2 + \Delta y a b}{a^2 + b^2} = \frac{\Delta x a^2 + \Delta x b^2}{a^2 + b^2} = \Delta x \quad (82)$$

Remplazando en (76)

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x + u_n T_o f'(\Psi)(\psi_{n+1} - \psi_{ez_n}) \quad (83)$$

Si (61) es remplazada en (83)

$$x_{n+1} = xref_{n+1} - kv(xref_n - x_n) + u_n Tof'(\Psi)(\psi_{n+1} - \psi e z_n) \quad (84)$$

En (62), tenemos que $e_{xn} = xref_n - x_n$, entonces

$$ex_{n+1} - kvex_n + u_n Tof'(\Psi)(\psi_{n+1} - \psi e z_{n+1}) = 0 \quad (85)$$

Análogamente para y , partiendo de (64) $e_{yn} = yref_n - y_n$, lo que nos da:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta u_n To \frac{\cos \psi_n - \cos \psi_{n+1}}{\psi_{n+1} - \psi_n} \quad (86)$$

Definiendo:

$$g(\psi_{n+1}) = \frac{\cos \psi_n - \cos \psi_{n+1}}{\psi_{n+1} - \psi_n} \quad (87)$$

$$g(\psi_{n+1}) = g(\psi e z_{n+1}) + \frac{dg[\psi e z_{n+1} + \varepsilon(\psi_{n+1} - \psi e z_{n+1})]}{d\psi_{n+1}} \quad (88)$$

$$0 < \varepsilon < 1 \quad (89)$$

$$\Psi 1 = \psi e z_{n+1} + \varepsilon(\psi_{n+1} - \psi e z_{n+1}) \quad (90)$$

$$ey_{n+1} - kvey_n + u_n Tog'(\Psi 1)(\psi_{n+1} - \psi e z_{n+1}) = 0 \quad (91)$$

De (41), (44) y (65)

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \omega_0 To \quad (92)$$

$$\psi_{n+1} = \psi e z_n - kw(\psi e z_n - \psi_n) \quad (93)$$

$$e\psi_{n+1} - kwe\psi_n = 0 \quad (94)$$

De (91), (92) y (94)

$$\begin{bmatrix} ex_{n+1} \\ ey_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv & 0 \\ 0 & kv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ex_n \\ ey_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n Tof'(\Psi) \\ v_n Tog'(\Psi 1) \end{bmatrix} (\psi e z_{n+1} - \psi_{n+1}) \quad (95)$$

El último término de la suma es no lineal, haciendo el análisis de la caracterización no lineal:

$$u_n = \frac{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n)}{(\sin\psi_{ez_{n+1}} - \sin\psi_n)^2 + (\cos\psi_n - \cos\psi_{ez_{n+1}})^2} \left\{ \frac{\Delta x}{T_0} (\sin\psi_{ez_{n+1}} - \sin\psi_n) + \frac{\Delta y}{T_0} (\cos\psi_n - \cos\psi_{ez_{n+1}}) \right\} \quad (96)$$

$$T_0 u_n = \frac{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})}{a^2 + b^2} \{ [xref_{n+1} - kv(xref_n - x_n) - x_n]a + [yref_{n+1} - kv(yref_n - y_n) - y_n]b \} \quad (97)$$

Partiendo de (34) podemos expresar:

$$xref_{n+1} = xref_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \cos \psi ref \, dt \quad (98)$$

$$yref_{n+1} = yref_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \sin \psi ref \, dt \quad (99)$$

$$T_0 u_n = \frac{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})}{a^2 + b^2} \left\{ \left[xref_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \cos \psi ref \, dt - kv(xref_n - x_n) - x_n \right] a + \left[yref_n + \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \sin \psi ref \, dt - kv(yref_n - y_n) - y_n \right] b \right\} \quad (100)$$

$$T_0 u_n = \frac{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})}{a^2 + b^2} \left\{ \left[\int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \cos \psi ref \, dt + (1 - kv)(xref_n - x_n) \right] a + \left[\int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \sin \psi ref \, dt + (1 - kv)(yref_n - y_n) \right] b \right\} \quad (101)$$

$$T_0 u_n = \frac{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})}{a^2 + b^2} \left\{ \left[[(1 - kv)a \quad (1 - kv)b] \begin{bmatrix} ex_n \\ ey_n \end{bmatrix} \right] + a \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \cos \psi ref \, dt + b \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \sin \psi ref \, dt \right\} \quad (102)$$

Si multiplicamos y dividimos por $(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n)$, nos dará

$$T_0 u_n = \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n)^2}} \left\{ \left[\begin{bmatrix} (1 - kv)a & (1 - kv)b \\ \psi_{ez_{n+1}} - \psi_n & \psi_{ez_{n+1}} - \psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ex_n \\ ey_n \end{bmatrix} \right] + \frac{a}{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})} \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \cos \psi ref \, dt + \frac{b}{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})} \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} uref \sin \psi ref \, dt \right\} \quad (103)$$

$$\lim_{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n) \rightarrow 0} \frac{a}{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})} = \cos \psi_n \quad (104)$$

$$\lim_{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n) \rightarrow 0} \frac{b}{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})} = \sin \psi_n \quad (105)$$

Lo cual implica que:

$$\lim_{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n) \rightarrow 0} \frac{a^2 + b^2}{(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_{n+1})} = 1 \quad (106)$$

Entonces el término $T_0 u_n$ es ligado a:

$$\begin{aligned} \lim_{(\Psi - \psi_n) \rightarrow 0} f'(\Psi) &= \lim_{(\Psi - \psi_n) \rightarrow 0} \frac{\cos \Psi (\Psi - \psi_n) - (\sin \Psi - \sin \psi_n)}{(\Psi - \psi_n)^2} \\ &= \lim_{(\Psi - \psi_n) \rightarrow 0} \frac{\cos \Psi}{(\Psi - \psi_n)} - \lim_{(\Psi - \psi_n) \rightarrow 0} \frac{(\sin \Psi - \sin \psi_n)}{(\Psi - \psi_n)} \frac{1}{(\Psi - \psi_n)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (107)$$

De manera similar puede ser probado que el término $T_0 u_n g'(\Psi)$ está también ligado a $(\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n) \rightarrow 0$, tiende a cero.

Si se considera el problema de posicionamiento el valor de $\mathbf{u}_{ref} = \mathbf{0}$. Luego, utilizando (Agarwal, 2000, Teorema 5.3.1, Capítulo 5, página 248) se cumple que $\|\mathbf{e}_n\| \rightarrow \mathbf{0}$, con $n \rightarrow \infty$

Si se considera el problema de seguimiento de trayectoria para $\mathbf{u}_{ref} \neq \mathbf{0}$, con $\|\mathbf{e}_n\| \rightarrow \mathbf{0}$ y con $n \rightarrow \infty$, tenemos de (95)

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} u_n \text{to} f'(\Psi) \\ u_n \text{to} g'(\Psi) \end{array} \right] &= \\ \left[\begin{array}{c} f'(\Psi) \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} \left\{ [(1 - kv)a \ (1 - kw)b] \begin{bmatrix} ex_n \\ ey_n \end{bmatrix} + a \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u_{ref} \cos \psi_{ref} dt + b \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u_{ref} \sin \psi_{ref} dt \right\} \\ g'(\Psi) \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} \left\{ [(1 - kv)a \ (1 - kw)b] \begin{bmatrix} ex_n \\ ey_n \end{bmatrix} + a \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u_{ref} \cos \psi_{ref} dt + a \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u_{ref} \sin \psi_{ref} dt \right\} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (108)$$

A partir de (95) podemos se expresar:

$$u_{n+1} = \mathbf{A}u_n + \mathbf{B}_n u_n + \mathbf{P}_n \quad (109)$$

En la cual:

$$u_n = \begin{bmatrix} ex_n \\ ey_n \end{bmatrix} \quad (110)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} kv & 0 \\ 0 & kv \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$B_n = \begin{bmatrix} f'(\Psi) \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} (1 - kv)a & f'(\Psi) \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} (1 - kv)b \\ g'(\Psi) \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} (1 - kv)a & g'(\Psi) \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} (1 - kv)b \end{bmatrix} e\psi_{n+1} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &= \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} \left(a \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u_{ref} \cos \psi_{ref} dt + b \int_{nT_0}^{(n+1)T_0} u_{ref} \sin \psi_{ref} dt \right) \begin{bmatrix} f'(\psi) \\ g'(\psi) \end{bmatrix} e\psi_{n+1} \\ &= \begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \end{bmatrix} e\psi_{n+1} \end{aligned} \quad (113)$$

$\mathbf{B}_n$ y $\mathbf{P}_n$ son limitados, y además es cierto que $\mathbf{B}_n, \mathbf{P}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ debido a que $\lim_{n \rightarrow \infty} e\psi_n = 0$

$$u_n = \mathbf{A}^n u_0 + \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} [\mathbf{B}_{l-1} u_{l-1} + \mathbf{P}_{l-1}] \quad (114)$$

$$u_n = \mathbf{A}^n u_0 + \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{B}_{l-1} u_{l-1} + \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{P}_{l-1} \quad (115)$$

$$\|u_n\| \leq \left\| \mathbf{A}^n u_0 \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{B}_{l-1} u_{l-1} \right\| + \left\| \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{P}_{l-1} \right\| \quad (116)$$

$$\|u_n\| \leq c_0 [\delta(1 + c_2)]^{n-k_1} + \left\| \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{P}_{l-1} \right\| \quad (117)$$

$$\left\| \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{P}_{l-1} \right\| \leq \max \sqrt{\mathbf{P}_{1n}^2 + \mathbf{P}_{2n}^2} |e\psi_0| \left\| \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} k\omega^{l-1} \right\| \quad (118)$$

$e\psi_0$ es el error del ángulo inicial y $0 < k\omega < 1$

Podemos elegir $\delta(1 + c_2) < 1$, (Agarwal, 2000, (Teorema 5.2.3, páginas 240-241)), aplicando el Lemma de Toeplitz, (Agarwal, 2000, página 628), es cierto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \mathbf{A}^{n-l} k\omega^{l-1} = 0 \quad (119)$$

De (117), (118) y (119), tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0 \quad (120)$$

1.2.1.3.- Análisis de la variación de los parámetros de referencia

Se presenta una metodología para encontrar los parámetros del controlador, de modo que las acciones de control no excedan el máximo permitido y los errores de seguimiento tiendan a cero (Scaglia, Serrano, Rosales, & Albertos, Linear interpolation based controller design for trajectory tracking under uncertainties: Application to mobile robots, 2015)

Partiendo de la ecuación (67)

$$\begin{bmatrix} V_n \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi_{ez_{n+1}} - \psi_n}{a^2 + b^2} \left[\frac{\Delta x}{T_o} a + \frac{\Delta y}{T_o} b \right] \\ \frac{\Delta \psi}{T_o} \end{bmatrix}$$

y de la ecuación (55)

$$\frac{\sin \psi_{n+1} - \sin \psi_n}{\cos \psi_n - \cos \psi_{n+1}} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Además, se puede aplicar el límite de:

$$\lim_{kv \rightarrow 1^-} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{kv \rightarrow 1^-} \frac{xref_{n+1} - kv(xref_n - x_n) - x_n}{yref_{n+1} - kv(yref_n - y_n) - y_n} = \frac{xref_{n+1} - xref_n}{yref_{n+1} - yref_n} \quad (121)$$

La trayectoria es continua, es decir, $xref(t)$ y $yref(t)$ son funciones continuas, dividiendo (55) para $\psi_{n+1} - \psi_n$ y sustituyendo (121)

$$\frac{\frac{\sin \psi_{n+1} - \sin \psi_n}{\psi_{n+1} - \psi_n}}{\frac{\cos \psi_n - \cos \psi_{n+1}}{\psi_{n+1} - \psi_n}} = \frac{xref_{n+1} - xref_n}{yref_{n+1} - yref_n} \quad (122)$$

De (104) y (105) y Aplicando el límite

$$\lim_{\Delta \psi \rightarrow 0} \frac{\cos \psi_{ez_n}}{\sin \psi_{ez_n}} = \frac{xref_{n+1} - xref_n}{yref_{n+1} - yref_n} \Rightarrow \psi_{ez_n} \rightarrow \psi_{ref_n} \quad (123)$$

En la segunda fila de la ecuación de (67) sustituyendo (65)

$$\lim_{k\omega \rightarrow 1^-} \omega_n = \frac{\psi_{ez_{n+1}} - k\omega(\psi_{ez_n} - \psi_n) - \psi_n}{T_o} = \frac{\psi_{ez_n} - \psi_{ref_n}}{T_o} \quad (122)$$

Por (123)

$$\lim_{k\omega \rightarrow 1^-} \omega_n = \frac{\psi_{ref_{n+1}} - \psi_{ref_n}}{T_o}$$

Es decir, con $\mathbf{kv} \rightarrow \mathbf{1}^*$ y $\mathbf{k\omega} \rightarrow \mathbf{1}^* \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega_{ref}$ y $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{uref}$

Lo último demuestra que un valor, por debajo pero cercano a 1, de los parámetros ($\mathbf{kv}$ y $\mathbf{k\omega}$) hace que las velocidades reales del robot sean cercanas a las utilizadas para generar la trayectoria y el error de seguimiento que converja a cero.

1.2.2.- MÉTODO DELTA

En el desarrollo del método de interpolación lineal se pudo concluir, que cuando $\mathbf{kv} \rightarrow \mathbf{1}^*$ y $\mathbf{k\omega} \rightarrow \mathbf{1}^*$, implica necesariamente que $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{uref}_n$ y $\omega_n \rightarrow \omega_{ez_n}$; y que por lo tanto $|u_n| < u_{max}$ y que $|\omega_n| < \omega_{max}$, lo cual delimita la variación de $\mathbf{kv}$ y $\mathbf{k\omega}$ entre extremos máximos y mínimos de sus respectivos intervalos ($\mathbf{kv}_{min} \dots \mathbf{Kv}_{max}$) y ($\mathbf{k\omega}_{min} \dots \mathbf{K\omega}_{max}$), los mismo que son determinados de manera experimental en varias pruebas que se realizaron con el equipo y con el modelo matemático que se ha desarrollado.

A partir de estas condiciones, se desarrolla el algoritmo que nos permite calcular en cada período de muestreo los valores tanto de $\mathbf{kv}$, como de $\mathbf{k\omega}$ para que no se superen los límites máximos de las velocidades lineal y angular que permite el robot. (Serrano, Godoy, Mut, Ortiz, & Scaglia, 2016)

Para cada período de muestreo arrancamos el algoritmo con valores de $\mathbf{kv}$ y $\mathbf{k\omega}$ próximos a $\mathbf{1}^*$, las acciones de control procuran que los errores tanto de posición y orientación del robot sean mínimos, es decir tiendan a cero, además se debe cumplir que la velocidad tanto lineal, como angular, no saturen los límites establecidos; para aproximarse a los límites de saturación de las velocidades se van realizando pequeños decrementos denominados “delta” en los valores de $\mathbf{kv}$ y $\mathbf{k\omega}$, una vez encontrados los mejores valores, se determina las velocidades lineal y angular; y se calcula el desplazamiento. Se controla además que los límites de $\mathbf{kv}$ y $\mathbf{k\omega}$, se encuentren dentro de los límites de los intervalos ($\mathbf{kv}_{min} \dots \mathbf{Kv}_{max}$) y ($\mathbf{k\omega}_{min} \dots \mathbf{K\omega}_{max}$).

Este procedimiento se lo va realizando de manera secuencial para cada uno de los períodos de muestreo.

Las condiciones que se plantean garantizan que en cada período de muestreo siempre es factible una solución, se asegura además que los errores tienden a cero y que los valores de $\mathbf{kv}$ y $\mathbf{k\omega}$, están dentro de los límites establecidos

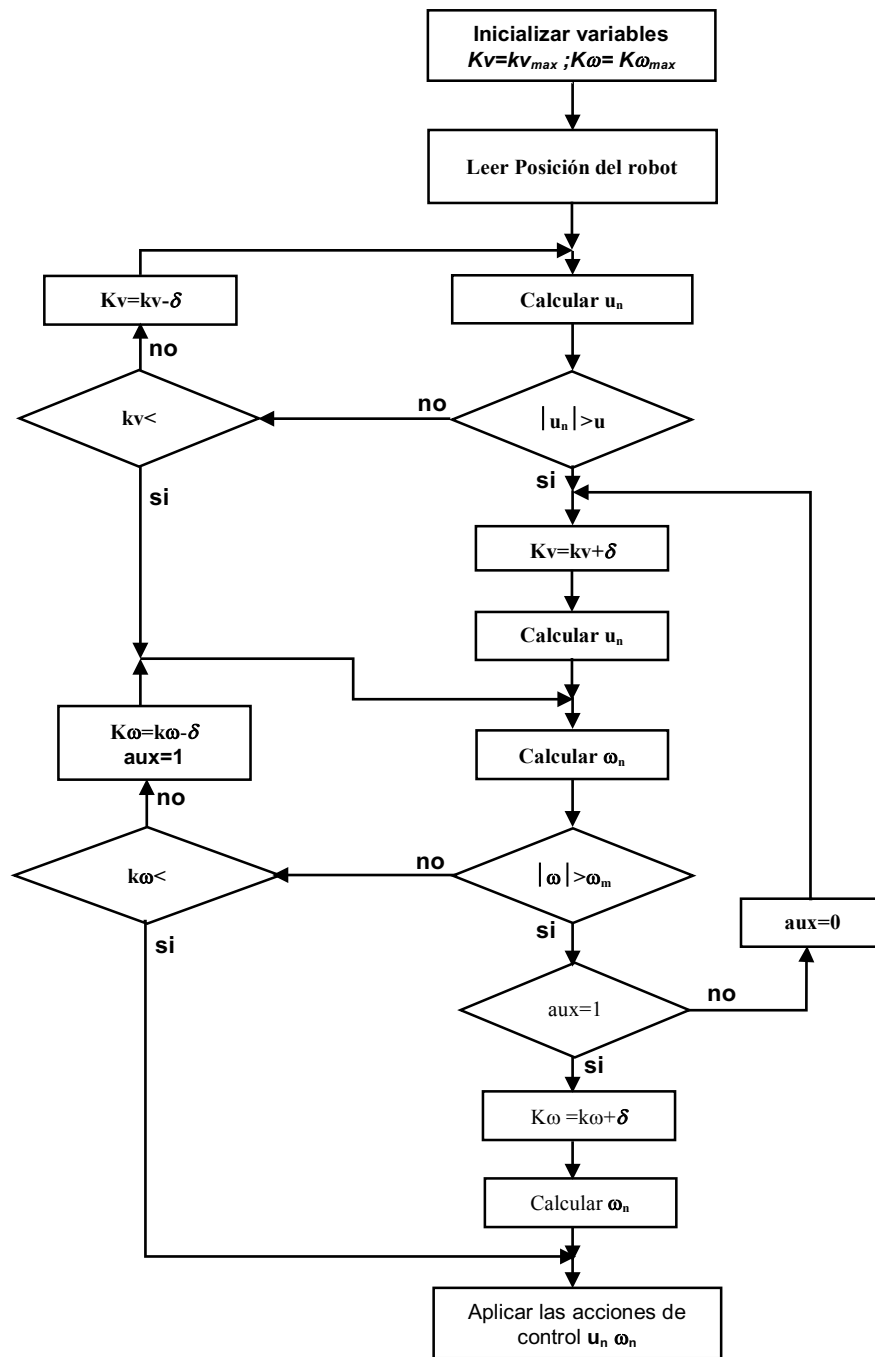


Fig. 6 Diagrama de flujo método delta

CAPÍTULO 2: SISTEMA DE CONTROL

Para el modelado se desarrolla un programa la planta y del controlador, con el fin de obtener las nuevas velocidades tanto lineal como angular, dirección y posición cartesiana del robot, además de los reportes sobre errores y variación de los parámetros.

2.- APLICACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO

En función de los antecedente y marco teórico desarrollado en el capítulo 1 se implementa el modelo, utilizado el programa MATLAB y la herramienta simulink, en el que se desarrollan tanto la simulación de la planta, como la programación del algoritmo de control; además se obtiene los reportes gráficos de las distintas trayectorias que se simulan, variación de las velocidades, posición relativa, errores y variación de los parámetros de control.

2.1.- ESTRUCTURACIÓN DE LA PLANTA

Partiendo las ecuaciones (19), del modelo dinámico del robot:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos\psi - a\omega \sin\psi \\ u \sin\psi + a\omega \cos\psi \\ \omega \\ \frac{\bar{\theta}_3^0}{\bar{\theta}_1^0} \omega^2 - \frac{\bar{\theta}_4^0}{\bar{\theta}_1^0} u \\ \frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} u \omega - \frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\theta}_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\theta}_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \bar{\delta}_u \\ \bar{\delta}_\omega \end{bmatrix} \quad (19)$$

En este caso en particular se utilizó un robot móvil PIONER 3DX, a través de una serie de experimentos realizados en el Instituto de Ingeniería Química de la Universidad de San Juan – Argentina, por el equipo del Dr. Gustavo Scaglia, se identificaron para el modelo dinámico los parámetros θ

De la ecuación (20)

$$\bar{\theta}_1^0 = \frac{\frac{R_a}{k_a} (mR_t r + 2I_e) + 2rk_{DT}}{2rk_{PT}} = 0.24089$$

De la ecuación (21)

$$\bar{\theta}_2^0 = \frac{\frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2R_t r (I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR}}{2rk_{PR}} = 0.2424$$

De la ecuación (22)

$$\bar{\theta}_3^0 = \frac{\frac{R_a}{k_a} mbR_t}{2k_{PT}} = -0.00093603$$

De la ecuación (23)

$$\bar{\theta}_4^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} (\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e)}{2k_{PT}} + 1 = 0.99629$$

De la ecuación (24)

$$\bar{\theta}_5^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} (mbR_t)}{dk_{PR}} = -0.0037256$$

De la ecuación (25)

$$\bar{\theta}_6^0 = \frac{\frac{R_a}{K_a} (\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e)d}{2rk_{PR}} + 1 = 1.0915$$

Con las ecuaciones del sistema y los datos anteriores se implementa el programa principal en el que se desarrollan las trayectorias de referencia y períodos de muestreo, además se en el programa se delimitan los valores y límites de la simulación.

Luego de realizar algunos experimentos con el robot en cuestión y partiendo de su límite de velocidad máxima se delimito los valores máximos y mínimos de ***kv*** y ***kω***

$$Kv_{max} = 0.999$$

$$kv_{min} = 0.9$$

$$K\omega_{max} = 0.999$$

$$k\omega_{min} = 0.9$$

$$\text{Decremento } \mathbf{\delta} = 0.002$$

$$\text{La velocidad máxima } \mathbf{u}_{max} = 0.55 \text{ m/s}$$

$$\text{La velocidad angular máxima } = \omega_{max} = 0.5 \text{ rad/s}$$

En base a los principios, funciones y datos antes mencionados se desarrolló el programa principal que se lo denomina "***inicirobotc.m***"

Acorde a las ecuaciones (19) y con los datos anteriores se desarrolla el modelo de la planta en simulik (**fig. 7**):

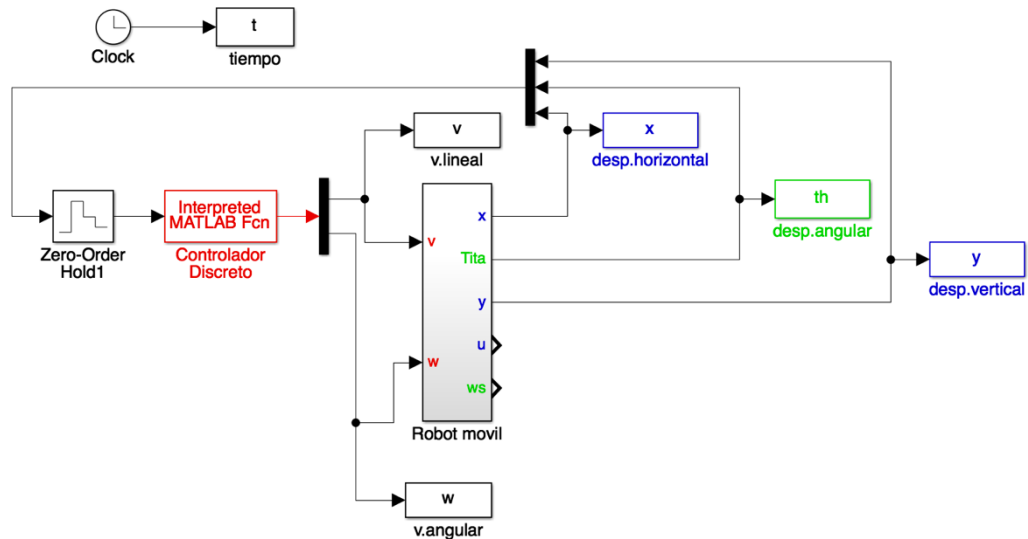


Fig. 7: Diseño en Simulink de la “máscara” para la planta para el robot PIONER 3DX

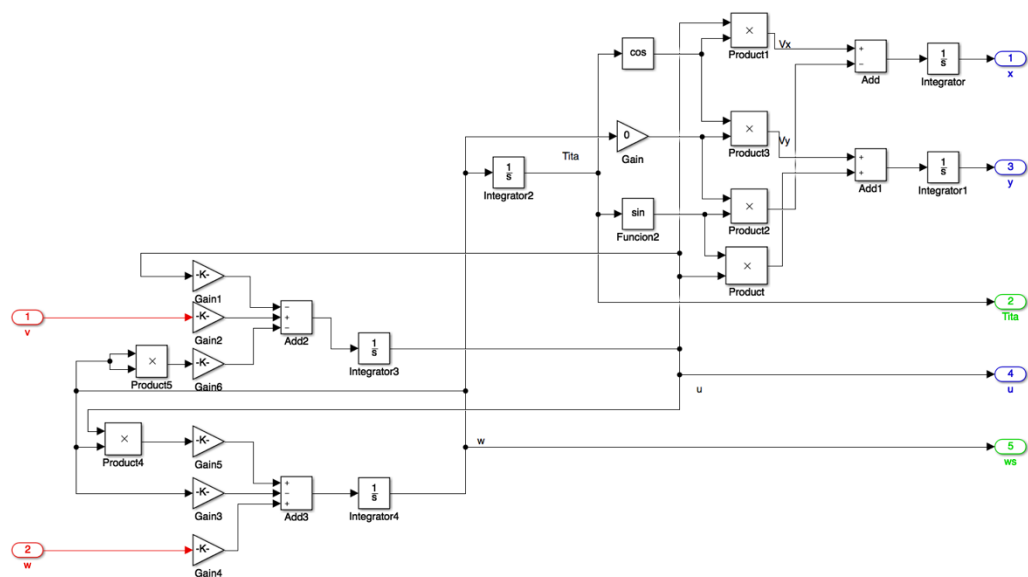


Fig. 8: Desarrollo de la máscara para la planta del robot PIONER 3DX

Se puede observar que el valor de “ a ” (distancia del centro de gravedad al centro del eje de la rueda es 0)

2.2.- ESTRUCTURACIÓN DEL CONTROLADOR

La Acción de Control, se desarrolló en base a los métodos de Interpolación Lineal y el método delta para control de la saturación de parámetros, partiendo de los trabajos realizados por el Dr. Emanuel Serrano y en base a lo expuesto en el capítulo 1, se desarrolló el algoritmo de control, el archivo se denomina “**controlador.m**”

2.3.- APLICACIÓN DEL MODELO

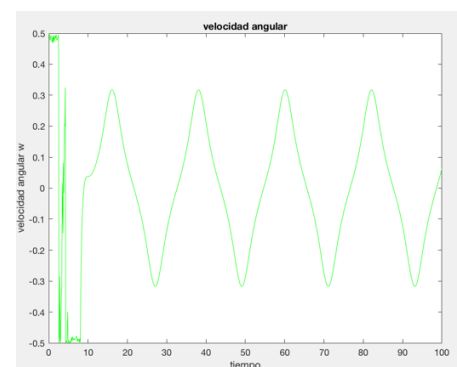
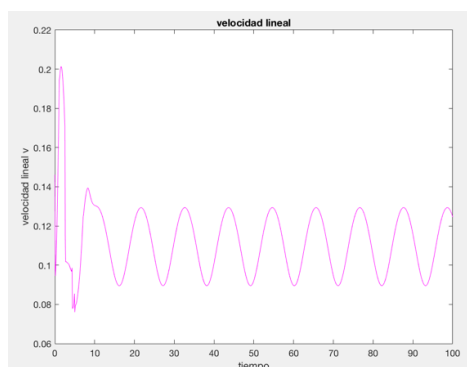
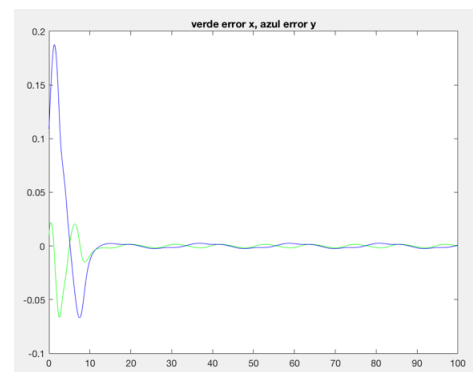
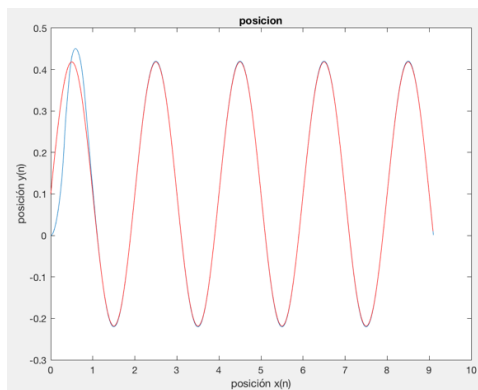
En base al modelo implementado se realizaron algunas simulaciones para diferentes trayectorias obteniéndose los siguientes resultados:

2.3.1.- TRAYECTORIA SENOIDAL

```

T0 = 0.1;%periodo de muestreo
Tf = 100;
t = 0:T0:Tf+2;
%Trayectoria senoidal
xref = t/11;
yref = 0.1+(1/pi)*sin(pi*t/11);
%limites de kv,kw y delta
kvmax=0.999;
kwmax=0.999;
kvmin=0.9;
kwmin=0.9;
delta=0.002;
vmax=0.55;% velocidad lineal maxima
wmax=0.5 ;% velocidad angular máxima
función coste C = 0.4051

```



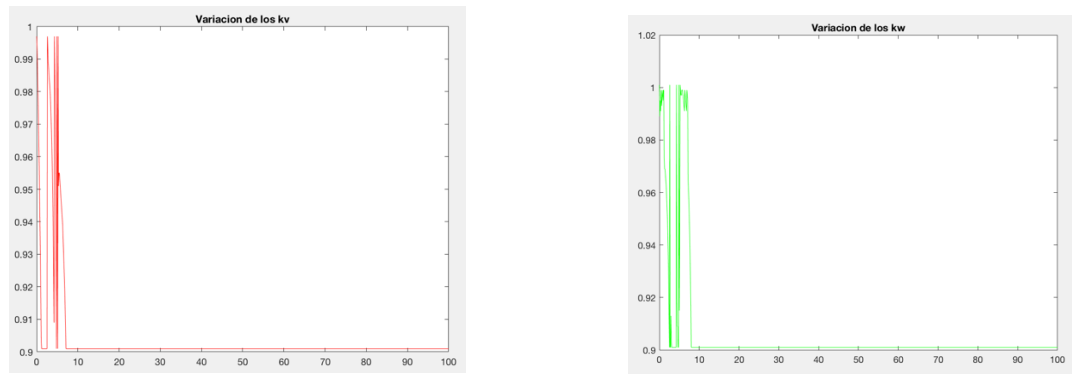


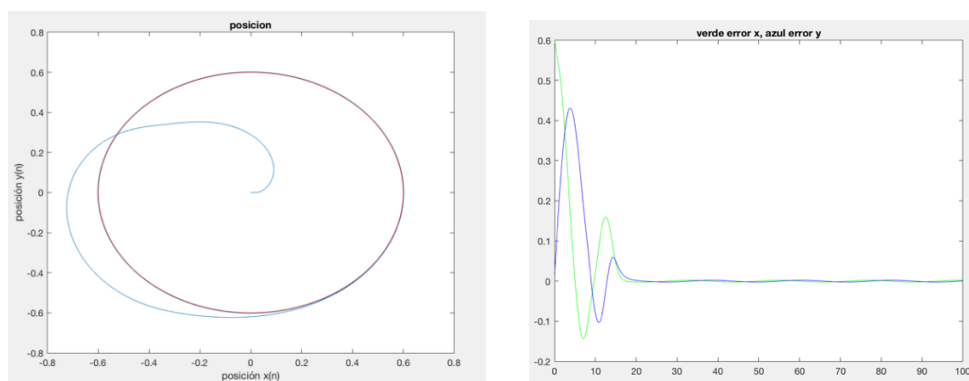
Fig. 9: Reportes de la simulación para una trayectoria senoidal

2.3.2.- TRAYECTORIA CIRCULAR

```

T0 = 0.1;%periodo de muestreo
Tf = 100;
t = 0:T0:Tf+2;
%Trayectoria circular
xref = 0.6*cos(pi*t/11);
yref = 0.6*sin(pi*t/11);
%limites de kv,kw y delta
kvmax=0.999;
kwmax=0.999;
kvmin=0.9;
kwmin=0.9;
delta=0.002;
vmax=0.55;% velocidad lineal maxima
wmax=0.5 ;% velocidad angular máxima
función coste C = 7.1579

```



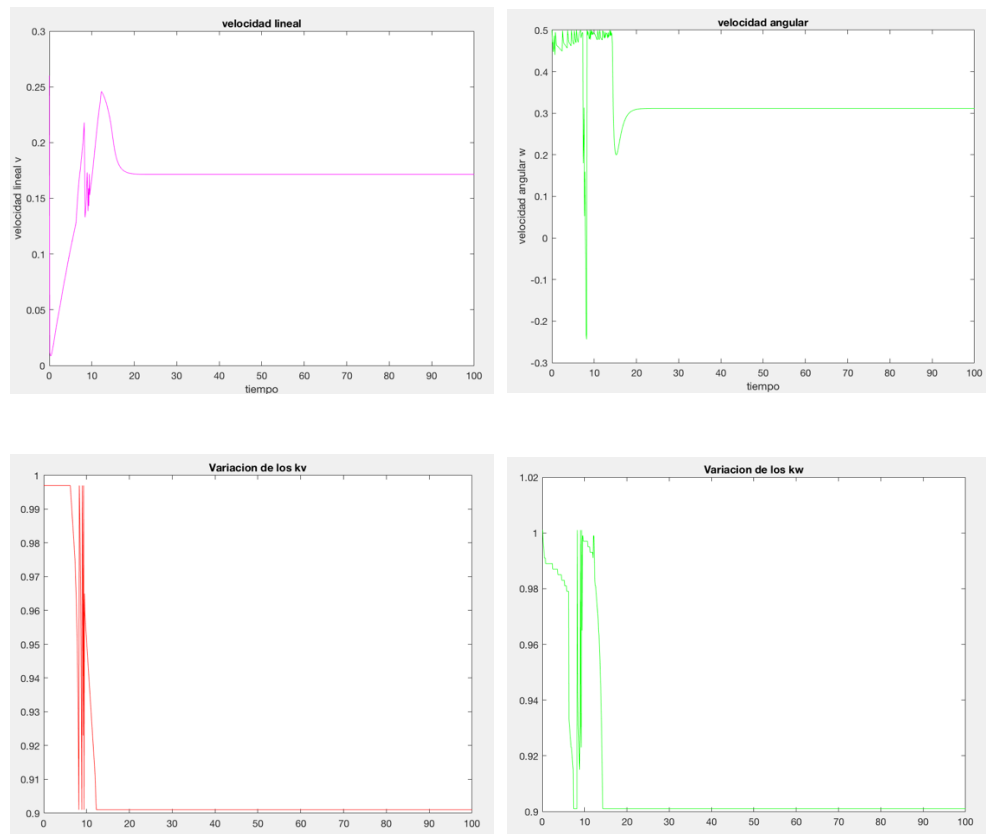


Fig. 10: Reportes de la simulación para una trayectoria Circular

2.3.2.- TRAYECTORIA EN “OCHO”

$T_0 = 0.1$; %periodo de muestreo

$T_f = 100$;

$t = 0:T_0:T_f+2$;

%trayectoria en 8

$x_{ref} = 0.5 \cdot \sin(0.82 \cdot \pi \cdot t / 11)$;

$y_{ref} = 0.5 \cdot \cos(0.41 \cdot \pi \cdot t / 11) - 0.5$;

%limites de kv, kw y delta

$k_{vmax} = 0.999$;

$k_{wmax} = 0.999$;

$k_{vmin} = 0.9$;

$k_{wmin} = 0.9$;

$\delta = 0.002$;

$v_{max} = 0.55$; % velocidad lineal maxima

$w_{max} = 0.5$; % velocidad angular máxima

función coste $C = 0.0845$

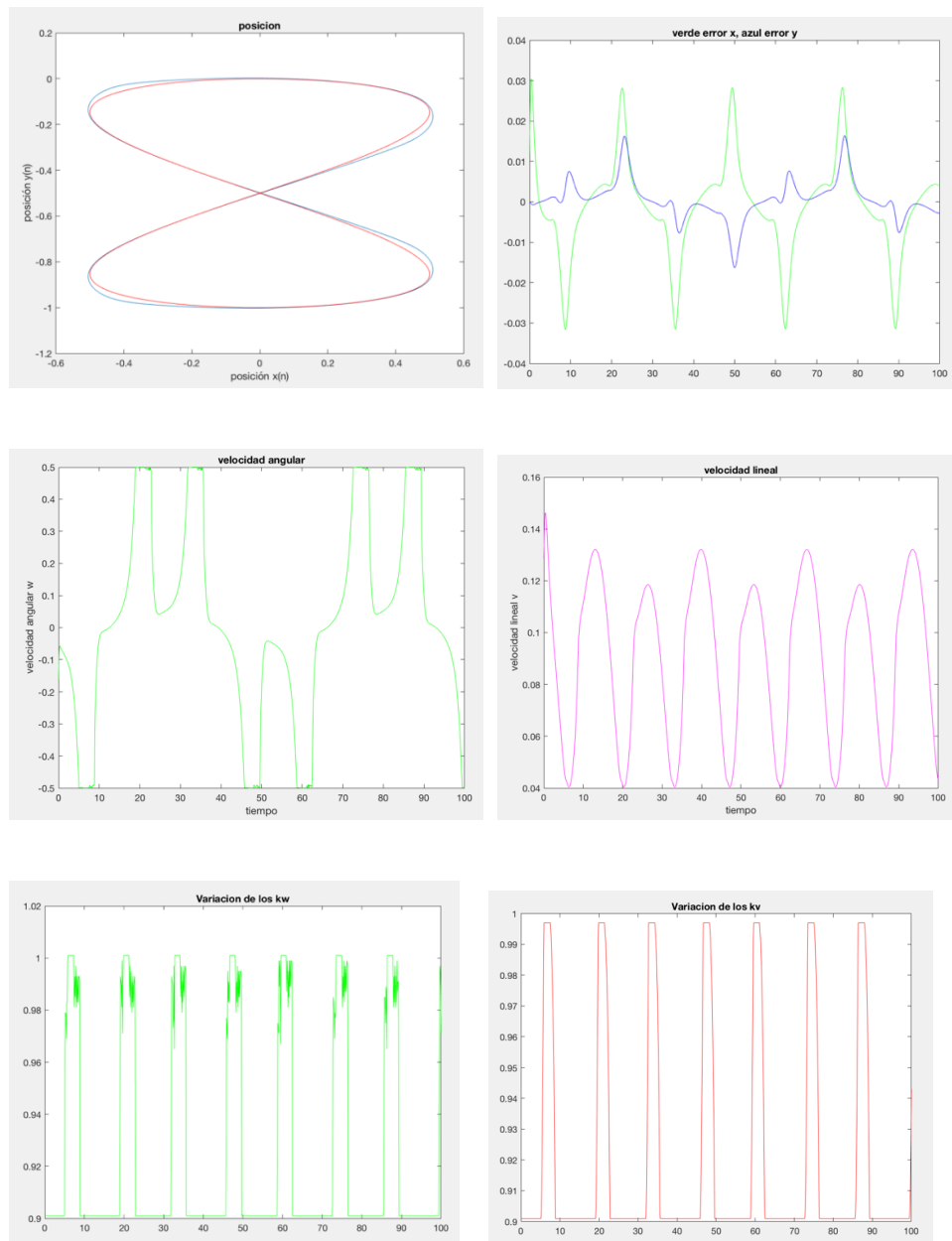


Fig. 11: Reportes de la simulación para una trayectoria en “ocho

El programa implementado entrega los reportes de la simulación, se desarrollaron rutinas que nos permiten graficar el seguimiento; graficar los errores tanto en el eje x , como en el eje y ; graficar la velocidad lineal y angular además de las variaciones de los parámetros k_v y k_w , todo esto nos permitirá analizar la calidad del sistema de control que se ha modelado, para lo cual se utilizarán diferentes trayectorias, análisis que se lo realiza en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS

Se realiza el estudio respectivo de los datos obtenidos en las pruebas de simulación y se analiza el comportamiento del modelo matemático desarrollado, cuidando que cumpla las condiciones iniciales y los objetivos planteados: alcanzar la trayectoria de referencia controlando la saturación de las velocidades en base a la regulación de los parámetros.

3.- ANÁLISIS DE RESULTADOS

El modelo será validado en base al análisis de las simulaciones que se realizaron para distintas trayectorias, se plantea una trayectoria sinusoidal, circular y en ocho. En todos los casos se utiliza el mismo período de muestreo T_0

$T_0 = 0.1$; %periodo de muestreo

Se plantea además un tiempo final de la muestra:

$T_f = 100$;

Se genera un vector de períodos de muestreo, tiempo t :

$t = 0:T_0:T_f+2$;

A partir de estos datos realizamos el análisis de comportamiento y respuestas del controlador para las trayectorias de prueba establecidas:

3.1.- ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PARA LA TRAYECTORIA SENIODAL

Esta trayectoria está delimitada por:

%Trayectoria senoidal

$x_{ref} = t/11$;

$y_{ref} = 0.1 + (1/\pi) \sin(\pi \cdot t/11)$;

%limites de kv,kw y delta

$k_{vmax} = 0.999$;

$k_{wmax} = 0.999$;

$k_{vmin} = 0.9$;

$k_{wmin} = 0.9$;

$\delta = 0.002$;

$v_{max} = 0.55$; % velocidad lineal máxima

wmax=0.5 ;% velocidad angular máxima

La cual nos da un valor muy bueno para la función de coste $c=0.4051$

3.1.1.- Seguimiento (Fig. 12):

Tiene una amplitud de $1/\pi = 0.318\text{m}$, además se levanta 0.1m en la trayectoria y , en el gráfico del seguimiento se puede apreciar, que el robot parte desde el origen, desfasado 0.1m en el eje y , con respecto a la referencia a seguir.

Se puede apreciar que converge muy rápidamente a la trayectoria de referencia, prácticamente al culminar el primer semiciclo.

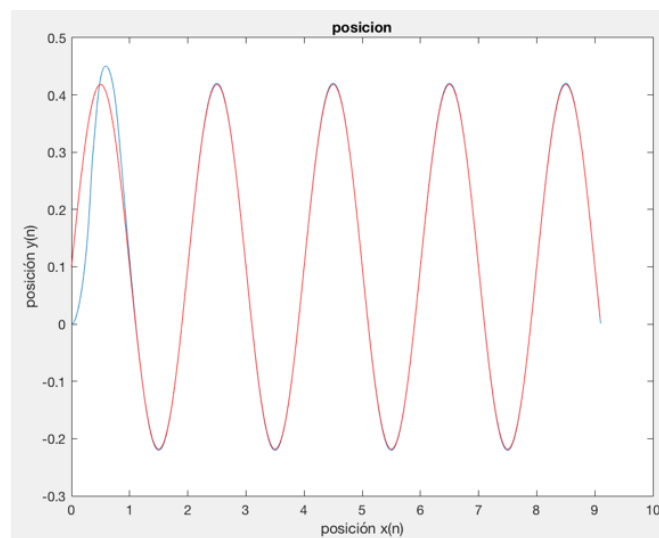


Fig. 12: Trayectoria senoidal, seguimiento: referencia en rojo, trayectoria del robot en azul

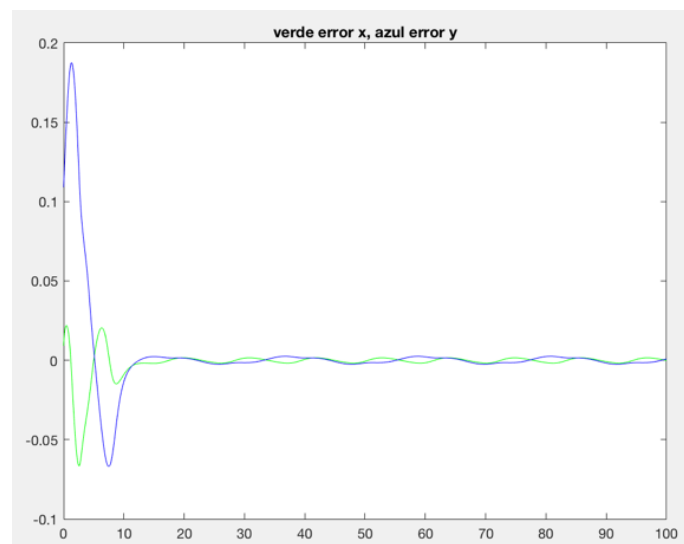


Fig. 13: Trayectoria senoidal, gráfico de los errores en x y errores en y

3.1.2.- Errores (Fig. 13):

Al revisar las gráficas de error tanto en el eje x, como en el eje y se puede apreciar que un período de tiempo muy corto los errores convergen a cero, por lo tanto, se puede concluir que el robot en los primeros 10 segundos prácticamente alcanza la trayectoria

3.1.3.- Velocidad lineal y velocidad angular (Fig. 14 y Fig. 15)

Con respecto a las velocidades tanto lineal, como angular podemos apreciar que nunca llegan a superar los valores máximos establecidos y conforme el sistema se estabiliza, las variaciones de las velocidades son en periodos acordes a la variación senoidal de la posición, llama la atención que en un principio las variaciones de la velocidad angular son muy altas, pero se estabilizan rápidamente.

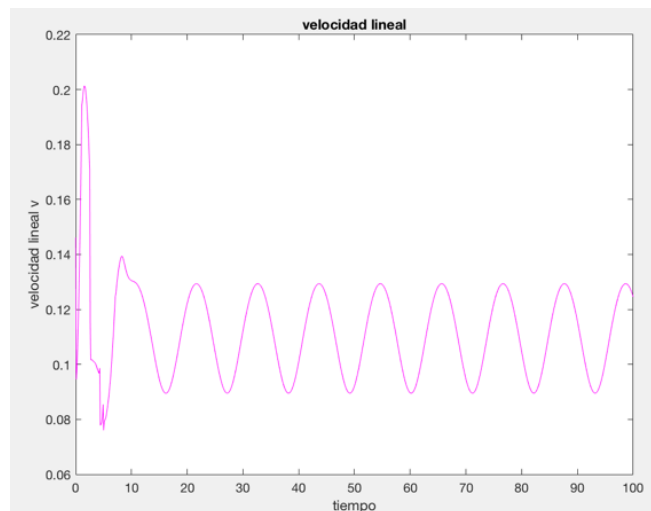


Fig. 14: Trayectoria senoidal, velocidad Lineal

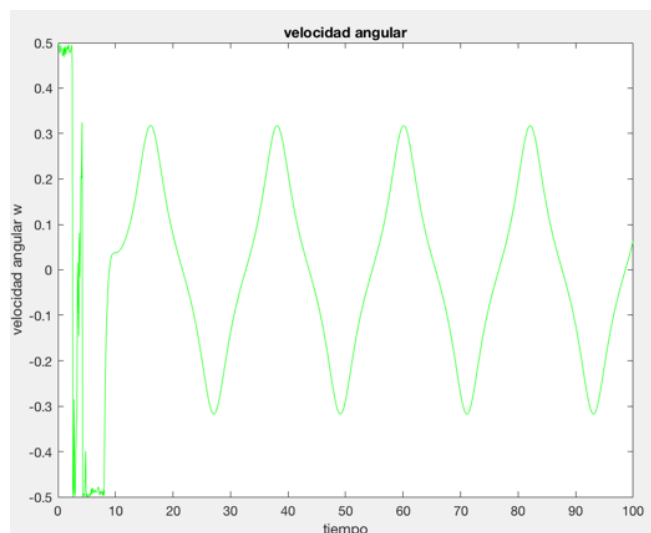


Fig. 15: Trayectoria senoidal, velocidad angular

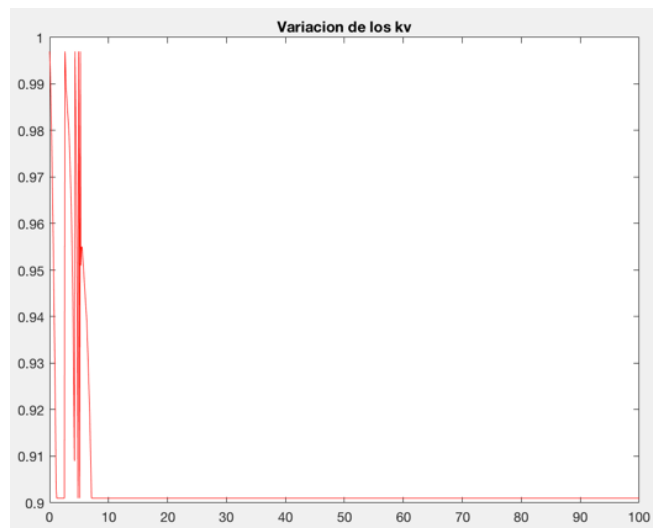


Fig. 16: Trayectoria senoidal, variación del parámetro k_v

3.1.4.- Variación de los parámetros k_v y k_ω (Fig. 16 y Fig. 17):

En lo referente a los valores de los parámetros k_v y k_ω , se puede apreciar claramente que estos valores siempre se encuentran entre los límites máximos y mínimos establecidos.

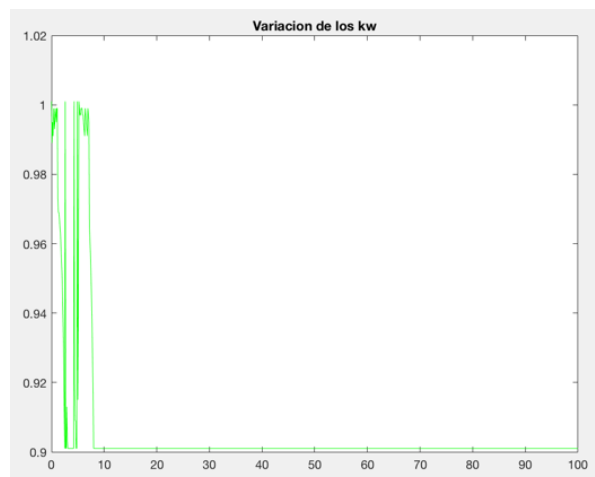


Fig. 17: Trayectoria senoidal, variación del parámetro k_ω

3.1.5.- Conclusión:

De la primera prueba realizada, se aprecia claramente que el controlador ejerce su función ya que el desplazamiento del robot converge rápidamente hacia la trayectoria de referencia, el algoritmo de control actúa de manera correcta sobre los parámetros con lo que se evita la saturación de las velocidades.

No se presentan problemas de transitorios, por lo que no se requieren atenuadores ni filtros. Concluyendo que el funcionamiento del controlador implementado es el adecuado.

3.2.- ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS PARA LA TRAYECTORIA CIRCULAR

Se plantea una trayectoria circular con un diámetro de 1.2 m, haciendo que el robot parta del centro de la circunferencia y trate de igualar la trayectoria que se da en el perímetro

```
%Trayectoria circular
xref = 0.6*cos(pi*t/11);
yref = 0.6*sin(pi*t/11);
%limites de kv,kw y delta
kvmax=0.999;
kwmax=0.999;
kvmin=0.9;
kwmin=0.9;
delta=0.002;
vmax=0.55;% velocidad lineal maxima
wmax=0.5 ;% velocidad angular máxima
```

En el presente caso se obtiene una función de coste $c=7.1579$

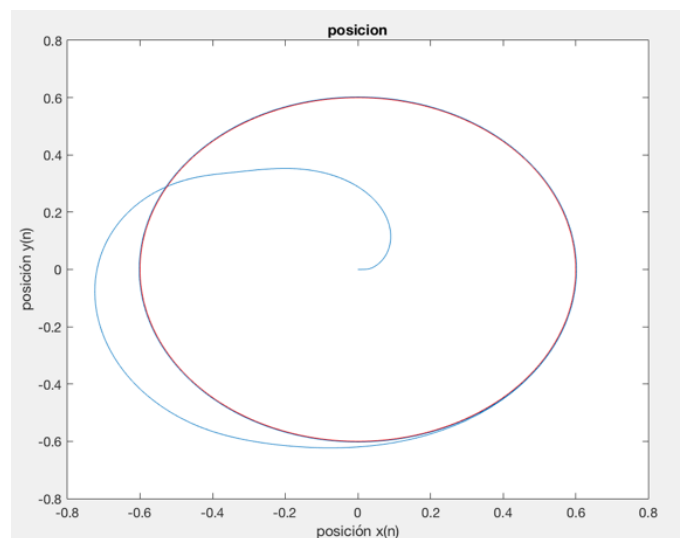


Fig. 18: Trayectoria circular, seguimiento: referencia en rojo, trayectoria del robot en azul

3.2.1.- Seguimiento (Fig. 18):

Se puede observar en la gráfica de seguimiento de la trayectoria de referencia (en rojo), como en un inicio el robot, (cuyo movimiento se representa en azul), parte de una posición que está muy alejada de la referencia, pero en el transcurso del tiempo esta se va acercando de una manera rápida, se aprecia además como en un momento sale de la trayectoria debido a la

inercia, pero retoma la orientación y empata de una forma relativamente rápida con la trayectoria deseada.

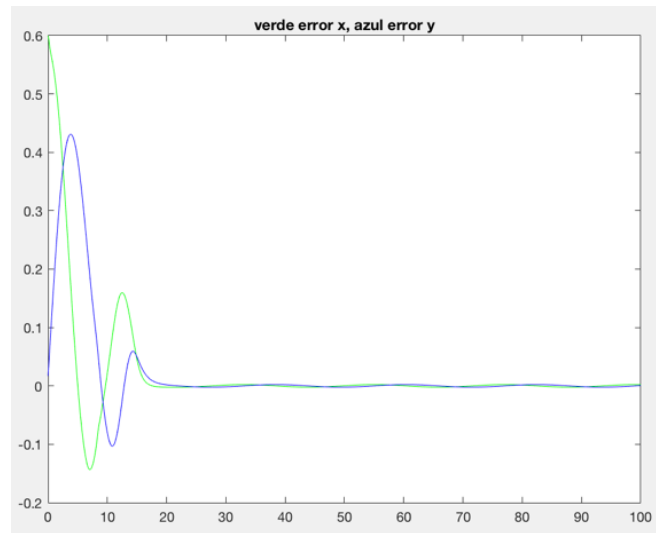


Fig. 19: Trayectoria circular, gráfico de los errores en x y errores en y

3.2.2.- Errores (Fig. 19):

En la Gráfica del error observamos como en los primeros períodos, las diferencias entre la posición del robot y la referencia son grandes, pero en el transcurso de un intervalo de tiempo relativamente corto estas van disminuyendo y converge hacia la trayectoria de referencia de una manera adecuada.

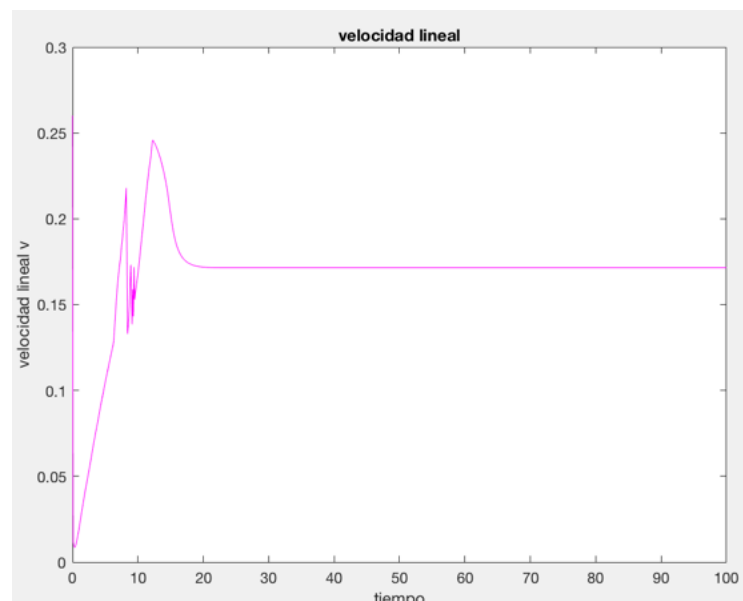


Fig. 20: Trayectoria circular, velocidad Lineal

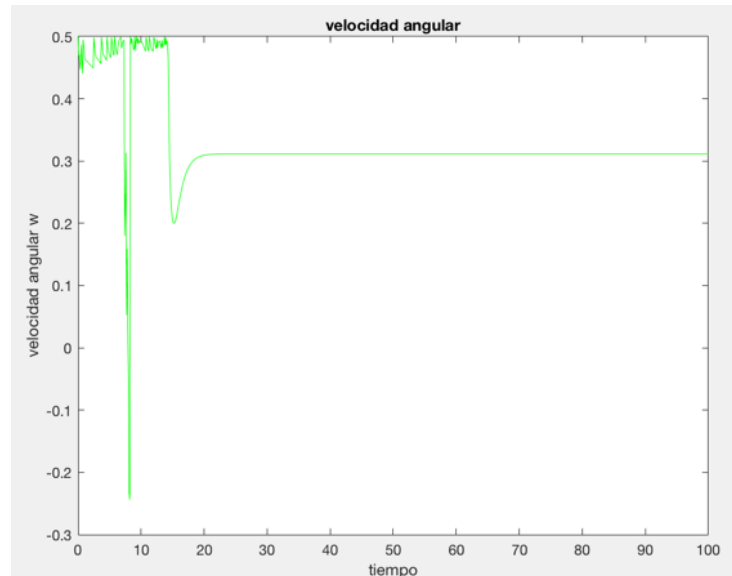


Fig. 21: Trayectoria circular, velocidad angular

3.2.3.- Velocidad lineal y velocidad angular (Fig. 20 y Fig. 21)

En un principio los valores de las velocidades son altos y próximos a los valores máximos, pero antes de los 20 segundos se van estabilizando, podemos apreciar de forma clara que las variaciones de las velocidades lineal y angular respetan los límites de saturación, y como es lógico una vez alcanzada la trayectoria de referencia estas se estabilizan en los valores que el sistema requiere.

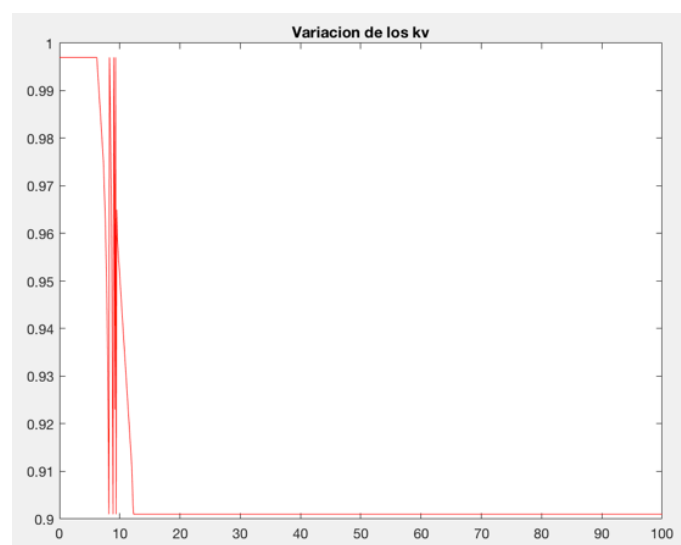


Fig. 22: Trayectoria circular, variación del parámetro kv

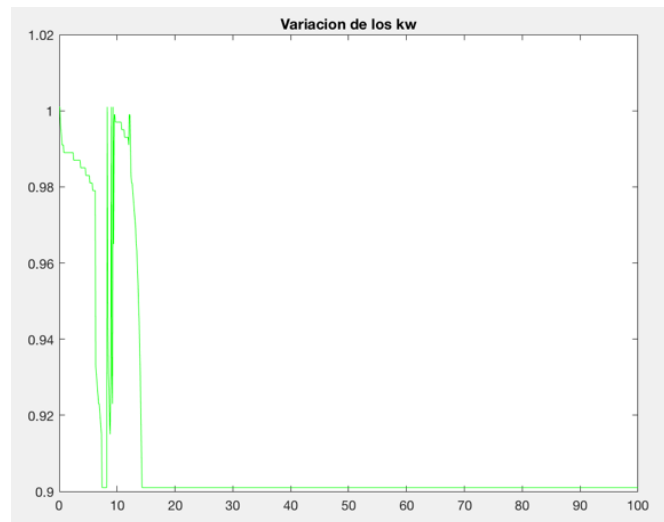


Fig. 23: Trayectoria circular, variación del parámetro $k\omega$

3.2.4.- Variación de los parámetros k_v y $k\omega$ (Fig. 22 y Fig. 23):

Para el caso de los valores de k_v y $k\omega$, se puede apreciar que los mismos están delimitados por sus extremos máximos y mínimos establecidos; y que estos ejercen una influencia correcta en el sistema de control de la saturación de las velocidades del robot.

3.2.5.- Conclusión:

Analizando el desarrollo de esta prueba, se concluye el correcto funcionamiento del controlador para trayectorias circulares, una rápida convergencia hacia la ruta deseada, las respuestas del sistema adecuadas para la acción de seguimiento sin saturar los límites de velocidad y los extremos de los intervalos de variación de los parámetros k_v y $k\omega$ no son superados, por lo que el funcionamiento del controlador resulta adecuado.

3.3.- TRAYECTORIA EN “OCHO”

Para concluir el proceso de simulación se plantea el seguimiento de una trayectoria denominada en “ocho”, para lo cual partimos de la siguiente trayectoria de referencia:

%trayectoria en 8

$x_{ref} = 0.5 \cdot \sin(0.82 \cdot \pi \cdot t / 11);$

$y_{ref} = 0.5 \cdot \cos(0.41 \cdot \pi \cdot t / 11) - 0.5;$

%límites de $k_v, k\omega$ y δ

$k_{vmax} = 0.999;$

$k_{\omega max} = 0.999;$

$k_{vmin} = 0.9;$

$k_{\omega min} = 0.9;$

$\delta = 0.002;$

$v_{max} = 0.55;$ *% velocidad lineal maxima*

wmax=0.5 ;% velocidad angular máxima

Al correr la simulación de esta trayectoria se obtiene la una función de coste $c= 0.0845$, que nos indica en parte un buen comportamiento del sistema de control.

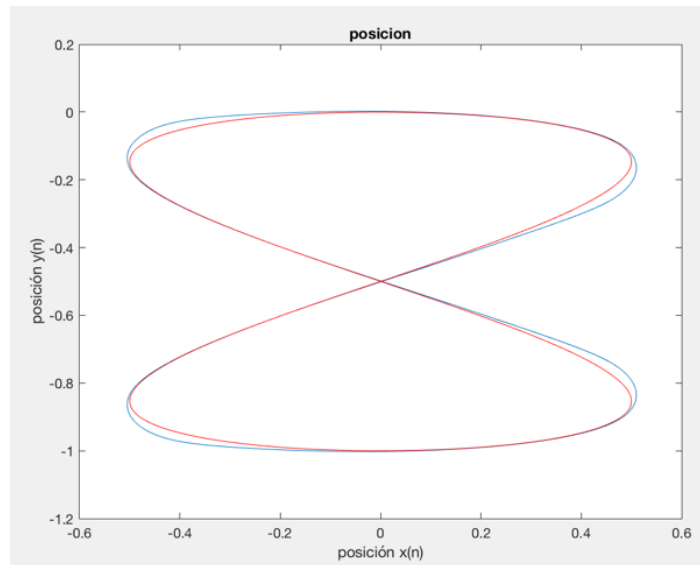


Fig. 24: Trayectoria en ocho, seguimiento: referencia en rojo, trayectoria del robot en azul

3.3.1.- Seguimiento (Fig. 24):

Como se puede apreciar en el gráfico de la trayectoria, si bien parten casi juntos, el seguimiento se da prácticamente en fase, hay alguna separación de la trayectoria que posiblemente se producen por la inercia del sistema, pero la acción de control resulta correcta y adecuada.

3.3.2.- Errores (Fig. 25):

En los reportes de los errores de posición tanto en x , como en y , resultan oscilantes debido a los cambios de dirección y la inercia del sistema, pero son de muy bajo valor y su incidencia en el proceso de seguimiento es mínima.

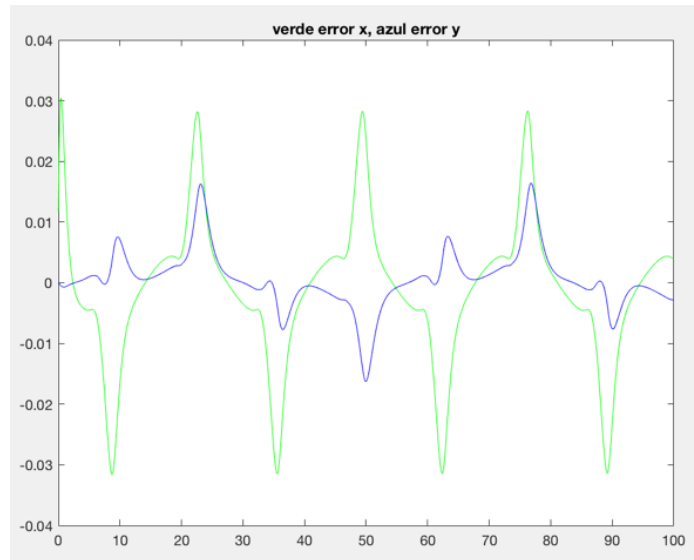


Fig. 25: Trayectoria en ocho, gráfico de los errores en x y errores en y

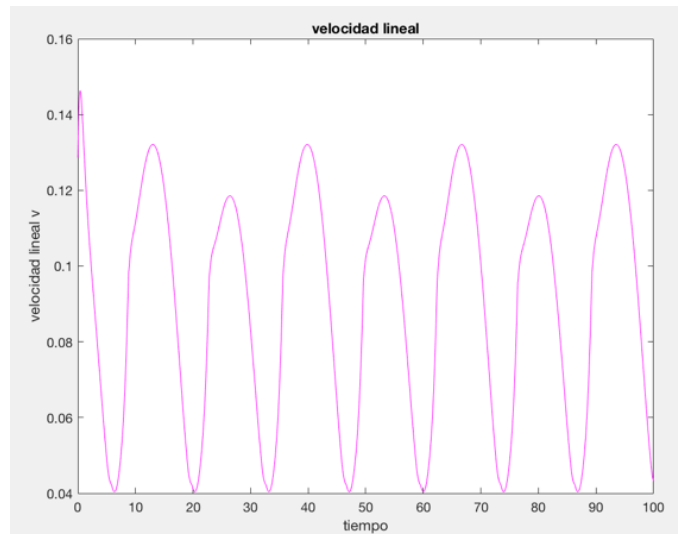


Fig. 26: Trayectoria en ocho, velocidad lineal

3.3.3.- Velocidad lineal y velocidad angular (Fig. 26 y Fig. 27):

Para el caso de las velocidades, se puede apreciar como en determinados momentos, si bien la velocidad angular llega a su límite máximo luego en los cambios de sentido esta disminuye, no así la lineal que se encuentra en límites bajos con respecto a la velocidad de saturación, las fluctuaciones en la velocidad angular son debidas a los cambios de dirección que experimenta el robot al seguir los ciclos opuestos que se presentan en esta trayectoria.

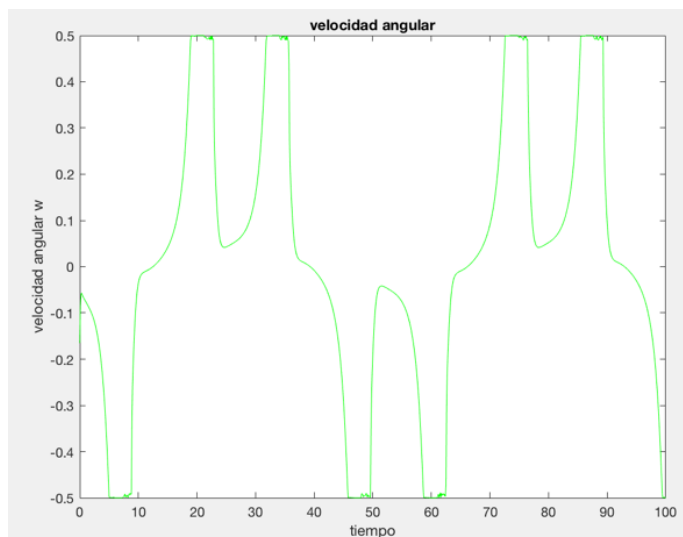


Fig. 27: Trayectoria en ocho, velocidad angular

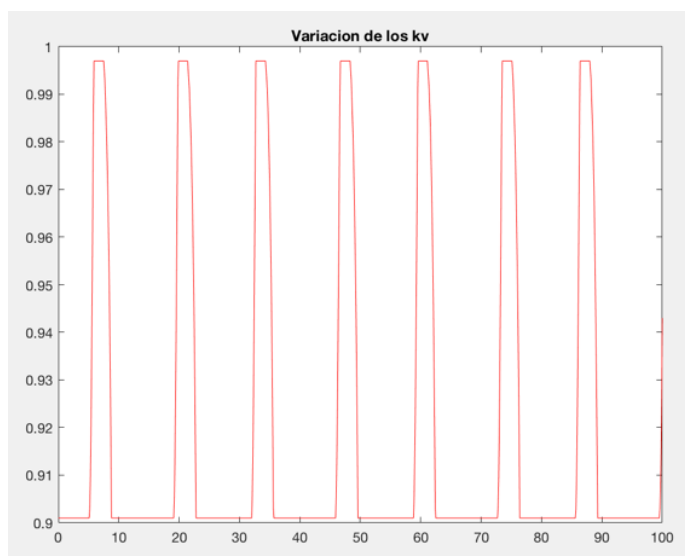


Fig. 28: Trayectoria en ocho, variación del parámetro kv

3.3.4.- Variación de los parámetros kv y $k\omega$ (Fig. 28 y Fig. 29):

Para el caso de los valores de kv y $k\omega$, se puede apreciar que los mismos están delimitados por sus extremos máximos y mínimos establecidos; y que estos ejercen una influencia correcta en el sistema de control de la saturación de las velocidades del robot, sobre todo el parámetro $k\omega$, que es el que controla la velocidad angular que se aproxima a los límites de su saturación.

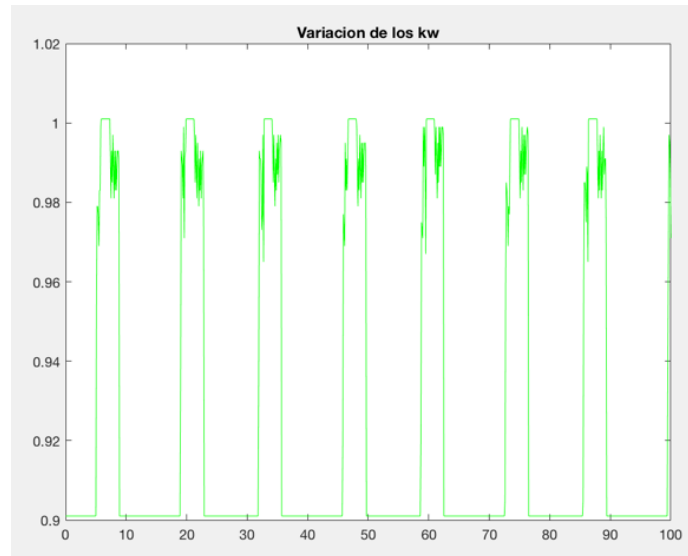


Fig. 29: Trayectoria en ocho, variación del parámetro $k\omega$

3.3.5.- Conclusión.

La variación de los errores se da de manera periódica, conforme varían los ciclos de la trayectoria, al igual que en los casos anteriores la acción de control resulta adecuada para trayectorias en las cuales tenemos rápidas variaciones de sentido de movimiento, los parámetros k_v y k_ω , se mantienen dentro de los límites establecidos y evitan la saturación de las velocidades del robot.

Podemos concluir que el controlador también funciona de manera correcta para este tipo de trayectorias.

CONCLUSIONES

Analizando el comportamiento del controlador del robot para las pruebas realizadas, se evidencia que el mismo actúa de manera correcta sobre el robot para alcanzar las distintas trayectorias de referencia.

Controla de una manera adecuada tanto la velocidad lineal, como la angular, por medio de los valores de los parámetros k_v y k_ω ; las respuestas son rápidas, lo que garantiza una convergencia hacia la trayectoria de referencia.

No se requiere de filtros ni atenuadores, por lo que, en caso de implementarse de una manera física, este modelo no requerirá un consumo excesivo de energía.

Es un sistema de una lógica fácil de entender y modelar, al aplicar principios de álgebra lineal se simplifica su desarrollo matemático, sin perder precisión ni calidad en el modelo.

El algoritmo de control limita los valores de los parámetros k_v y k_ω , entre los extremos máximos y mínimos establecidos y estos, a su vez, actúan de manera correcta, evitando la saturación de la velocidad.

Al ser un controlador simple, en caso de ser implementado, su consumo de energía será bajo, su costo adecuado y su mantenimiento sencillo.

El presente proyecto es factible de ser mejorado en la medida que se pueden desarrollar algoritmos más avanzados para poder delimitar los extremos de variación de los parámetros k_v y k_ω .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cruz, D., McClintock, J., Perteet, B., Orqueda, O. A.A., Cao, Y., & Fierro, R. (2007). Decentralized cooperative control—a multivehicle platform for research in networked embedded systems. *Control Systems Magazine IEEE*, 27(3), 58–78.
- De La Cruz Celso , and Carelli Ricardo . "Dynamic model based formation control and obstacle avoidance of multi-robot systems." *Robotica* (Cambridge University Press), 2008: 12.
- Fierro, R., & Lewis, F. (1995). Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. In *Proceedings of the 34th conference on decision & control* (Vol. 4, pp. 3805–3810), New Orleans, LA—December 1995.
- Fukao, T., Nakagawa, H., & Adachi, N. (2000). Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(5), 609–615.
- Ojeda, L., & Borenstein, J. (2003). Reduction of odometry errors in over-constrained mobile robots. In *Proceedings of the UGV technology conference at the SPIE aerosense symposium*.
- Rosales, A., Scaglia, G., Mut, V., & di Sciascio, F. (2009). Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments—A linear algebra approach, *ROBOTICA*. Cambridge: Cambridge University Press 10.1017/S0263574709005402.
- Rosales Andrés, Scaglia Gustavo, Mut Vicente, and Fernando di Sciascio. "Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments—a linear algebra approach." *Robotica* (Cambridge University Press) 27 (Diciembre 2009): 981--997.
- Scaglia, G., Quintero, L., Mut, V., & di Sciascio, F. (2008). Numerical methods based controller design for mobile robots. In *Proceedings of the 17th world congress the international federation of automatic control (IFAC)* (pp. 4820–4827), Seoul, Korea, July 6–11.
- Serrano Mario E. , Godoy Sebastián A. , Mut Vicente A. , Ortiz Oscar A. , and Scaglia Gustavo J. E. . "A nonlinear trajectory tracking controller for mobile robots with velocity limitation via parameters regulation." *Robotica* 34 (2016): 2546–2565.
- Scaglia Gustavo, Serrano Emanuel, Rosales Andrés , and Albertos Pedro . "Linear interpolation based controller design for trajectory tracking under uncertainties: Application to mobile robots." *Control Engineering Practice* (Elsevier Ltd.), 2015: 123–132.
- Scaglia Gustavo, Montoya Lucía Quintero , Mut Vicente , and di Sciascio Fernando . "Numerical methods based controller design for mobile robots." *Robotica* (Cambridge University Press), 2008: 11.
- Scaglia Gustavo, Rosales Andrés , Quintero Lucia , Mut Vicente , and Agarwal Ravi . "A linear-interpolation-based controller design for trajectory tracking of mobile robots." *Control Engineering Practice* (Elsevier Ltd.), no. 18 (2010): 318–329.

- Serrano Mario Emanuel, Scaglia Gustavo Juan Eduardo, Cheein Fernando Auat , Mut Vicente , and Ortiz Oscar Alberto . "Trajectory-tracking controller design with constraints in the control signals: a case study in mobile robots." Robotica (Cambridge University Press), 2014: 18.
- Shim, H., & Sung, Y. (2004). Stability and four-posture control for nonholonomic mobile robots. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 20(1).