



UNIVERSIDAD DEL AZUAY

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE LA PRODUCCIÓN Y OPERACIONES

Propuesta de modelo de programación lineal binaria entera para la solución del problema de asignación de horarios de clase.

Caso de Estudio: Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay.

Trabajo de graduación previo a la obtención del título de:

INGENIERO DE LA PRODUCCIÓN Y OPERACIONES

Autores:

JOSÉ MIGUEL CORDERO MOLINA

FERNANDO JOSÉ OTTATI VÉLEZ

Director:

JUAN MANUEL MALDONADO MATUTE

CUENCA - ECUADOR

2018

TABLA DE CONTENIDOS

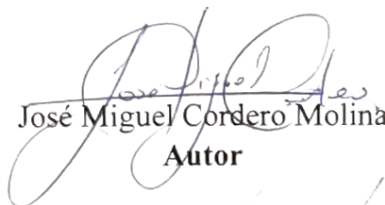
RESUMEN.....	iii
ABSTRACT.....	iv
I. INTRODUCCIÓN	1
II. MARCO TEÓRICO.....	2
III. ESTADO DEL ARTE.....	3
IV. DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN ACTUAL	4
V. MÉTODO	4
A. <i>Condiciones generales del modelo</i>	5
B. <i>Definición de conjuntos</i>	5
C. <i>Definición de variables de decisión</i>	6
D. <i>Definición de la función objetivo</i>	6
E. <i>Definición de restricciones</i>	6
VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	8
REFERENCIAS.....	9

RESUMEN

Este documento desarrolla un modelo de programación lineal binaria entera, enfocado a la elaboración de horarios de clase (Course Timetabling). El modelo se basa en los requisitos de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay y se limita a programar las horas a las que debe asignar cada cátedra, considerando los requerimientos de los profesores y de la facultad. Las restricciones generadas involucran la no superposición de materias por nivel y profesor, generación de horarios completos, continuidad de cátedras, patrones de horarios preestablecidos, simultaneidad de cátedras comunes y número máximo de asignaciones por franja horaria. Además, se incorporaron a la función objetivo restricciones suaves que procuran evitar la interrupción de los horarios y la asignación en días continuos. Se logra una asignación completa, con una eficacia del 100%.



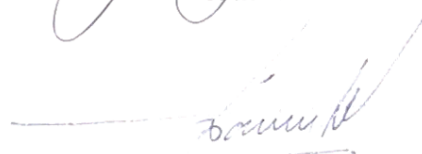
Fernando José Ottati Vélez
Autor



José Miguel Cordero Molina
Autor



Juan Manuel Maldonado Matute
Director



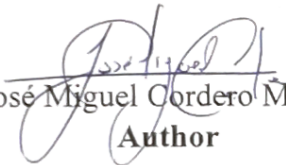
Iván Rodrigo Coronel
**Coordinador de la Escuela de
Ingeniería de la Producción y
Operaciones**

ABSTRACT

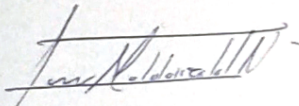
This document developed a binary integer linear programming model focused on the elaboration of class schedules (Course Timetable). The model was based on the requirements of the professors and the Faculty of Science and Technology of the University of Azuay. The model was limited to programming the hours to which each course should be scheduled. The generated restrictions involved not overlapping courses by level and teacher, generation of complete schedules, continuity of subjects, pre-established schedule patterns, simultaneity of common subjects and maximum number of assignments per time slot. In addition, soft restrictions were incorporated into the objective function to avoid the interruption of schedules and the assignment in continuous days. A complete assignment with 100% efficiency was achieved.



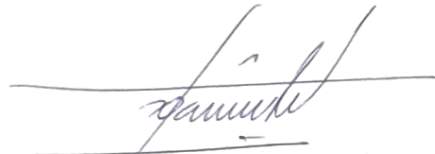
Fernando José Ottati Vélez
Author



José Miguel Cordero Molina
Author



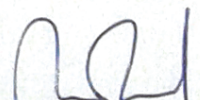
Juan Manuel Maldonado Matute
Thesis Director



Iván Rodrigo Coronel
**Production Engineering Faculty
Coordinator**



UNIVERSIDAD DEL
AZUAY
Dpto. Idiomas



Translated by
Ing. Paul Arpi

Propuesta de modelo de programación lineal binaria entera para la solución del problema de asignación de horarios de clase.

Caso de Estudio: Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay.

Cordero, José y Ottati, Fernando.
Maldonado, Juan.,

*Escuela de Ingeniería en Producción y Operaciones, Universidad del Azuay
Cuenca, Ecuador*

jmaldonado@uazuay.edu.ec
fernandoottativ@es.uazuay.edu.ec
jmcorderom@es.uazuay.edu.ec

Abstract— This document developed a binary integer linear programming model focused on the elaboration of class schedules (Course Timetable). The model was based on the requirements of the professors and the Faculty of Science and Technology of the University of Azuay. The model was limited to programming the hours to which each course should be scheduled. The generated restrictions involved not overlapping courses by level and teacher, generation of complete schedules, continuity of subjects, pre-assignments per time slot. In addition, soft restrictions were incorporated into the objective function to avoid the interruption of schedules and the assignment in continuous days. A complete assignment with 100% efficiency was achieved.

Key Words— Course time-tabling, linear programming, binary programming, schedule programming.

Resumen— Este documento desarrolla un modelo de programación lineal binaria entera, enfocado a la elaboración de horarios de clase (Course Timetabling). El modelo se basa en los requisitos de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay y se limita a programar las horas a las que debe asignar cada cátedra, considerando los requerimientos de los profesores y de la facultad. Las restricciones generadas involucran la no superposición de materias por nivel y profesor, generación de horarios completos, continuidad de cátedras, patrones de horarios preestablecidos, simultaneidad de cátedras comunes y número máximo de asignaciones por franja horaria. Además, se incorporaron a la función objetivo restricciones suaves que procuran evitar la interrupción de los horarios y la asignación en días continuos. Se logra una asignación completa, con una eficacia del 100%.

Palabras clave— Course time-tabling, programación lineal, programación binaria, programación horaria.

I. INTRODUCCIÓN

La elaboración de horarios de clase es una problemática con la que las instituciones educativas se enfrentan al inicio de cada periodo académico. Esta problemática se origina por la gran cantidad de variables implicadas y por el número de requerimientos que se deben considerar. Para elaborar horarios capaces de satisfacer las necesidades de sus grupos de interés (stakeholders), las instituciones deben invertir una gran cantidad de tiempo y recursos.

El problema de asignación de horarios de clase es considerado como un problema del tipo NP-Hard. Esto se debe, principalmente a: el tiempo de procesamiento requerido para la obtención de respuestas, la naturaleza de las decisiones que se deben tomar para obtenerlas y la gran cantidad de combinaciones posibles para determinar una asignación óptima de cátedras, en un conjunto de franjas definidas. [1] [2] [3] y [4] presentan un análisis más detallado en cuanto a esta clasificación.

A nivel investigativo, este tipo de problemas se conoce como: Course Timetabling y pueden ser de tres tipos [1]:

- *Examination Timetabling*: Programación de horarios de evaluaciones y exámenes.
- *School Course Timetabling*: Programación de horarios de clases para colegios.
- *University Course Timetabling*: Programación de horarios de clases para instituciones de educación superior o universidades.

Este trabajo se enfocará en la resolución del problema de asignación de horarios de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay (University Course Timetabling), la cual está conformada por siete escuelas. Se parte de una revisión del marco teórico, del estado del arte y de la situación actual de la Facultad, con el fin de establecer los requisitos y condiciones que deben cumplirse, estructurando enfoques de solución que permitan elaborar el modelo. Se debe recalcar que, dadas las diferencias entre los requerimientos y las condiciones de funcionamiento de las

diferentes instituciones educativas, resulta inadecuado emplear modelos elaborados por otras instituciones y autores, por lo que, en lugar de esto, se emplean estas investigaciones como base conceptual, como se describe en la Sección III.

Se establecen tres conjuntos principales de factores a considerar: el conjunto cátedras, el conjunto días y el conjunto franjas. El conjunto cátedras está conformado por las diferentes asignaturas que se imparten en la Facultad en sus diferentes escuelas, y sus elementos están asociados a un grupo de estudiantes y a un profesor. Los conjuntos días y franjas están conformados por: los días de la semana y los periodos en los que se imparten las asignaturas, respectivamente. Se plantean diferentes subconjuntos que permiten realizar consideraciones especiales y obtener soluciones que se adapten de mejor manera a la Facultad.

Para obtener una solución satisfactoria, se requiere alcanzar el mayor número de asignaciones, considerando los requisitos presentados, tanto por la Facultad, como por las direcciones de escuela, además de la disponibilidad de los profesores. Elaborar un modelo capaz de satisfacer simultáneamente todos estos requerimientos constituye el objetivo de esta investigación. Se considerará que una respuesta es válida, únicamente si esta implica que se hayan asignado todas las cátedras, el número de veces requerida por los créditos de la malla curricular. Esto significará que todos los profesores impartirán sus cátedras en el horario en que ellos están disponibles y que este horario se puede ajustar a los requerimientos, tanto de la Facultad, como de las escuelas.

Para poder cumplir con este objetivo se generaron dos variables: la primera representa la asignación de una cátedra a una determinada franja horaria, en un determinado día; mientras que la segunda representa la primera asignación de una determinada cátedra, en un determinado día, en una determinada franja horaria. Las variables se describen a detalle en la Sección V-C.

II. MARCO TEÓRICO

La administración de operaciones cuenta con una gran variedad de herramientas enfocadas a facilitar la toma de decisiones, algunas de ellas, se basan en la mejora de la productividad, por el importante impacto que puede generar en las organizaciones [4] [5]. Por su aplicabilidad, una de las más importantes es la programación lineal [4], que es una técnica matemática que permite a los directores de operaciones la asignación óptima de recursos, en áreas tan diversas que pueden incluir tanto la asignación de materias primas, para minimizar el coste de producción, como la asignación de espacios en centros comerciales, para maximizar los ingresos por arriendos [6].

Un modelo de programación lineal, está compuesto de dos elementos: una función objetivo y un conjunto de restricciones, ambos se describen en forma de ecuaciones o inecuaciones, que deben ser estrictamente lineales.

- *Función Objetivo:* en [5] y [6] se define como una expresión matemática, que maximiza o minimiza alguna cantidad. Esta incluye tanto a las variables de decisión, como a sus coeficientes. [4] afirma que los coeficientes de la función objetivo únicamente influyen en el valor óptimo de solución.

- *Restricciones:* de acuerdo a [5], son limitaciones a los valores que puede tomar la variable de decisión. Por lo

tanto, controlan, indirectamente, el valor que toma la función objetivo. Las restricciones se expresan como inecuaciones que incluyen coeficientes relacionados a los parámetros controlables por el sistema y a las cantidades de recursos disponibles [6]. En problemas de mayor complejidad [1], [7] y [8] categorizan a las restricciones en dos grupos:

- *Restricciones fuertes:* son aquellas que jamás deben ser violadas, ya que representan requisitos de cumplimiento obligatorio en el modelo y permiten establecer los límites de la región de factibilidad. De acuerdo a [5], esta región representa todas las combinaciones que no contradicen los requisitos establecidos por las restricciones, por lo que son valores permisibles de las variables de decisión, en un modelo de programación lineal, [6] establece que una de las propiedades de los modelos de programación lineal es que al menos una solución óptima se encuentra en un punto extremo de la región de factibilidad.

- *Restricciones suaves:* son aquellas que se cumplirán únicamente después de que las restricciones fuertes se hayan cumplido, con el objetivo obtener una mejor solución. Usualmente este tipo de restricciones forman parte de la función objetivo y buscan alcanzar situaciones más deseables, a través de penalizaciones o compensaciones adicionales. A diferencia de [1] [7] y [8], [4] no considera la existencia de restricciones suaves, en su lugar, establece un enfoque denominado programación de metas. En este enfoque, se definen múltiples funciones objetivo que buscan metas usualmente opuestas y permiten que los modelos tomen soluciones balanceadas.

En [4] y [9] se diferencia entre una solución óptima y una solución factible. Una solución factible es aquella que cumple con todas las condiciones planteadas en el modelo, mientras que una solución óptima es aquella solución factible que permite obtener el mayor beneficio o el menor costo. Se debe tener en cuenta que el beneficio y el costo, pueden estar definidos tanto en términos monetarios como en términos de cantidad, tiempo, espacio u otro parámetro en base al cual la organización pueda determinar una ventaja o desventaja.

En [5] se establece el siguiente proceso, para la formulación de problemas de programación lineal:

- 1) *Definición de variables de decisión:* En esta etapa se debe considerar cuál es la naturaleza de la decisión a tomar, recordando que la definición de las variables debe ser útil, tanto para la función objetivo, como para las restricciones y que las unidades deben ser homogéneas. Entre más completa sea la definición, más eficiente resultará la ejecución de los pasos siguientes.

- 2) *Determinación de la función objetivo:* Se debe decidir si el problema buscará una maximización (de beneficio) o una minimización (de costo), para hacerlo, se consideran los parámetros establecidos por la organización.

- 3) *Determinación de restricciones:* Resultan del análisis de las limitantes que el sistema tiene frente a las variables de decisión y pueden incluir elementos como capacidad total de producción, almacenaje, tiempo o espacio total disponible.

Existe un conjunto de restricciones especiales, denominado restricciones de no negatividad, que evitan que las variables tomen valores menores a cero. Estas restricciones se generan ya que, si la variable representa unidades como peso, tiempo, distancia o volumen, pierden sentido al tomar valores negativos, a través de ellas se reduce

el área de la región de factibilidad y el número de combinaciones posibles. Esto a su vez reduce el gasto computacional y evita soluciones con valores que, aunque son matemáticamente factibles, no tienen sentido en la práctica.

De acuerdo a las características de las variables, la función objetivo y las restricciones, se pueden definir diferentes tipos de problemas de programación lineal, citando lo expuesto por [4] y [10]:

Programación Lineal Entera (PLE): se refiere a problemas de programación lineal donde:

$$\max / \min Z_0 = \sum C_{ij}x_{ij}$$

s. t.

$$A_{ij}x_{ij} = B$$

$$A_{ij}x_{ij} \leq B$$

$$A_{ij}x_{ij} \geq B$$

Donde, $x_{ij} \in \mathbb{Z}$

En [10] se establece que los problemas de programación lineal entera permiten modelar situaciones más diversas que la programación lineal, pero, a cambio, la resolución de los mismos presenta requerimientos computacionales mucho más elevados que los de la programación lineal. Esto se debe a que se pierde la propiedad existente en los problemas de programación lineal de que al menos una solución óptima se encuentra en un punto extremo de la región de factibilidad.

Programación binaria: es un caso especial de los problemas de programación entera, donde:

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

En este tipo de problemas, 1, generalmente, hace referencia a un valor verdadero, a la presencia de una característica o al cumplimiento de un conjunto de condiciones establecidas, mientras que 0, por su parte, representa un valor falso, la ausencia de una característica, o que no se cumple con ciertas condiciones.

Programación dinámica: es aquella en la que el modelo original se puede descomponer en sub-problemas más pequeños que emplean los resultados de los anteriores para encontrar una solución final.

En [6] se definen diferentes métodos para solucionar problemas de programación lineal, entre ellos están: el método gráfico, donde se establece la solución a partir de los vértices de una región de factibilidad y el método de rectas de isobeneficio. Estos, sin embargo, se vuelven poco prácticos al tratar con problemas donde se incluyan más de dos variables de decisión, por lo que, para estos casos, se propone el empleo del método Simplex, donde, a través de un algoritmo se encuentran los vértices de la región de factibilidad para analizar el valor óptimo.

Por la complejidad y magnitud de los cálculos de los problemas de programación lineal, estos no generan soluciones cerradas, sino algoritmos que, a partir de iteraciones, obtienen soluciones cada vez mejores. Debido a estas iteraciones, usualmente se emplea software especializado, para la resolución de estos problemas [4].

Al considerar los problemas de asignación de horarios, [8] establece que: un horario puede considerarse efectivo, si este es posible y ejecutable en la institución, por el hecho de

cumplir con los requisitos establecidos; por otra parte, el horario se considera satisfactorio si incluye, en cualquier grado, características de calidad que son de interés para los usuarios.

III. ESTADO DEL ARTE

Los problemas de asignación de horarios y aulas han sido estudiados por diferentes universidades y autores, con el fin de elaborar modelos que se adapten a sus necesidades específicas. A pesar de que este documento no pretende realizar un análisis detallado del estado del arte, se describirán algunas de las investigaciones que se han considerado más relevantes y que han permitido desarrollar algunos de los enfoques de solución. Como se estableció en la Sección I, se pretende hallar una solución que, cumpliendo los requisitos de la Facultad y de las escuelas, y considerando la disponibilidad de los profesores, genere el máximo número de asignaciones.

La mayor parte de autores generan variables con múltiples subíndices, que representan la asignación de una cátedra, grupo de estudiantes, profesores, aulas u otros, que dependen directamente de los requerimientos de las universidades.

Con el fin de simular de manera más adecuada la realidad de estas instituciones, se generan conjuntos y subconjuntos, en base a requisitos que deben cumplir sus elementos para ser considerados en la solución. Del mismo modo, existe la posibilidad de generar, tanto funciones objetivo de maximización, que relacionan un beneficio esperado, resultado de la asignación, como funciones objetivo de minimización, que relacionan un costo esperado, resultado de interrupciones de horario, cambios de profesores o movilización de estudiantes.

Investigaciones como [11] emplean un grupo de matrices que representan restricciones de utilización de aula y de no-superposición y se basan en el método de generación de columnas para encontrar una solución óptima. Por otra parte, [12] presenta un modelo para programar los horarios para 45 franjas horarias, en un número variable de aulas, que deben tener ciertos insumos incorporados, para un conjunto de estudiantes definido. En [12] se definen conjuntos en base a los insumos que las aulas tienen incorporadas y se relacionan con los grupos de estudiantes y las cátedras. Al contrastar investigaciones como las realizadas en [7] y [8] se pueden apreciar diferentes propuestas en cuanto al planteamiento de restricciones de continuidad, es de particular interés el método presentado en [7], donde se incorporan nuevas variables y subconjuntos que permiten optimizar los tiempos de procesamiento y combinar diferentes índices para reducir la complejidad de las variables.

Existen diversos métodos para solucionar el problema de programación de horarios de clase: [3], [13], [14] y [15] proponen diferentes enfoques de aplicación del método de la colonia de hormigas; [12], [16], [17], [18], [19], [20] y [21] emplean métodos heurísticos y meta-heurísticos y [11], [22] y [23] emplean generación de columnas. Además, existen otras propuestas, como la de [24] donde se modifica el algoritmo del problema del vecino más cercano.

De acuerdo a [25], la inclusión de algunas de estas técnicas de solución como, algoritmos genéticos y definición de restricciones, y la implementación de otras como búsqueda tabú, hacen que el problema de programación horaria sea un

ámbito de estudio, no solo de la administración de operaciones, sino de la inteligencia artificial.

En la mayor parte de estas investigaciones, los autores emplean los requerimientos de las facultades de una institución educativa en particular, para generar el modelo de programación y validarlo posteriormente. Como se estableció en la Sección I, por la gran diversidad existente, entre las escuelas y facultades de cada institución, no se ha podido establecer un modelo generalizado y es inadecuado utilizar el de otras instituciones.

IV. DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN ACTUAL

La Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay no es ajena a la inversión en recursos y tiempo, necesaria para elaborar horarios de clase adecuados. Entre sus requerimientos más importantes están: las franjas horarias definidas por la Facultad, la jornada en que una escuela dicta clases, el número de horas semanales de cada cátedra (según el número de créditos establecidos en la malla curricular), la disponibilidad horaria de los docentes, los patrones horarios para cada cátedra y el número total de aulas disponible en la Facultad.

La Facultad está constituida por siete escuelas, cada una de ellas maneja su propia jornada de clase: matutina, vespertina, nocturna o a tiempo completo. Al inicio de cada periodo académico, cada una de ellas elabora los horarios de clase en base a los requerimientos de: la cátedra, la facultad, la escuela y los profesores.

El proceso inicia cuando el coordinador de cada escuela considera, para cada nivel y cátedra, los requerimientos de la Facultad y de su escuela y los compara con la disponibilidad

de los profesores. El coordinador debe comunicarse directamente con los profesores, con la finalidad de consultar su disponibilidad, en caso de que el profesor esté disponible, se asigna su cátedra, caso contrario se busca conciliar los intereses del profesor, analizando posibles cambios con otros profesores. Los mayores inconvenientes se generan si los profesores imparten cátedras en más de una escuela, pues la coordinación demanda más tiempo y es más complicada.

El número de reprocesos que se pueden generar es considerablemente alto ya que, debido a la naturaleza misma del proceso, se generan inconvenientes en la comunicación entre coordinaciones de escuela y profesores. Se debe considerar que este proceso se repite para cada cátedra y nivel en cada escuela, lo que lo vuelve altamente ineficiente. Además, la falta de coordinación entre las escuelas impide considerar plenamente los requisitos de la Facultad y dificulta procesos posteriores, como la asignación de aulas. El proceso sintetizado se puede apreciar en Fig. 1.

V. MÉTODO

De acuerdo a lo establecido en la Sección II y siguiendo un enfoque similar al expuesto en [7] [8] [11] y [12], se utilizará la programación lineal binaria entera para construir el modelo de solución al problema de asignación horaria de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay.

A continuación, se establecen los conjuntos de datos considerados, y posteriormente se detallan de acuerdo al orden propuesto en [5] los elementos constitutivos del modelo, para su posterior resolución mediante AMPL.

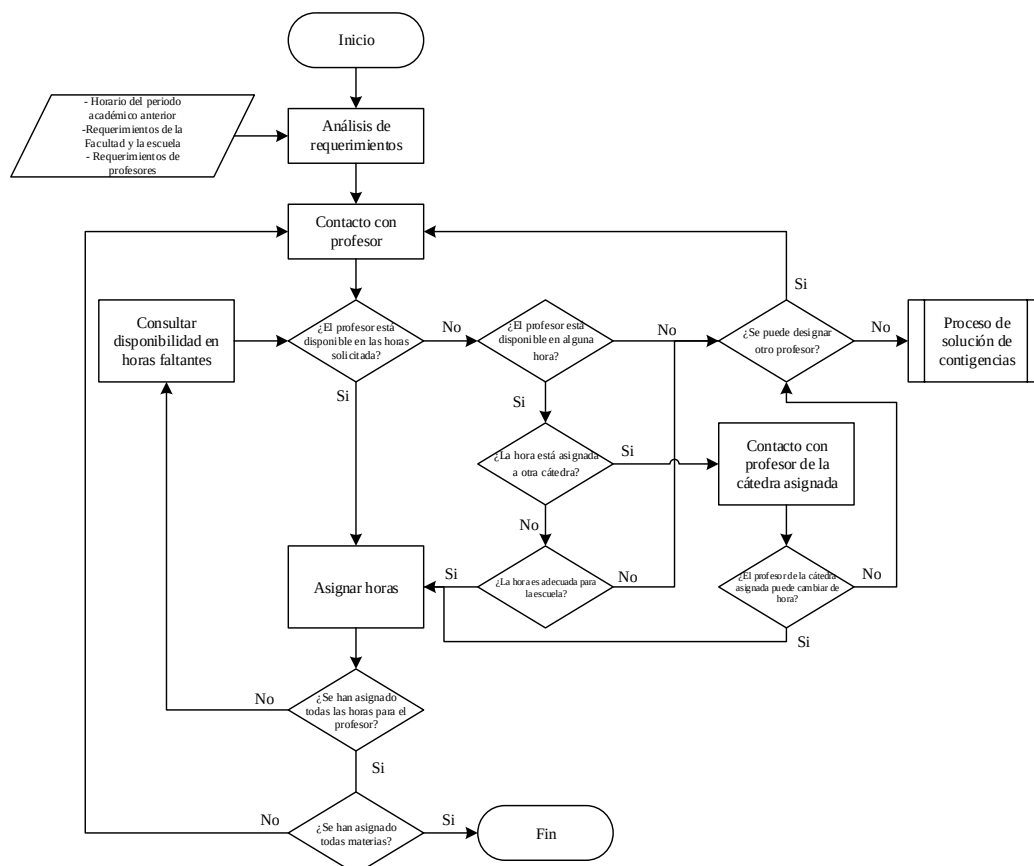


Fig. 1 Método actual de elaboración de horarios

A. Condiciones generales del modelo

Como se mencionó en la Sección IV, la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay está compuesta por siete escuelas, cada una de ellas con una jornada académica diferente, en la Tabla 1 se muestra la jornada de cada escuela. En la Tabla 2 se describen los horarios para cada jornada.

Tabla 1
Jornadas académicas por escuela.

Escuela	Jornada	Días
IPO	Tiempo completo	lunes a viernes
ICG	Tiempo completo	lunes a viernes
IE1	Vespertina/Nocturna	lunes a viernes
AL2	Vespertina/Nocturna	lunes a viernes
IMA	Vespertina/Nocturna	lunes a viernes
	Matutina	sábado
IEM	Matutina	lunes a viernes
BEG	Matutina	lunes a viernes

Tabla 2
Descripción de las jornadas.

Jornada	Horario
Matutina	07H00-13H00
Vespertina/Nocturna	14H00-22H00

La jornada a tiempo completo combina las jornadas matutina y vespertina/nocturna.

Por diversas razones, las escuelas pueden modificar las jornadas establecidas en la Tabla 1 y en la Tabla 2. Estas modificaciones, no serán descritas en este documento ya que representan condiciones muy específicas de cada escuela, sin embargo, dada la estructura del modelo, son consideradas en los subconjuntos presentados la Sección V-B.

Por otra parte, los requerimientos de la Facultad establecen que todas las cátedras serán impartidas en franjas horarias con una duración de 60 minutos. Además, en el caso de que una cátedra inicie durante la jornada matutina, este inicio será en una franja horaria impar (p.e. 07H00-08H00), mientras que, si la cátedra inicia durante jornada vespertina/nocturna, este inicio será en una franja horaria par (p.e. 16H00-17H00). Esto se realiza debido a que la mayor parte de cátedras de la Facultad se imparten en periodos de dos horas consecutivas, por lo que al realizar las asignaciones de esta forma es posible incrementar el número de cátedras asignadas en una jornada y utilizar de manera más eficiente las aulas disponibles.

Los días de la semana y las horas en que una cátedra puede ser asignada dependerá de: los requerimientos de la Facultad, los requerimientos de cada escuela y la disponibilidad del profesor. Es importante recalcar que el modelo propuesto considera la disponibilidad del profesor, más no su preferencia.

Además, existen cátedras especiales, que corresponden a materias comunes para algunas escuelas. Estas deben dictarse en la misma franja horaria y en el mismo día para todas las escuelas. Este mismo requerimiento se establece para materias que se den en dos paralelos del mismo nivel. Dentro del modelo, se asume que cada profesor decide qué patrón horario desea asignar a sus cátedras.

B. Definición de conjuntos

Para la resolución del problema se establecen los siguientes conjuntos y subconjuntos:

- El conjunto escuelas $E = \{e_1 \dots e_7\}$ representa a las escuelas de la Facultad.
- El conjunto profesor $P = \{p_1 \dots p_m\}$ representa a los profesores, de la Facultad, considerando que esta tiene una cantidad p_m de profesores en el periodo académico donde se realizará la asignación.
- Los conjuntos $N_e = \{n_{e1} \dots n_{ev}\}$ representa los niveles académicos para toda escuela $e \in E$ de la Facultad, donde n_{ev} representa el último nivel académico de la escuela e .
- El conjunto cátedras $C = \{c_1 \dots c_s\}$ representa todas las cátedras que se imparten en la Facultad, considerando que, en el periodo académico donde se realizará la asignación se imparten s cátedras.
- Los días de la semana en los que una cátedra puede ser asignada, se encuentran representados en el conjunto $D = \{d_1 \dots d_6\}$, donde d_1 representa al día lunes, d_2 al martes y así sucesivamente hasta el día sábado.
- Las franjas en los que una cátedra puede ser dictada se encuentran representadas en el conjunto $F = \{f_1 \dots f_{15}\}$, donde f_1 representa la franja horaria de 07H00-08H00, f_2 la franja horaria de 08H00-09H00 y así sucesivamente hasta la franja horaria de 21H00-22H00.
- El conjunto $T = \{t_1 \dots t_6\}$ está conformado por los patrones horarios predefinidos por la Facultad.
- Los subconjuntos $C_t \subset C$ están conformadas por todas las cátedras $c \in C$ que deben asignarse siguiendo el patrón $t \in T$.
- El subconjunto $C_{en} \subset C$ está compuesto por todas las cátedras $c \in C$ impartidas en una escuela $e \in E$ y en un determinado nivel $n_e \in N_e$.
- El subconjunto $C_p \subset C$ está compuesto por todas las cátedras impartidas por un profesor $p \in P$.
- Los subconjuntos $CO_k \subset C$ corresponden a todas las cátedras $c \in C$, que son comunes en la Facultad, donde k es el k -ésimo conjunto de cátedras comunes. Las cátedras comunes son determinadas por la administración de la Facultad.
- El subconjunto $CP_{enk} \subset C_{en}$ corresponde a las cátedras $c \in C_{en}$ que tienen más de un paralelo, donde k es el k -ésimo conjunto de cátedras que representan la misma materia, dictada por diferentes profesores a diferentes grupos de estudiantes.
- El subconjunto $CC \subseteq C$ corresponde a las cátedras $c \in C$ en las que el profesor desea tener continuidad de días en las asignaciones.
- El subconjunto $D_e \subseteq D$ corresponde a los días de la semana donde la escuela $e \in E$, puede asignar sus cátedras $c \in C_{en}$.
- El subconjunto $D_p \subseteq D$ corresponde a los días de la semana donde el profesor $p \in P$, puede dictar sus cátedras $c \in C_p$.
- Los subconjuntos $D_{ep} = D_e \cap D_p$ y representa todos los días en los que una cátedra puede asignarse, dado que: tanto la escuela $e \in E$ puede asignar sus cátedras $c \in C_{en}$, como el profesor $p \in P$ puede dictar sus cátedras $c \in C_p$.

- Los subconjuntos $F_{ed} \subseteq F$ contienen a las franjas horarias donde la escuela $e \in E$, puede asignar sus cátedras $c \in C_{en}$, el día $d \in D_e$.

- El subconjunto $F_{pd} \subseteq F$ corresponde a las franjas horarias donde el profesor $p \in P$, puede dictar sus cátedras $c \in C_p$, el día $d \in D_p$.

- El subconjunto $F_{edp} = F_{ed} \cap F_{pd}$ y representa todas las franjas horarias en las que una cátedra puede asignarse, dado que cumple con los requerimientos de la escuela y la disponibilidad del profesor.

- El subconjunto $F_i \subset F$ está compuesto por todas las franjas donde las cátedras puede iniciar, dadas las condiciones establecidas por la Facultad.

- El subconjunto $F_{edpi} = F_{edp} \cap F_i$ y representa todas las franjas horarias en las que una cátedra puede iniciar y puede ser asignada, dado que cumple con los requerimientos de la Facultad, de la escuela y de la disponibilidad el profesor.

C. Definición de variables de decisión

Se han considerado dos variables:

1) Variable de asignación:

$$x_{cdf} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{si la cátedra } c \text{ se ha asignado} \\ & \text{en el día } d \text{ y en la franja } f \\ 0 & \rightarrow \text{caso contrario} \end{cases}$$

2) Variable de inicio de cátedra

$$y_{cdf} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{si la primera asignación} \\ & \text{de la cátedra } c \text{ sucede en la} \\ & \text{franja } f \text{ en el día } d \\ 0 & \rightarrow \text{caso contrario} \end{cases}$$

D. Definición de la función objetivo

Debido a que se busca lograr el mayor número de asignaciones de cátedras, en todos los días y todas las franjas, se decidió emplear una función de maximización de beneficio (tomando en cuenta los conceptos de beneficio establecidos en la Sección II). Además, se incorporaron dos restricciones suaves que buscan: 1) generar continuidad en el horario, a través de la reducción de las franjas no asignadas entre asignaciones, es decir, se busca que el horario no tenga interrupciones y 2) satisfacer requerimientos de profesores que soliciten que sus cátedras se asignen en días no consecutivos.

Se debe recalcar que estas restricciones se cumplirán únicamente si todas las restricciones fuertes, establecidas en la Sección V-E, se han cumplido, y permitirán obtener una mejor solución para la Facultad.

A partir de esto, la función objetivo se define como:

$$\max z_0 = \sum_{c \in C} \sum_{d \in D_{ep}} \sum_{f \in F_{edp}} a_{df} \cdot x_{cdf} - \sum_{c \in C_{cont}} \sum_{d \in D_{ep}} \sum_{f \in F_{edpi}} b_d \cdot y_{cdf} + \sum_{c \in C} \sum_{d \in D_{ep}} \sum_{f \in F_{edpi}} w_{cf} \cdot y_{cdf}$$

Mediante el coeficiente a_{df} se asume que es más óptima una asignación en las primeras franjas y los primeros días de la semana:

$$a_{df} = \frac{1}{d \cdot f}$$

Los coeficientes b_d y w_{cf} se han establecido como parámetros controlables por el sistema con diferentes fines:

- Mediante el coeficiente b_d se establece que es más óptimo asignar una cátedra en días continuos, generando un mayor costo si la misma cátedra inicia en días no consecutivos.

Dado que este artículo se limita a la elaboración del modelo de programación de horarios de clase para la Facultad, es de importancia, tanto la identificación del parámetro b_d , como su consideración en el modelo; sin embargo, como se establece en la Sección VI, el determinar de forma precisa su valor, resultará de mayor interés en investigaciones complementarias.

En la Tabla 3 se muestran los valores de b_d empleados en la prueba piloto. Estos valores fueron dados considerando a 15 como valor menos deseado y a 65 como valor más deseado.

Su valor se establece en función del día d , donde se da el inicio de una determinada cátedra.

Tabla 3
Valores del coeficiente b_d

d	1	2	3	4	5	6
b_d	15	25	35	45	55	65

- En un mismo día, el coeficiente w_{cf} reduce el beneficio obtenido, a medida que aumenta la distancia entre las franjas de inicio de cada cátedra, con el fin de que el horario no tenga interrupciones y sea lo más compacto posible. Por las mismas razones expuestas en la descripción coeficiente b_d , se desarrolló un mecanismo de cálculo para el coeficiente w_{cf} , con el fin de comprobar su correcto funcionamiento, pero su valor podrá determinarse de forma más precisa en investigaciones complementarias.

En la matriz $M_{i \times 2}$, la segunda columna representa los valores de w_{cf} , de acuerdo al número de franjas i en la que una cátedra puede iniciar, un determinado día.

$$M_{i \times 2} = \begin{bmatrix} f_a & q \cdot i \\ f_b & q \cdot (i - 1) \\ f_d & q \cdot (i - 2) \\ \vdots & \vdots \\ f_m & q \end{bmatrix}$$

Donde q es una constante y a, d, b y m representan las franjas del conjunto F_{epi} . Debe ponerse especial atención en el hecho de que el valor de w_{cf} no depende del número de la franja donde puede ocurrir la primera asignación ($a, b, \dots, m$), sino del número total de franjas en que las asignaciones pueden darse para la cátedra, es decir $w_{cf} = f(i)$. Durante la prueba piloto se empleó $q = 5$

E. Definición de restricciones

A nivel general, [8] establece cuatro reglas para un problema de programación horaria universitario. Para la

solución que se presenta en este documento, son de interés las que siguen:

1) *Las colisiones, no se permiten.* Una colisión ocurre al momento en que dos o más cátedras se asignan en el mismo periodo de tiempo, para el mismo profesor o para el mismo grupo de estudiantes, o cuando a un grupo de estudiantes se les han asignado varios profesores para el mismo periodo de tiempo. A pesar de que la asignación de aulas no forma parte de esta investigación, esta restricción también debería considerar que, en una misma aula, en un mismo día y franja horaria, debe estar asignado, como máximo, un grupo de estudiantes.

Las colisiones de un mismo grupo de estudiantes, se evitan considerando los elementos de los subconjuntos $C_{en} \forall e \in E, n \in N$, de modo que:

$$\sum_{c \in C_{en}} x_{cdf} \leq 1, \forall d \in D_{ep}, f \in F_{edp}$$

Las colisiones de un mismo profesor, se evitan considerando los elementos de los subconjuntos $C_p \forall p \in P$, de modo que:

$$\sum_{c \in C_p} x_{cdf} \leq 1, \forall d \in D_{ep}, f \in F_{edp}$$

2) *El horario debe ser completo.* Ocurre cuando todas las cátedras planificadas, para todos los estudiantes, se encuentran en el horario,

Para generar esta restricción se consideran los créditos establecidos en la malla curricular de cada una de las escuelas.

$$\sum_{d \in D_{ep}} \sum_{f \in F_{edp}} x_{cdf} = cr, \forall c \in C$$

Donde cr es igual a el número de créditos que se establecen para la cátedra, en la malla curricular.

3) *El horario debe satisfacer los requerimientos de cátedras continuas.* En dependencia de la cátedra y el número de créditos asignados por semana, un profesor puede elegir dictar su cátedra en un único periodo o en varios periodos, según un patrón preestablecido, siempre que este se ajuste a los requerimientos de la escuela y de la Facultad.

Para establecer la continuidad, se tomará el enfoque establecido en [7], por lo que previamente, se requiere que las variables de inicio de la cátedra asignada, cumplan una serie de restricciones:

a) Una cátedra puede iniciar una sola vez al día, por lo tanto:

$$\sum_{f \in F_{edp}} y_{cdf} \leq 1, \forall c \in C, d \in D_{ep}$$

b) La cátedra debe estar asignada en el día y la franja donde inició:

$$x_{cdf} \geq y_{cdf}, \forall c \in C, d \in D_{ep}, f \in F_{edp}$$

c) De acuerdo a lo establecido en la definición de la variable y_{cdf} , esta toma un valor de 1 si la cátedra $c \in C$, arranca en el día $d \in D$, en la franja $f \in F$. Dado que esta franja f es la franja de inicio, o arranque, de la cátedra para ese día, dicha cátedra podrá ser asignada únicamente en esta franja o en franjas posteriores, es decir, una cátedra no puede ser asignada si no ha iniciado y no puede ser asignada antes de haber iniciado, por lo tanto:

$$x_{cdf} \leq \sum_{\hat{f}=1}^f y_{cd\hat{f}}, \forall c \in C, d \in D_{ep}, \hat{f} \in F_{edp} / \hat{f} \leq f$$

De forma implícita, esta restricción puede realizar el mismo trabajo que la restricción presentada en (b), por lo que, con esta, podría ser suficiente para garantizar el cumplimiento de ambos requisitos; sin embargo, incluir ambas en el modelo, disminuye el gasto computacional, lo que se refleja en una reducción del tiempo en el que el software halla una solución óptima.

Una vez establecidas estas restricciones, se puede establecer la continuidad de las cátedras mediante la siguiente ecuación:

$$x_{cdf} - x_{cd(f-1)} \leq y_{cdf} \forall c \in C, d \in D_{ep}, f \in F$$

Para su correcto funcionamiento, es indispensable generar las ecuaciones para todo el conjunto F , y no únicamente para el conjunto F_{ep} , esto, sin embargo, introduce al modelo variables que implican una asignación que no es posible en una escuela o para profesor, por lo que, es necesaria la siguiente restricción.

$$\sum_{c \in C} \sum_{d \in D_{ep}} \sum_{f \notin F_{edp}} x_{cdf} = 0$$

Para establecer los patrones de cada cátedra, se generaron combinaciones de asignaciones por día, según los requerimientos de los profesores. En la Tabla 4 se muestran estas combinaciones.

Tabla 4
Patrones

Patrón (t)	Número de créditos de la cátedra	Nombre del patrón	Número máximo de asignaciones			Asignaciones máximas por día (n_t)	Número de días (d_t)
			Día 1	Día 2	Día 3		
1	2	2-0-0	2	0	0	2	1
2	3	3-0-0	3	0	0	3	1
3		2-1-0	2	1	0	2	2
4	4	4-0-0	4	0	0	4	1
5		2-2-0	2	2	0	2	2
6	5	3-2-0	3	2	0	3	2
7		2-2-1	2	2	1	2	3
8	6	2-2-2	2	2	2	2	3
9		3-3-0	3	3	0	3	2
10		4-2-0	4	2	0	4	2

A pesar de se pueden establecer alrededor de 26 combinaciones, algunas no se consideraron debido a que en estudios preliminares se pudo comprobar que estas no son

utilizadas y no se ajustan a los requerimientos de los profesores, de la Facultad o de la Universidad.

A continuación, se presenta el conjunto de restricciones que permiten que se cumplan las combinaciones antes mencionadas.

a) Cada cátedra puede iniciar únicamente en el número de días (d_t) que establezca su patrón $t \in T_c$, por lo tanto:

$$\sum_{d \in D_{ep}} \sum_{f \in F_{ep}} y_{cdf} = d_t \quad \forall c \in C$$

Para los patrones empleados, d_t se encuentra definido en la Tabla 4.

b) Cada cátedra puede tener, en cada día, como máximo el mayor número de horas establecido en el patrón $t \in T$, por lo tanto:

$$\sum_{f \in F_{edp}} x_{cdf} \leq n_{tc} \quad \forall c \in C, d \in D_{ep}$$

Para los patrones empleados, n_t se encuentra definido en la Tabla 4.

Además de las restricciones propuestas en [8], se deben incluir otras restricciones que permitan cumplir requerimientos específicos de la Facultad:

1) El número de asignaciones en una misma franja, de un mismo día, debe ser menor o igual al número de aulas que la Facultad tenga disponibles:

$$\sum_{c \in C} x_{cdf} \leq na \quad \forall d \in D_{ep}, f \in F_{ep}$$

Donde na es igual al número de aulas de la Facultad.

2) Las cátedras comunes entre escuelas deben ser asignadas en la misma franja y en el mismo día, a menos que las dicte el mismo profesor.

$$x_{cdf} = x_{cdf} \quad \forall c \in C_{com} / \hat{c} \leq c, d \in D_{ep}, f \in F_{edp}$$

3) Las cátedras de una escuela, con dos o más paralelos deben estar asignadas en la misma franja y en el mismo día, a menos que las dicte el mismo profesor

$$x_{cdf} = x_{cdf} \quad \forall c \in C_{par} / \hat{c} \leq c, d \in D_{ep}, f \in F_{edp}$$

Una vez definida la función objetivo y todas las restricciones requeridas para generar horarios capaces de satisfacer los requerimientos de la Facultad identificados, se resolvió el problema de elaboración de horarios para una muestra de cátedras.

VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El análisis del marco teórico permitió estructurar el proceso a través del cual se desarrolló el modelo, además de las restricciones generales de los problemas de asignación de horarios. Esto, combinado con el estudio del estado actual de la técnica, permitió establecer los primeros enfoques de

solución. Se tomó como referencia casos reales, aplicados en universidades con problemáticas similares, las propuestas de solución de [1] [7] [8] [26] sirvieron como guía para establecer las restricciones del modelo.

En base al método actual, llevado a cabo en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del Azuay, se establecieron las condiciones generales del modelo, existiendo requerimientos diferentes a los revisados en otras investigaciones, que exigieron la generación de nuevos tipos de restricciones.

Una vez desarrollado el modelo, se analizó su validez mediante una prueba piloto, empleando información de profesores miembros de la Facultad, que dictan cátedras en más de una escuela. Los resultados muestran que las restricciones fuertes tienen una eficacia del 100%. Además, gracias a la inclusión de las restricciones suaves, los horarios generados cumplieron, tanto los requerimientos de simultaneidad de días, como de no interrupción de horario, en los casos donde fue posible. Existen excepciones en los siguientes casos:

- Las cátedras se asignaron en días consecutivos, aunque se haya solicitado lo contrario, pero únicamente cuando el profesor, que dicta esta cátedra, también dicta otra, que ya ha sido asignada en días no consecutivos.
- Existen horarios en los que se generan interrupciones, pero únicamente cuando las cátedras que los conforman tienen un número de créditos impar y el modelo encuentra soluciones con valores objetivo más elevados al penalizar estos horarios con el fin de lograr que no existan interrupciones en otros.

Los coeficientes asignados a la función objetivo, lograron que las asignaciones se den en las franjas correspondientes a horas más tempranas del día y en los primeros días de la semana, como se había establecido.

En la prueba piloto se generó una asignación total en menos de 5 minutos, considerando el tiempo que actualmente deben invertir las coordinaciones de las escuelas para poder comunicarse con los profesores y el número de reprocesos que se pueden generar, se debe enfatizar el ahorro de recursos que el modelo puede presentar para la Facultad.

Resulta de particular interés el hecho de que la restricción establecida en la Sección V E 3) b) permita reducir, notablemente el tiempo de ejecución del modelo, hecho que puede ser analizado a profundidad frente a la problemática P vs. NP .

Por otra parte, se recomienda desarrollar estudios, complementarios a esta investigación, que confirmen las preferencias de día y franja para satisfacer, por ejemplo, expectativas de estudiantes y, de esta manera, modificar los valores de los coeficientes, mejorando así el resultado. Se pueden incluir también coeficientes que consideren la preferencia de los profesores. Se debe tener en cuenta que incluir, modificar o sustituir los coeficientes presentados permitirá obtener diferentes escenarios de solución, adaptados a diferentes necesidades de la Facultad, sin tener que modificar los demás componentes del modelo.

Estudios similares pueden desarrollarse para determinar, de forma más óptima, los parámetros establecidos por el sistema, que influyen en el costo y en el beneficio alcanzado por las asignaciones, tanto en días continuos, como en interrupciones de horarios. Además, se puede complementar al modelo con otros, que, basándose en la programación por

partes, permitan asignar aulas de clase, laboratorios y otros elementos de interés para la Facultad.

Finalmente, se propone considerar la eliminación de ciertas restricciones ya establecidas en la Facultad, que pueden evitar que se generen soluciones más adecuadas para los grupos de interés.

REFERENCIAS

- [1] R. Hernández, J. Miranda P, and P. A. Rey, "Programación de Horarios de Clases y Asignación de Salas para la Facultad de Ingeniería de la Universidad Diego Portales Mediante un Enfoque de Programación Entera," *Control*, pp. 121–141, 2008.
- [2] H. Cambazard, F. Demazeau, N. Jussien, and P. David, "Interactively solving school timetabling problems using extensions of constraint programming."
- [3] E. Ugat, J. Montemayor, and M. Manlimos, "Parallel Ant Colony Optimization on the University Course-Faculty Timetabling Problem in MSU-IIT," *GSTF J. Comput.*, 2018.
- [4] H. A. Taha, *Operations Research: An Introduction*. 2005.
- [5] L. Krajewsky, L. Ritzman, and M. Malhotra, *Administración de Operaciones*, vol. 20, no. 5. 2009.
- [6] J. Heizer and B. Render, *Dirección de la producción y de operaciones. Decisiones Tácticas*. 2008.
- [7] L. T. Lucía Esquivel, "Modelo Matemático Para La Programación De Un Horario Escolar Con Multi-Localización De Docentes," *Colomb. Univ. DEL Val. Esc. Ing. Ind.*, 2014.
- [8] S. Daskalaki, T. Birbas, and E. Housos, "An integer programming formulation for a case study in university timetabling," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 153, no. 1, pp. 117–135, 2004.
- [9] S. Cabrera, "Programación Lineal."
- [10] P. M. Mateo and D. Lahoz, "Programación Lineal Entera," 2009.
- [11] A. Qualizza and P. Serafini, "A Column Generation Scheme for Faculty Timetabling Practice and Theory of Automated Timetabling V," *Pract. Theory Autom. Timetabling V*, vol. 3616, pp. 161–173, 2005.
- [12] P. Kostuch, "The university course timetabling problem with a three-phase approach," *Pract. Theory Autom. Timetabling V*, vol. 3616, pp. 109–125, 2005.
- [13] C. A. Peñuela, J. F. Franco, and E. M. Toro, "Colonia De Hormigas Aplicada a La Programación Óptima De Horarios De Clase," *Sci. Tech.*, vol. 14, no. January, pp. 49–54, 2008.
- [14] H. G. Santos, E. Uchoa, L. S. Ochi, and N. Maculan, "Strong bounds with cut and column generation for class-teacher timetabling," *Ann. Oper. Res.*, vol. 194, no. 1, pp. 399–412, Apr. 2012.
- [15] L. Stucchi, S. Falckenheiner, A. Hermoza, and F. Casafranca, "Optimización de un problema de asignación generalizada a partir de un algoritmo de colonia de hormigas que incorpora un mecanismo de difusión," 2014.
- [16] T. Arbaoui, "Modeling and solving university timetabling."
- [17] M. A. S. Elmohamed, P. Coddington, and G. Fox, "A comparison of annealing techniques for academic course scheduling," 1998, pp. 92–112.
- [18] R. Lewis, "A survey of metaheuristic-based techniques for University Timetabling problems," *OR Spectr.*, vol. 30, no. 1, pp. 167–190, Nov. 2007.
- [19] P. Pongcharoen, W. Promtet, P. Yenradee, and C. Hicks, "Stochastic Optimisation Timetabling Tool for university course scheduling," *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 112, no. 2, pp. 903–918, Apr. 2008.
- [20] O. Rossi-Doria *et al.*, "A Comparison of the Performance of Different Metaheuristics on the Timetabling Problem," Springer, Berlin, Heidelberg, 2003, pp. 329–351.
- [21] M. Lindahl, M. Sørensen, and T. R. Stidsen, "A fix-and-optimize matheuristic for university timetabling," *J. Heuristics*, vol. 24, no. 4, pp. 645–665, Aug. 2018.
- [22] K. Papoutsis, C. Valouxis, and E. Housos, "A column generation approach for the timetabling problem of Greek high schools," *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 54, no. 3, pp. 230–238, Mar. 2003.
- [23] P. Maya, "Algoritmo de Generación de Columnas: Una revisión desde su aplicación al problema de asignación de cupos escolares," 2008.
- [24] D. Zhang, Y. Liu, R. M'Hallah, and S. C. H. Leung, "A simulated annealing with a new neighborhood structure based algorithm for high school timetabling problems," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 203, no. 3, pp. 550–558, Jun. 2010.
- [25] A. Schaerf, "A Survey of Automated Timetabling," *Artif. Intell. Rev.*, vol. 13, no. 2, pp. 87–127, 1999.
- [26] J. H. SPARC (Organization), Daniel Felipe; Garcés Hincapié, Julián Alberto; Restrepo Correa and Universidad Tecnológica de Pereira, *Scientia et technica.*, vol. XVII, no. 50. Universidad Tecnológica de Pereira, 1995.