UNIVERSIDAD DEL AZUAY

DEPARTAMENTO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

Tema:

"Análisis y aproximación numérica del sistema oscilatorio subamortiguado y de la ecuación de onda utilizando el método de diferencias finitas"

Trabajo de graduación previo a la obtención del título de Magíster en Matemática Aplicada

Autor
Jonathan Alexander Charfuelán Flores

Director
Mgst. David C. Siddons

Cuenca - Ecuador

2023

DEDICATORIA

Yo, Jonathan Alexander Charfuelán Flores, quiero dedicar el presente trabajo de titulación a mi querido profesor, el Mgs. David Siddons, quien a lo largo de todo este trabajo me ha ido guiando de la mejor manera. A mi Dios que no me ha abandonado y me ha permitido conocer nuevas cosas de las que no tenía idea alguna. Por supuesto a mi anterior directora la Dra. Oihane Fernández Blanco quien fue de gran ayuda para la presente investigación.

AGRADECIMIENTO

A Dios por siempre estar conmigo. Un eterno y sincero agradecimiento a mis padres y a mis docentes quienes no me dejaron flaquear en el camino Agradezco de una manera inconmensurable a mi director de tesis, el Dr. David Siddons. Y por supuesto a mi anterior directa la Dra. Oihane Fernández Blanco quienes con sus sabios consejos hicieron que llegue a aprender muchas cosas que creía no poder lograr. Tengo muchos errores y debilidades, pero ella con su calidez me ha hecho darme cuenta de ellos y poder seguir siendo una mejor persona.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

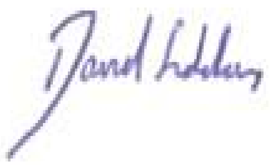
La investigación se realizó con el claro objetivo de aproximar numéricamente ambas EDPs usando el método de diferencias finitas, mediante la creación de un algoritmo en Python. Se desarrollo el estudio de sistemas oscilatorios, tema de gran interés debido a su amplia aplicabilidad en diversos campos como la física y la biología; siendo que estos sistemas presentan un comportamiento dinámico fascinante. En consecuencia se usó Python para conseguir la aproximación numérica y consecutivamente observar el funcionamiento correcto del algoritmo a plantear. De esa forma lograr una base conceptual sólida para continuar el análisis tanto de la la EDO para el sistema oscilatorio subamortiguado como para la EDP de la ecuación de onda. En el capítulo final, se planteó realizar la implementación en Python tanto para la EDO para un sistema oscilatorio subamortiguado como para la EDP de la ecuación de onda; teniendo para ello la utilización de los métodos numéricos.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, EDO, EDP, diferencias finitas, Python

ABSTRACT

The research was carried out with the clear objective of numerically approximating both PDEs using the finite difference method, by creating an algorithm in Python. The study of oscillatory systems was developed, a topic of great interest due to its wide applicability in various fields such as physics and biology; being that these systems present a fascinating dynamic behaviour. Consequently, Python was used to achieve the numerical approximation and consequently observe the correct operation of the algorithm to be proposed. In this way, a solid conceptual basis was achieved to continue the analysis of both the ODE for the underdamped oscillatory system and the PDE of the wave equation. In the final chapter, it was proposed to carry out the implementation in Python for both the ODE for an underdamped oscillatory system and the PDE of the wave equation, using numerical methods.

Key words: Differential Equations, ODE, PDE, Finite Differences, Python



Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Tan pocas herramientas ayudan a relacionar el mundo de las matemáticas y la física como las ecuaciones diferenciales (ED); siendo una de las herramientas más conocidas a la hora de modelar fenómenos físicos, mismos que se encuentran en la naturaleza y ayudan a entender mejor el mundo caótico en el que el ser humano vive. En el presente trabajo de investigación se introdujo las ecuaciones diferenciales a analizarse, se ejemplificó con la ecuación diferencial ordinaria (EDO) que modeliza el sistema oscilatorio subamortiguado y la ecuación diferencial parcial (EDP) con un ejemplo clásico, la ecuación de onda; donde ciertamente se trabaja con condiciones iniciales sencillas.

Para ello, en el presente trabajo se investigó a profundidad sobre las ecuacines diferenciales y así también la aproximación numérica del sistema oscilatorio subamortiguado y de la ecuación de onda utilizando el método de diferencias finitas. La principal problemática que se trató en la investigación radicó en la ineludible necesidad de comprender de manera rigurosa algunas de las ecuaciones diferenciales ya existentes. Como por ejemplo una EDP clásica, misma que posee una amplia aplicación en varias ramas de la ciencia, la ecuación de onda. Y por otro lado, la EDO asociada al sistema oscilatorio subamortiguado. Para así finalmente poder desarrollar las habilidades y conocimientos necesarios para plantear la construcción matemática de las ecuaciones diferenciales mencionadas.

Además se realiza la implementación de métodos numéricos con la ayuda del lenguage de programación Python, con el fin de aproximar numéricamente ambas soluciones de las ecuaciones diferenciales mencionadas. Por lo tanto, fue determinante el abordar esta problemática para promover una comprensión más sólida de estas ecuaciones diferenciales, así como desarrollar un enfoque holístico sobre lo que se deseó realizar. El presente trabajo pretende contribuir al entendimiento en el campo del análisis y la simulación numérica de EDs y su correcta aproximación numérica.

Principalmente se profundiza en los conceptos relacionados al tema, como la revisión exhaustiva de conceptos clave, como ecuación diferencial y otros temas inmersos como el problema de valores iniciales. Todo esto ayuda a tener una base sólida, para más adelante entender la aproximacion numérica. Así tambien, examinando la motivación histórica al momento de planteadas, su rigurosa construcción matemática y por supuesto algunos ejemplos de aplicación. Estas ecuaciones juegan un papel crucial en el análisis de muchos fenómenos físicos; además se centra en la aproximación por diferencias finitas de las ED ya mencionadas.

Es sumamente importante mencionar que fue un gran reto para los matemáticos lograr llegar a la solución analítica de muchas EDPs, incluyendo las clásicas, por ello se desea realizar en este proyecto de tesis un análisis de las distintas soluciones numéricas que se consideran intentos por aproximarse a la solución real.

1.1. Motivación histórica

En general el surgimiento de las ecuaciones diferenciales es un hecho digno de analizar a profundidad. La naturaleza misma es capaz ser descrita con la ayuda de muchas ED. Por ello su surgimiento se estudia tanto en la Matemática como en la Física. El mismo constante desarrollo de estas dos ciencias tan importantes se ha logrado con la ayuda de las EDO y EDP. Su desarrollo se ha dado principalmente gracias a la necesidad de describir cada uno de los fenómenos que no tenían explicación alguna, lo que llevó al surgimiento de las ecuaciones diferenciales. De acuerdo a un artículo de López se menciona que, "A mediados del siglo XVIII las ecuaciones diferenciales se convirtieron en una rama independiente y su resolución un fin en sí mismo." (López, 2008) En este siglo hubo un creciente interés por esta temática lo cual desencadeno un estudio a profundidad.

Explorar el origen de las ecuaciones diferenciales ayuda de manera significativa los distintos problemas que se logró resolver con ello y los personajes que ayudaron. Entre los matemáticos que más destacaron se encuentran Joseph Lagrange y Leonhard Euler. Cada uno por su parte aportó significativamente, Lagrange por una parte aportando con varios métodos analíticos para la resolución de muchas ecuaciones diferenciales ordinarias; y por otra parte Euler enfocado más en el desarrollo teórico de las EDO. Todo esto llevó a que las

Ecuaciones diferenciales se constituyeran como una rama de la Matemática muy separada de otras con su merecido puesto. Es por ello que la matemática es un árbol interconectado con otras ciencias y se nutre constantemente de los conocimientos de personajes que anteceden a otros como Isaac Newton.

Aunque todo esto no hubiese sido posible sin las herramientas matemáticas correctas, "Newton fue el primero en desarrollar un método sistemático para realizar operaciones (...) fue quien realmente encontró el cálculo diferencial tal como lo reconocemos hoy." (Team 2022) Cabe recalcar una de las ecuaciones diferenciales más famosas es la EDO de Newton presentada por primera ocasión en su obra maestra "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" en 1687. Una de las ecuaciones insignia que describe la aceleración de un cuerpo, misma que años después se conocería como la ecuación base de la misma Mecánica clásica. Siglos más tarde se daría un desarrollo más contundente, como lo menciona Nápoles, "La física matemática del siglo XIX se centró principalmente en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la ecuación de onda también se convirtió en un tema importante de estudio" (Nápoles 2002) En este siglo en concreto se usaron más las EDOs para describir procesos esenciales para el desarrollo de varias industrias, fenómenos como el flujo de fluidos o la transferencia de calor. Todo ello posible gracias a celebres personajes como Joseph Fourier, Pierre Laplace y demás. Al mismo tiempo las EDPs se hicieron más necesarias, la creciente necesidad de tener ecuaciones con las que modelar fenómenos más complejos que implicaran no solo variaciones en el tiempo sino también el espacio.

Un ejemplo claro fue en la creciente necesidad por parte de las industrias por entender el comportamiento de los materiales en presencia de calor. Este fenómeno descrito por una EDP muy clásica y bastante conocida, usada para describir la propagación de calor en un medio cualquiera. Esta es la ecuación de calor, misma que se expresa matemáticamente como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde:

$$\begin{aligned} u &: \text{función de distribución de temperatura} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &: \text{tasa de cambio de la temperatura} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &: \text{variación espacial de la temperatura} \\ k &: \text{constante de difusión} \end{aligned}$$

Ampliando un poco más sobre las EDP, se tiene que el trabajo, ya mencionado anteriormente, perteneciente a d'Alembert y Lagrange ayudó enormemente al desarrollo de la teoría de ondas, más específicamente a la ecuación de advección. Hoy en día las EDPs son extensamente usadas, así lo afirma el investigador (Stewart, 2016) "Se utilizan en la predicción meteorológica, la modelización climática y muchos otros campos. Las EDP también son un tema matemático rico y hermoso por derecho propio." Finalizando es importante mencionar que entre las EDPs más conocidas se encuentran las ecuaciones de Maxwell que constituyen el principio del Electromagnetismo, más reciente aún la ecuación de Schrödinger sustancialmente importante para la Mecánica cuántica y demás ecuaciones diferenciales representativas.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Aproximar numéricamente el sistema oscilatorio subamortiguado y la ecuación de onda utilizando el método de diferencias finitas, mediante la creación de un algoritmo en Python.

1.2.2. Objetivos específicos

- Investigar y comprender los fundamentos teóricos de las ecuaciones diferenciales, el método de diferencias finitas y el sistema oscilatorio subamortiguado.
- Explorar la construcción matemática de las 2 ecuaciones diferenciales planteadas, estudiando conceptos relevantes para el correcto entendimiento de la matemática subyacente.
- Averiguar sobre un modelo matemático que describa el comportamiento del sistema oscilatorio subamortiguado basado en EDs relevantes.
- Implementar un algoritmo utilizando el método de diferencias finitas para obtener una aproximación numérica de las soluciones para ambas ecuaciones diferenciales descritas.

Capítulo 2

REVISIÓN DE LITERATURA

En el presente capítulo se hablará a profundidad de 3 temas centrales. La EDO que describe un sistema oscilatorio subamortiguado, la EDP de la ecuación de onda y la técnica de diferencias finitas. Temas considerados esenciales para construir una base matemática sólida y confiable para el desarrollo del trabajo. Para ello se inició investigando todo lo referente a ecuaciones diferenciales, siendo uno de los pilares para la presente investigación.

2.1. Ecuaciones Diferenciales

Existen dos tipos de ecuaciones diferenciales, las ordinarias y las parciales. Para aclarar la diferencia entre estas dos ecuaciones se expondrán ejemplos sencillos, además de su definición. También se definirá la solución de una ecuación diferencial, y se planteará un problema de valores iniciales para este tipo de ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales son una de las principales herramientas en la modelización matemática de fenómenos físicos y naturales. Es por ello que tienen una gran importancia en la comprensión científica moderna de fenómenos como el sonido, el calor, la difusión, la electrostática, la electrodinámica, la termodinámica, la dinámica de fluidos, la elasticidad, la mecánica cuántica, entre otros. Muchas de estas ecuaciones se deducen de sistemas dinámicos, y con su ayuda se logra resolver variados problemas de ingeniería, biología, física y demás campos de las ciencias.

2.1.1. Definición de una Ecuación Diferencial

Para una mejor comprensión del concepto matemático de una ED son necesarias las definiciones que se presentan a continuación:

Las ecuaciones diferenciales se centran en el comportamiento de una función desconocida en relación con sus derivadas.

Definición 1. *Sea f una función con variables reales (ya sea con respecto a una variable o más). Se define una* ecuación diferencial (ED) *como aquella en la que están involucradas la función f que depende de x_1, x_2, ..., x_n variables sucesivas; con $n \in \mathbb{N}$*

Estas sucesivas derivadas se denotan como:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}, \ldots$$

donde $\quad i, j, k \in \mathbb{N}$

y así sucesivamente, dependiendo de la cantidad de variables adicionales que estén presentes en la función.

Si la función f depende de varias variables, podemos extender esta notación para denotar las derivadas parciales. Por ejemplo, si f es una función de dos variables x e y, la derivada parcial de f con respecto a x se denotaría como $\frac{\partial f}{\partial x}$, y la segunda derivada parcial con respecto a x se denotaría como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Antes de continuar se debe hablar sobre el orden de una ED. Este se refiere refiere al nivel más alto de la derivada que se presenten en una ecuación.

Recuérdese que, las ED ayudan a entender la relación entre una variable dependiente (la función f o y), y las variables independientes que la definen $(x_1, x_2, ..., x_n)$, usando las derivadas de f. Dado que las funciones en una ED pueden estar definidas por una o por varias variables independientes; esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 2. *Existen dos tipos de ecuaciones diferenciales:*

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)*: cuando f es una función de una única variable independiente: $y = f(x)$.*

- Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)*: cuando f es una función de dos o más variables independientes: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Obsérvese que una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que impone relaciones entre las diversas derivadas parciales de una función de varias variables reales. Mientras que la EDO sólo relaciona las derivadas de orden n respecto a una sola variable.

Así mismo es de vital importancia recalcar las formas en que se puede expresar matemáticamente una ecuación diferencial para una EDO. Por una parte se tiene las ya conocidas forma explicita e implícita y la forma normal.

Definición 3. *(Forma explicita) Sea una ecuación diferencial ordinaria donde la forma explícita se obtiene cuando la derivada de más alto grado o de mayor orden de la función desconocida $y(x)$ está despejada. En esta forma, el primer miembro contiene la derivada y en el segundo miembro los demás términos.*

Definición 4. *(Forma implícita) Sea una ecuación diferencial ordinaria donde su forma implícita se da cuando toda la ED se encuentra igualada a 0. esto se da teniendo todos los términos en el primer miembro y 0 en el segundo.*

Definición 5. *La forma normal de una ecuación diferencial ordinaria se refiere a aquella en la que se expresa la derivada de más alto grado de la función desconocida $y(x)$ como función explícita de x, y todas las demás derivadas de menor grado se encuentran agrupadas en el primer miembro.*

Ahora bien, a manera de ejemplificar las definiciones anteriormente expresadas. Una ecuación diferencial parcial en general se puede expresar mediante las 3 formas mencionadas.

Forma explicita:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^n y}{\partial t^n}\right)$$

donde $y = y(x, y, z, t)$ representa la variable dependiente. Esta forma implícita de las ecuaciones diferenciales parciales involucra una función multivariable F que relaciona la función desconocida y y sus derivadas parciales con respecto a x y t.

Forma implícita:

$$F(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^n y}{\partial t^n}) = 0$$

Forma normal:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^n y}{\partial t^n}\right)$$

En lo referente a ecuaciones diferenciales, la ED lineal es un tipo de ED particularmente usada, por lo que cabe mencionar su definición.

Definición 6. *Una ED lineal se define como una ecuación en la que sus funciones desconocidas y sus derivadas aparecen en forma lineal. En otras palabras, aparecen elevadas a la primera potencia (1) y multiplicadas ya sea por constantes o funciones conocidas. Este tipo de ecuaciones diferenciales tienen la forma general:*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Donde $y^{(n)}(x)$ es la n-ésima derivada de la función $y(x)$, $a_i(x)$ son coeficientes que pueden depender de la variable x, y $f(x)$ es una función conocida.

Las ED lineales son especialmente atractivas por su misma estructura lineal que conduce a soluciones analíticas en muchos casos. Este hecho es sumamente importante ya que con ello se puede obtener resultados precisos. Cabe destacar que, si no existe linealidad la resolución de las ED se puede complicar significativamente. Estas ecuaciones se usan para modelar fenómenos con la característica de tener relaciones entre sus variables que cambian de manera proporcional. Estas capturan con precisión cambios uniformes en las variables, siendo esenciales en situaciones donde las interdependencias se rigen por proporcionalidades lineales.

2.1.2. Ejemplos sencillos ED

Es importante ejemplificar lo dicho, para ello se presenta la siguiente sección. En ella se trabaja con ejemplos básicos pero muy ilustrativos de las ecuaciones diferenciales trabajadas.

Ejemplo 1 (Ejemplo de una EDO)**.**

$$\begin{cases} y' = Axy, \\ \textit{donde } y = y(x) \textit{ y } A \textit{ es una constante.} \end{cases}$$

Ejemplo 2 (Ejemplo de una EDP). *Muchos aspectos de la vida cotidiana están regidos por las EDOs. Un ejemplo claro es la ecuación del crecimiento y decaimiento exponencial, donde se tiene el aumento de una sustancia radioactiva cualquiera, misma que puede ser expresada mediante la EDO:*

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q,$$

donde:

$$\begin{array}{cl} \dfrac{dQ}{dt} & : \textit{tasa de cambio de la cantidad de sustancia} \\ k & : \textit{constante de decaimiento radioactivo} \end{array}$$

Ejemplo 3 (Ejemplo de una EDP). *Es más común y realista su uso para analizar fenómenos físicos del mundo real donde se tiene más de una variable independiente. La ecuación de calor es un claro ejemplo donde se tiene como variables independientes, el tiempo t y el espacio x. Esta describe la distribución del calor en una región en concreto con el pasar del tiempo.*

Matemáticamente se describe como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde:

$$\begin{array}{cl} u = u(x,t) & : \textit{función de distribución de temperatura} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & : \textit{tasa de cambio de la temperatura} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & : \textit{variación espacial de la temperatura} \\ K & : \textit{constante de difusión} \end{array}$$

2.1.3. Soluciones de una ED

Definición 7. *En el ejemplo* (3)*, la función desconocida* $x(t)$ *se considera como la solución de la ecuación si la ecuación se satisface cuando se sustituye la función y sus derivadas en ella.*

Enfatizando así que la solución de una ecuación diferencial es una función, teniendo que al remplazar la solución en la ecuación debe necesariamente cumplirse con la igualdad. En este punto se debe destacar que la solución que se llegue a encontrar aporta con información coherente sobre el comportamiento de un sistema físico, tal y como se analizará en capítulos posteriores. Obsérvese que las soluciones son infinitas y dependen de varias variables de integración.

Ejemplo 4. *La solución de la EDO presentada en el Ejemplo 1 es:*

$$y(x) = Ce^{\frac{Ax^2}{2}}$$

Para llegar a esta solución se usa la técnica de Separación de variables. En el primer miembro todos los términos con variable x *y en el segundo todos los restantes:*

$$\frac{dy}{y} = Ax\,dx.$$

Seguidamente se integra en ambos lados de la ecuación respecto a sus variables. La integral de $\frac{dy}{y}$ *es* $\ln|y|$*, y la integral de* $Ax\,dx$ *es* $\frac{Ax^2}{2}$*:*

$$\int \frac{dy}{y} = \int Ax\,dx.$$

Se obtiene así que:

$$\ln|y| = \frac{Ax^2}{2} + C,$$

donde C *es una constante de integración.*

Se procede a desarrollar el logaritmo y así obtener una mejor expresión. Para ello se aplica la función exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$|y| = e^{\frac{Ax^2}{2}+C}.$$

Como se aprecia se tiene un valor absoluto, que se divide en un valor positivo y negativo, pero en este contexto la función y *solo puede ser positiva.*

Dado que e^C *también es una constante, podemos reescribir la solución general de la siguiente manera:*

$$|y| = \hat{C}e^{\frac{Ax^2}{2}},$$

donde se conoce que $\hat{C}$ *es constante y además positiva,* $\hat{C} = e^C > 0$

La solución general para la EDO es:

$$y(x) = \hat{C}e^{\frac{Ax^2}{2}},$$

Ejemplo 5. *La solución de la EDP presentada en el Ejemplo 3 es:*

$$u(x,t) = C \cdot e^{At}$$

Para llegar a esta solución se usa la técnica de suposición de separación. La suposición a realizarse es que la función $u(x,t)$ puede ser igual al producto de dos funciones, una función que solo depende de x y otra solo de t:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Sustituyendo en la EDP original se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(X(x) \cdot T(t)) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x) \cdot T(t)).$$

$$X(x) \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} = k \cdot T(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

Ahora se procede a dividir toda la ecuación entre $X(x) \cdot T(t)$:

$$\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} = k\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

Partiendo del hecho que el primer miembro solo depende de t y el segundo miembro solo depende de x. Dado que es una igualdad ambos lados son iguales y se pueden igualar a una misma constante. Se llama a esta constante $-\lambda^2$. Esta constante debe ser negativa para no obtener soluciones triviales. Ya que las soluciones deben tener sentido físico y así puedan describir fenómenos reales.

$$\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\lambda^2$$

$$k\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

a continuación se resuelve la EDO resultante tanto para $T(t)$ como para $X(x)$.
Se resuelve la ecuación diferencial ordinaria para $T(t)$ integrando respecto a t a ambos lados:

$$\int \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \int -\lambda^2 dt$$

$$\ln |T(t)| = -\lambda^2 t + C_1$$

donde C_1 es una constante de integración

Se procede a resolver el logaritmo exponenciando ambos lados de la ecuación:

$$e^{ln|T(t)|} = e^{-\lambda^2 t + C_1}$$

$$|T(t)| = e^{-\lambda^2 t} \cdot e^{C_1}$$

considerando a $C_2 = e^{C_1}$ se tiene:

$$|T(t)| = e^{-\lambda^2 t} \cdot e^{C_2}$$

La solución general para esta primera parte es una combinación lineal de soluciones exponenciales:

$$T(t) = C_1 e^{\lambda^2 t} + C_2 e^{-\lambda^2 t}$$

donde C_1 y c_2 son constantes de integración

Para la segunda parte se tiene la ecuación diferencial ordinaria para $X(x)$:

$$k\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

$$\cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{k}\lambda^2 X(x)$$

Para esta resolución se tiene en cuenta que se trata de una EDO de segundo grado con coeficientes constantes. Entonces proponiendo una solución en forma de función $X(x) =$

e^{mx} donde m es una es una constante a determinar, se tiene:

$$\frac{d^2e^{mx}}{dx^2} = -\frac{1}{k}\lambda^2 e^{mx}$$

reescribiendo la segunda derivada se tiene:

y se procede a resolver esta ecuación básica:

$$m^2 e^{mx} = -\frac{1}{k}\lambda^2 e^{mx}$$

$$m^2 = -\frac{1}{k}\lambda^2$$

$$m = \pm i\frac{1}{k}\lambda$$

Como se observa se tiene dos posibles soluciones que son complejas conjugadas, donde:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{k}\lambda. \end{cases}$$

Por tanto la solución general es:

$$X(x) = C_3 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

remplazando los valores se tiene:

$$X(x) = C_3 \cos\left(\frac{1}{k}\lambda x\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\lambda x\right)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración.

Para finalizar se debe recordar el hecho de que la función u es igual a $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ o también $u(x,t) = T(t)\cdot X(x)$. Por tanto la solución a la EDP es igual la combinación de la soluciones a $X(x)$ y $T(t)$:

$$u(x,t) = (C_1 e^{\lambda^2 t} + C_2 e^{-\lambda^2 t}) \cdot \left[C_3 \cos\left(\frac{1}{k}\lambda x\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\lambda x\right)\right]$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de integración.

2.1.4. Problemas de valores iniciales: soluciones particulares

Para terminar con esta sección, se presenta a continuación el conocido como problema de valores iniciales (PVI).

Definición 8 (PVI). *Un problema de valores iniciales consiste en una ecuación diferencial (ya sea ordinaria o parcial), sujeto a ciertas condiciones sobre la función y sus derivadas, en un punto dado x_0.*

Un PVI se considera de gran relevancia ya que brinda una solución particular de la ecuación diferencial. Es aquella que verifica no sólo la ecuación, sino también las condiciones impuestas. Esto se logra primero encontrando la solución general de la ED y seguidamente aplicando las condiciones iniciales del problema a la solución. Al final se consigue una solución única.

Por ejemplo, si la ED es ordinaria de grado 1, esto es, sólo involucra a $y = f(x)$ y su derivada y', la solución de la EDO tendrá una única variable libre, y un PVI asociado a esta EDO (en su forma explícita) sería:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \text{ para } x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

de tal forma que con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ se determina la variable libre. Si en cambio la ED es ordinaria de grado 2, esto es, involucra a $y = f(x)$ y sus derivada y', y'', la solución de la EDO tendrá dos variables libres, y un PVI asociado a esta EDO (en su forma explícita) sería:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y') \text{ para } x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

de tal forma que con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ se determinan las dos variables libres de la solución general. Con frecuencia estas condiciones iniciales se plantean en el punto $x_0 = 0$. Las soluciones no siempre existen en un intervalo suficientemente grande, o son únicas. Existen ciertos teoremas locales de existencia y unicidad para PVI, pero quedan lejos de este trabajo.

Ejemplo 6. *Sea el siguiente PVI asociado a una EDO de orden 1:*

$$\begin{cases} y'(x) = x \\ y(1) = 7 \end{cases}$$

Si se integra en ambos lados de la ecuación $y'(x) = x$ con respecto a x, entonces se obtiene que la solución de la EDO es:

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Ahora bien, la ecuación (2.1) *no se considera como una respuesta para el PVI. Para ello se debe aplicar la condición inicial dada:*

$$y(1) = \frac{1}{2} + c = 7$$

despejando c, se encuentra que el valor de c es: $c = \frac{13}{2}$ Al final la respuesta correcta y válida al PVI planteado es:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{13}{2}$$

donde esta es la solución única.

2.2. Sistemas oscilatorios

Ahora bien, iniciando con el estudio de los sistemas oscilatorios, su definición y ejemplos de aplicación. Posteriormente se aborda la ecuación de onda con todos sus elementos, mismos que rodean a esta ecuación. Esta es considerada una EDP fundamental en el estudio de fenómenos ondulatorios, como el sonido y la propagación de ondas en medios físicos. Para en capitulos posteriores revisar la técnica de diferencias finitas, una conocida herramienta para resolver muchas EDOs y EDPs sin solución analítica. Con este desarrollo en detalle se espera poder aplicar esta técnica para resolver la ecuación de onda y cómo obtener soluciones aproximadas para sistemas oscilatorios subamortiguados.

El sistema oscilatorio subamortiguado es un caso especial de los sistemas oscilatorios. Es por ello que primero se comienza abordando la definición de estos últimos y su relación con la conservación de la energía mecánica. Se observará la importancia de analizar la energía cinética y potencial involucrada en estos sistemas, comprendiendo cómo se mantiene en equilibrio y permitiendo así la persistencia de oscilaciones a lo largo del tiempo. El primer caso es el movimiento oscilatorio armónico simple. Claro está sin olvidar los otros sistemas donde se presentan fuerzas disipativas, en los cuales se encuentran los sistemas oscilatorios amortiguados. En esta sección se da una perspectiva general de los sistemas oscilatorios donde se trabajará con algunas definiciones.

Definición 9. *Un sistema oscilatorio es un fenómeno de movimiento especial, en el cual un objeto experimenta una serie de desplazamientos alternantes hacia adelante y hacia atrás alrededor de una posición de equilibrio particular.*

Definición 10. *El movimiento oscilatorio se define como una vibración o transformación de la energía asociada a un movimiento periódico o sinusoidal.*

La repetición en el movimiento oscilatorio se da en intervalos regulares. Con lo que se tiene una regularidad muy predecible. El objeto cruza repetidamente por la posición de equilibrio.

Ejemplo 7. *Algunos ejemplos son el péndulo, movimiento de un columpio, mareas, movimiento de una cuerda en un instrumento musical o la oscilación de moléculas en una sustancia sólida.*

Existen 3 tipos de movimientos oscilatorios utilizados en el análisis de fenómenos físicos repetitivos. Estos tipos son: movimiento oscilatorio sin amortiguamiento, con amortiguamiento y con la presencia de fuerzas externas. Para brindar una comprensión conceptual más sólida, se presentan a continuación ejemplos básicos que capturan la esencia de cada tipo:

Ejemplo 8. *(Sistema conservativo sin amortiguamiento) Se considera un sistema en el cual un resorte se encuentra suspendido verticalmente sin la influencia de ninguna fricción. Observe que no hay viscosidad por lo que la fricción es 0 ya que para este ejemplo se trata con un caso ideal. Se conoce que el muelle realmente si tiene masa pero para en este caso idealmente no. La ausencia de masa en el resorte permite que las oscilaciones se mantengan sin disminuir su amplitud con el tiempo, creando un movimiento periódico y armónico.*

Ejemplo 9. *(Sistema con fricción) Se considera un sistema en el cual un resorte se encuentra suspendido verticalmente. Sin embargo, en este caso se introduce la influencia de la fricción. La fricción actúa como una fuerza que se opone al movimiento del sistema, lo que resulta en una disminución gradual de la amplitud de las oscilaciones a lo largo del tiempo. Este ejemplo ilustra cómo la presencia de la fricción puede afectar el comportamiento de un sistema oscilatorio, llevándolo eventualmente a detenerse en una posición de equilibrio.*

Ejemplo 10. *(Sistema con fuerzas externas) Se considera un sistema oscilatorio en el cual un resorte se encuentra suspendido verticalmente. Sin embargo, en este caso, se aplica una fuerza externa al sistema, misma que es periódica. La aplicación de esta fuerza externa puede modificar el comportamiento natural del sistema. Dependiendo de la frecuencia y amplitud de la fuerza externa, el sistema podría presentar oscilaciones en resonancia. Este ejemplo demuestra cómo las fuerzas externas pueden influir en el comportamiento de un sistema oscilatorio.*

En las siguientes subsecciones se analizará más a profundidad cada uno de estos casos. Además de estudiar a detalle cada de una de las ecuaciones diferenciales asociadas a estos casos.

En el análisis de los sistemas oscilatorios existe un tema central para el entendimiento de las bases. La interconexión entre la física clásica y las ecuaciones diferenciales, este tema es esencial para comprender estos fenómenos. Una herramienta matemática crucial es la Segunda ley de Newton, una piedra angular en la mecánica clásica. Esta llega a vincular la fuerza y la aceleración que experimenta un objeto e movimiento.

Ahora bien, si se quiere entender e interrelacionar estos conocimientos con las ecuaciones diferenciales es vital mencionar como esta EDO (para el sistema oscilatorio) nace de la tan conocida Segunda ley de Newton, misma que en su forma general se expresa:

$$\sum F = ma$$

Donde:

$$\begin{aligned} \sum F &: \text{Fuerza neta} \\ m &: \text{masa del objeto en cuestión} \\ a &: \text{aceleración del mismo objeto} \end{aligned}$$

La relación entre la 2da ley de Newton y el movimiento armónico simple(al que se denotará a partir de ahora como MAS) es imprescindible para comprender el comportamiento de los sistemas oscilatorios y entender cada una de las fuerzas que actúan sobre estos movimientos para así finalmente llegar a la culminación del Sistema oscilatorio subamortiguado. Como se mencionó en el MAS se tiene una fuerza restauradora, misma que es descrita y modelada por la siguiente Ley de Hooke.

Definición 11. *El siguiente axioma establece que el alargamiento de un muelle es directamente proporcional al módulo de la fuerza que se le aplique, siempre y cuando no se deforme permanentemente dicho muelle.*

Al referirse con muelle se hace referencia a un resorte en general. Éste es usado para describir un dispositivo o sistema elástico y la ley está dada por:

$$F_{\text{res}} = -kx$$

El signo negativo en la fórmula se refiere principalmente al hecho de que el resorte ejerce una fuerza restauradora. Como ya se mencionó, esta fuerza se opone al desplazamiento del objeto desde su posición de equilibrio. Cuando el objeto se aleja, el resorte ejerce una fuerza en la dirección opuesta para restaurar el equilibrio. Por tanto la fuerza está dirigida en sentido contrario y por ello se tiene el signo negativo.

2.2.1. Sistema oscilatorio sin amortiguamiento

El ser humano vive en un mundo lleno de patrones y fenómenos repetitivos, manifestados en diversas formas. Desde las vibraciones de una cuerda de guitarra hasta el vaivén de un péndulo. Cada uno de los fenómenos vibratorios se compone de movimientos periódicos y para ello necesariamente se debe entender el (MAS).

Definición 12. *El Movimiento armónico simple (MAS) es un tipo de movimiento oscilatorio, en el cual un objeto experimenta una trayectoria repetitiva de vaivén alrededor de una posición de equilibrio.*

Para hacer énfasis en el buen entendimiento se mencionarán algunas magnitudes físicas tales como:

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi}{\omega} & : \text{periodo} \\ f = \frac{1}{T} & : \text{frecuencia} \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} & : \text{frecuencia angular} \end{cases}$$

El movimiento periódico del MAS ocurre gracias a una fuerza restauradora. De acuerdo a la fórmula es proporcional a la distancia de la posición de equilibrio. Cuando se refiere a fuerza restauradora se tiene se tiene en cuenta la tendencia natural del sistema a regresar a su posición de equilibrio cuando se le aparta de ella. El mismo es posible describirlo mediante una ecuación diferencial que viene de la 2da ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Donde:

$$\begin{aligned} m &: \text{masa del objeto} \\ x(t) &: \text{posición del objeto respecto al tiempo} \\ k &: \text{constante del resorte} \end{aligned}$$

Esta resulta ser la ecuación diferencial ordinaria de la posición de una partícula para un Movimiento armónico simple. Se va a deducir esta EDO de orden 2 de dos formas diferentes:

Primera deducción: Iniciando con la primera deducción se tiene que es importante primero definir la posición de equilibrio:

Definición 13. *Sea un sistema físico, la posición de equilibrio se define como la posición en la cual la sumatoria de todas las fuerzas y energías presentes en el sistema se encuentran en equilibrio o balance. Siendo así no se tiene la presencia de la aceleración.*

Siendo así, matemáticamente se tiene que:

$$\sum F = 0$$

En otras palabras es el punto específico donde la fuerza neta no permite que se mueva de su estado de reposo o de movimiento a velocidad constante.

Un sistema mecánico conservativo se refiere a la preservación de la energía y por otra parte los puntos de equilibrio son los puntos exactos donde la suma de las fuerzas que actúa sobre ellos es cero. Siendo así que la energía mecánica total E del sistema mencionado se conserva, con lo cual se tiene que la suma tanto de la energía cinética C como de la energía potencial P permanece constante.

$$E = C + P = \text{cte} \tag{2.2}$$

Por su parte cada uno de los términos de la ecuación (2.2) se definen físicamente a continuación:

Definición 14. *La energía cinética es aquella energía que se consigue cuando el objeto en cuestión está en movimiento debido a la velocidad que adquiere. Es el tipo de energía que se asocia al movimiento de un cuerpo ya que se determina por la magnitud de la velocidad. Se puede expresar matemáticamente como:*

$$C = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde:

$$\begin{aligned} m &: \text{masa del objeto en movimiento} \\ v &: \text{velocidad del objeto} \\ k &: \text{constante del resorte} \end{aligned}$$

Definición 15. *La energía potencial por su parte se define como aquella energía asociada a la posición de un objeto. Y este a su vez en un campo de fuerzas como la fuerza elástica o la fuerza de gravedad.*

Cabe recalcar que ciertamente no se tiene una fórmula general que describa a la energía potencial. Pero sí que la hay cuando existe la presencia de un campo de fuerzas como se menciona. Siendo que si se presenta la fuerza elástica (como en el caso de un MAS) se tendrá una energía potencial elástica. Matemáticamente esta energía se describe como:

$$P_{\text{elást}} = \frac{1}{2}kx^2$$

k : constante elástica del resorte

x : deformación del resorte

y si la energía mecánica es constante, a lo largo del movimiento, entonces sus derivas con respecto al tiempo se anula:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Cabe detacar que esta deducción solo se puede usar para el M.A.S. ya que se define como un movimiento para un sistema conservativo. Partiendo de la energía cinética en el muelle y la energía potencial elástica trabajando con un sistema conservativo:

$$E = C + P = cte$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$$

Donde:

m : masa del objeto

v : velocidad del objeto

x : posición del objeto con respecto a la posición de equilibrio

K : constante del resorte

Entonces como el objeto se mueve con respecto al tiempo, $x \equiv x(t)$, y la velocidad es la derivada del desplazamiento, también con respecto al tiempo. Donde donde $x(t)$ es la función de movimiento del objeto oscilante. Por tanto:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{d}{dt}\text{cte}$$

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\dot{x}(t)[m\ddot{x} + kx(t)] = 0$$

como $v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ no es cero, dado que la partícula está el movimiento. Así mismo se tiene que como $v = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ y se deduce la EDO para un MAS:

$$m\ddot{x} + kx(t) = 0$$

Segunda deducción: Otra herramienta para deducir la EDO es la 2da Ley de Newton y una fuerza conocida que actúa sobre el sistema oscilatorio, la fuerza restauradora. Como se mencionó proviene del resorte y puede ser expresada como $F_{\text{elást}} = -kx$, donde k representa la constante del resorte. Usando la ya conocida fórmula de Newton, $F = ma$, al establecer una relación de igualdades entre ambas fuerzas, se obtiene:

$$-kx = ma \tag{2.3}$$

Donde:

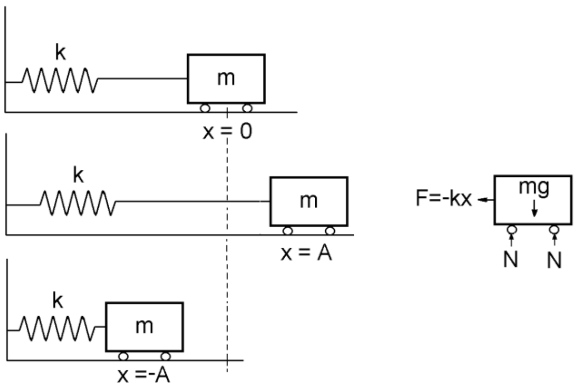
$$k : \text{constante del resorte}$$

Finalmente expresando algunos términos con otra notación como $x = x(t)$ (función desplazamiento) y $a = \ddot{x}(t)$ (función aceleración). Y acomodando la ecuación (2.3) se llega a obtener que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Por otra parte para observar de mejor manera cómo la fuerza restauradora del muelle influye en este movimiento oscilatorio. Y además cómo la fuerza es equivalente a la masa por la aceleración del objeto se tiene la siguiente figura 2.1:

Figura 2.1: Descomposición de fuerzas en el MAS



Fuente: Universidad Nacional del Rosario, 2021

Ambas fuerzas se ejercen sobre un objeto con función desplazamiento $x = x(t)$

<u>Soluciones del MAS</u>

Esta EDO se puede resolver por distintos métodos teniendo en cuenta que se trata de una EDO de segundo orden con coeficientes constantes. Por tanto para llegar a la función solución se tiene los siguientes pasos:

Partiendo del hecho de conocer de qué tipo de EDO se trata, lo que se desea encontrar ahora es una función solución $x(t)$ que satisfaga la ecuación. Se trata de llegar a una solución de la forma $x(t) = e^{rt}$ donde r es una constante que se busca determinar. Por tanto se calcula la primera y segunda derivada de $x(t)$ con respecto a la variable t:

$$\frac{dx}{dt} = re^{rt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}$$

Como siguiente paso se remplaza en la ecuación diferencial inicial:

$$mr^2e^{rt} + ke^{rt} = 0$$

Se factoriza el término e^{rt}:

$$e^{rt}(mr^2 + k) = 0$$

$$mr^2 + k = 0$$

Resolviendo esta nueva ecuación del factor se tiene:

$$r^2 = -\frac{k}{m}$$

$$r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como se observa se tiene raíces complejas y por tanto una solución general es:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t}$$

Pero se desea tener una expresión en términos de seno y coseno. Por tanto se aplica la identidad de Euler $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$.

Ahora bien remplazando en la ecuación anterior de $x(t)$ se tiene:

$$x(t) = A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t))$$

Cancelando las partes imaginarias al sumar los términos con coseno se tiene:

$$x(t) = (A + B)\cos(\omega t)$$

Así mismo se tiene una fase inicial:

$$x_0 = (A + B)\cos\phi$$

Finalmente conociendo esta fase inicial, la solución final es:

$$x(t) = (A + B)\cos(\omega t + \phi)$$

Donde:

$$A: \text{amplitud de la oscilación}$$
$$\omega: \text{frecuencia angular del MAS}$$
$$\phi: \text{fase inicial de la oscilación}$$

Es importante mencionar que la solución se da mediante una función coseno, donde el parámetro es $\omega t + \phi_0$ (variable independiente es t). Este resultado muestra claramente la manera periódica del movimiento, donde el objeto se mueve pasando por la posición de equilibrio con intervalos idealmente regulares. Además, es importante entender que la letra griega ϕ es vital para comprender el sistema, siendo este el único parámetro que determina el desplazamiento vertical de la oscilación a lo largo del tiempo. Además, se tiene la velocidad en función del tiempo, siendo que es posible encontrarla a partir de la posición. Se tiene que la posición es:

$$x(t) = (A + B)\cos(\omega t + \phi)$$

Para hallar la velocidad basta con derivar la posición ya dada:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left((A + B)\omega\cos(\omega t + \phi)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega(A + B)\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Siendo finalmente la velocidad con respecto al tiempo igual a:

$$v(t) = -\omega(A + B)\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Como se observa a grandes rasgos se tiene un movimiento donde no hay la presencia de fuerzas disipativas, siendo un sistema muy ideal. Esto debido a que en la realidad se tiene muchas fuerzas que hacen perder energía al sistema, tales como la resistencia al aire o la inevitable fricción.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Ejemplo 11. *Se tiene un resorte con una masa suspendida en su extremo. Inicialmente la* *masa se desplaza 0.5 metros hacia la derecha desde la posición de equilibrio y luego se suelta desde el reposo. La masa del objeto es de $2Kg$ y la constante del resorte $k = 100N/m$. Encuentre la ecuación que describe la posición de la masa asumiendo que no hay fuerzas disipativas.*

En primer lugar definiendo las condiciones iniciales se tiene que:

$$x(t) = A\cos(wt + \phi)$$

$X(0) = 0{,}5m$ *y* $\dot{x}(0) = 0m/s$. *Aplicando la ecuación solución para esta ecuación se tiene:*

$$x(0) = A\cos(w * 0 + \phi) = 0{,}5$$

$$x(0) = A\cos(\phi) = 0{,}5$$

Entonces:

$$w = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}}{2\,\mathrm{kg}}} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Ahora se calcula ϕ utilizando las condiciones iniciales $x(0) = 0m/s$:

$$\dot{x}(0) = -Aw\,\mathrm{sen}(w * 0 + \phi)$$

$$\dot{x}(0) = -Aw\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$\phi = \arcsin\left(-\frac{x_1}{Aw}\right) = \arcsin\left(-\frac{0}{(2\,\mathrm{kg}) \cdot (10\,\mathrm{rad/s})}\right) = 0$$

$$\phi = 0$$

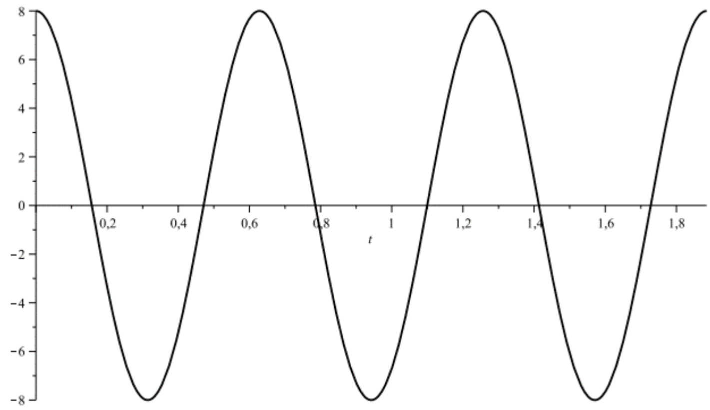
Ahora bien, la fase inicial es $\phi = 0$ por lo que remplazando en la anterior ecuación se tiene que

$$A = 0{,}5$$

Finalmente como se observa en la fórmula y la figura 2.2, la solución completa para el ejercicio sobre el Sistema oscilatorio sin amortiguación es:

$$x(t) = 0{,}5\cos(10t)$$

Figura 2.2: Oscilación sin amortiguamiento



2.2.2. Sistema oscilatorio con amortiguamiento

Otro caso interesante y mucho más práctico es el Sistema oscilatorio con amortiguamiento. Un sistema mucho más apegado a la realidad donde existen muchas variables a analizar y más caos. Algo normal en la naturaleza y los fenómenos de la vida diaria. A medida que introducimos el concepto de amortiguamiento, se agregan más variables y dinámicas, lo que conduce a un comportamiento aún más diverso y a menudo caótico.

Definición 16. *Un sistema oscilatorio amortiguado es aquel en el cual un objeto o sistema experimenta oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio, pero estas oscilaciones disminuyen gradualmente con el tiempo debido a fuerzas de amortiguamiento presentes en el sistema.*

La importancia de este sistema radica en la presencia omnipresente de ondas. En su mayoría no es muy visible al ojo humano, por lo que no se lo relaciona y por consiguiente no le da su debida importancia. Uno de los hechos mas impresionantes es el comportamiento dual onda-partícula de la materia que casi todo esta compuesto. Desde el hermoso sonido que emite una guitarra al vibrar hasta el inigualable murmullo de las olas, las oscilaciones están en toda la naturaleza.

El sistema en mención puede ser descrito por la siguiente EDO:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Donde:

$$\begin{aligned} x &: \text{posición del objeto en el tiempo t} \\ k &: \text{constante del resorte} \\ c &: \text{coeficiente de amortiguamiento} \end{aligned}$$

La deducción de la ecuación diferencial para un Sistema oscilatorio con amortiguamiento se inicia teniendo en cuenta la fuerza de amortiguamiento y la fuerza restauradora. La fuerza restauradora la cual proviene del resorte y se representa como

$$F_{\text{elást}} = -kx$$

. Y por supuesto la ecuación de la 2da Ley de Newton

$$F = ma$$

. Al incorporar la fuerza de amortiguamiento

$$F_{\text{amort}} = -cv$$

, se tiene que:

$$\begin{cases} c, \text{coeficiente de amortiguamiento} \\ v, \text{velocidad del objeto} \end{cases}$$

la combinación de ambas fuerzas lleva a la siguiente expresión:

$$-kx - cv = ma$$

La ecuación se divide por la masa m para obtener la aceleración a despejada totalmente:

$$\frac{-kx - cv}{m} = a$$

Reconociendo que a puede ser expresada de igual forma como:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

remplazando finalmente se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m} - \frac{cv}{m}$$

Al manipular un poco los términos y emplear $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, donde ω_0 es la frecuencia angular natural, la ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{c}{m}v$$

Con $v = \frac{dx}{dt}$, es posible reemplazar v en la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{c}{m}\frac{dx}{dt}$$

Finalmente, multiplicando ambos lados por m, se obtiene la ecuación diferencial del Sistema oscilatorio con amortiguamiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Reescribiendo la ecuación para un mayor entendimiento en la resolución se tiene que:

$$m\lambda + c + \lambda + k = 0$$

Al resolver la ecuación diferencial del sistema oscilatorio subamortiguado utilizando la fórmula general, emergen tres casos. Cada uno de estos merece analizarse por separado y especial atención. Usando la formula general para una ecuación de segundo grado se tiene:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

donde las raíces de la ecuación para este caso toman la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Dependiendo del discriminante de λ, más específicamente del signo de $c^2 - 4km$ se tendría 3 casos distintos:

En este sistema se tiene 3 casos:

Sistema oscilatorio sobre-amortiguado

A manera de definición y continuando con los 3 casos mencionados, se tiene que si $c^2 - 4mk > 0$, entonces la ecuación reescrita tendrá dos soluciones reales distintas y se considera un sistema sobre amortiguado:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

La solución a la ecuación diferencial para este caso viene dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Ejemplo 12. *Considérese una masa de 1 kg unida a un resorte con constante $k = 16N/m$ y coeficiente de amortiguamiento $\alpha = 4N\frac{m}{s}$. Si se libera la masa desde una posición inicial de $0{,}2m$ con velocidad inicial de $0{,}5\frac{m}{s}$, determine la ecuación de movimiento y la posición de la masa después de 3 segundos.*

La ecuación de movimiento para el caso sobre-amortiguado es: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

Donde $m = 0{,}5\,\text{kg}$, $\alpha = 20N\frac{m}{s}$ y $k = 10\frac{N}{m}$.
Las condiciones iniciales son $x(0) = -0{,}8\,\text{m}$ y $\dot{x}(0) = 1\frac{m}{s}$.
La solución general para este caso es:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda_1 = -5\,\text{s}^{-1} \text{ y } \lambda_2 = -10\,\text{s}^{-1}$$

Aplicando las condiciones iniciales, se obtiene los valores de las constantes c_1 y c_2:

$$c_1 = -0{,}8 \text{ y } c_2 = 0{,}6$$

Entonces, la ecuación de movimiento para este caso es:

$$x(t) = -0{,}8e^{-5t} + 0{,}6e^{-10t}$$

Para $t = 2$ segundos, es posible calcular la posición de la masa:

$$x(2) = -0{,}8e^{-10} + 0{,}6e^{-20} \approx -0{,}783\,\mathrm{m}$$

Sistema oscilatorio críticamente amortiguado

Por otro lado si $c^2 - 4mk = 0$, entonces la ecuación reescrita tendrá una única solución real y se considera un sistema críticamente amortiguado:

$$\lambda = \frac{-c}{2m}$$

La solución a la ecuación diferencial para este caso viene dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$$

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}$$

Ejemplo 13. *Considérese una masa de 0.3 kg conectada a un resorte con constante $k = 6N/m$ y coeficiente de amortiguamiento $\alpha = 5N/(m/s)$. Si la masa es desplazada* 0,4 *metros desde la posición de equilibrio con velocidad inicial de $-0{,}8m/s$, calcule la ecuación de movimiento y la posición de la masa en $t = 4$ segundos.*

La ecuación de movimiento para el caso críticamente amortiguado es:

$$m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + kx = 0$$

Donde: $m = 1\,\mathrm{kg}$
$\alpha = 5\,\mathrm{N/(m/s)}$
$k = 5\,\mathrm{N/m}$.
Las condiciones iniciales son $x(0) = 0{,}2\,\mathrm{m}$ y $\dot{x}(0) = 1\,\mathrm{m/s}$.
La solución general para este caso es:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

Aplicando las condiciones iniciales, se obtiene los valores de las constantes c_1 y c_2:

$$c_1 = 0{,}2 \text{ y } c_2 = 1$$

Entonces, la ecuación de movimiento para este caso es:

$$x(t) = (0{,}2 + t)e^{-5t}$$

Para $t = 3$ segundos, es posible calcular la posición de la masa:

$$x(3) = (0{,}2 + 3)e^{-15} \approx 0{,}187\,\mathrm{m}$$

Sistema oscilatorio subamortiguado

Finalmente y no menos importante, si $c^2 - 4mk < 0$, entonces la ecuación reescrita tendrá dos soluciones complejas conjugadas y se considera un sistema sobre-amortigado:

$$\lambda = \frac{-c \pm i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

Este es un sistema muy conocido en ciencias exactas como la matemática y carreras como la mayoría de las ingenierías. Sea un sistema en el cual las oscilaciones se producen de manera continua y disminuyen gradualmente en amplitud con el tiempo. En este tipo de sistema las fuerzas de amortiguamiento actúan de manera más débil en comparación con las fuerzas restauradoras"

Ahora bien, recobrando el hilo anterior, se conoce que el bello sonido que emite una guitarra no es perpetuo, sino que deja de oscilar después de unos segundos. Esto debido a una variedad de factores que condicionan este movimiento oscilatorio, en su mayoría nada es etéreo, en este caso sea por el coeficiente de amortiguamiento o por la posición en que se encontraba el sistema o por el rozamiento del aire. El sistema dejará de oscilar y ciertamente esto es lo que plantea el subamortiguamiento.

La solución a la ecuación diferencial para este caso viene dada por:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{c}{2m}t}(\cos(\omega_d t) + c_2 e^{-\frac{c}{2m}t}\sin(\omega_d t))$$

Presentando de mejor una mejor manera, misma que es mucho más conocida:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t))$$

Donde:

$$c_1 y c_2 : \text{constantes en función de las condiciones iniciales}$$
$$\lambda_1 y \lambda_2 : \text{raices de la ecuación característica}$$

La frecuencia angular del oscilador amortiguado, dada por:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{4mk - c^2}{4m^2}}$$

Ejemplo 14. *Se tiene una masa de* $0{,}5kg$ *suspendida en un resorte con constante* $k = 10N/m$ *y coeficiente de amortiguamiento* $\alpha = 2N/(m/s)$*. Si liberamos la masa desde una posición inicial de 0.3 metros con velocidad inicial de 0 m/s, encuentra la ecuación de movimiento y la posición de la masa en el tiempo* $t = 2$ *segundos.*

La ecuación de movimiento para el caso subamortiguado es:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Donde $m = 0{,}5\,\text{kg}$, $\alpha = 2\,\text{N}/(\text{m/s})$ y $k = 10\,\text{N/m}$.
Las condiciones iniciales son las siguientes: $x(0) = 0{,}3\,\text{m}$ y $\dot{x}(0) = 0\,\text{m/s}$.
La solución general para este caso es:

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t\right)\right)$$

Aplicando las condiciones iniciales, se obtiene los valores de las constantes c_1 y c_2: $c_1 = 0{,}3$

$$c_2 = -\frac{\alpha}{2m}c_1 = -0{,}15$$

Entonces, la ecuación de movimiento para este caso es:

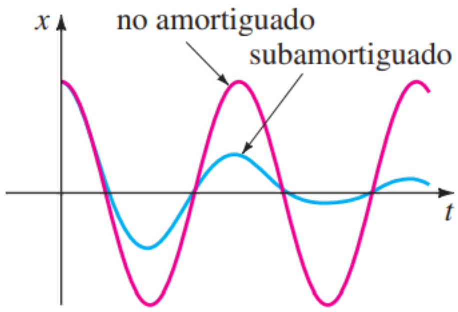
$$x(t) = 0{,}3e^{-t}\left(\cos(3t) - 0{,}5\sin(3t)\right)$$

Para $t = 2$ segundos, es posible calcular la posición de la masa de la siguiente forma:

$$x(2) = 0{,}3e^{-2}\left(\cos(6) - 0{,}5\sin(6)\right) \approx -0{,}032\,\mathrm{m}$$

En este punto cabe recalcar la diferencia entre el movimiento de un sistema oscilatorio no amortiguado y subamortiguado. Para ello se presenta la siguiente figura 2.3:

Figura 2.3: Oscilación no amortiguada y subamortiguada



Dennis Zill y Warren Wright, 2013

En la figura se observa como la presencia fuerzas disipativas influye enormemente en el camino que van tomando ambos movimientos. Claramente se observa como inician a la par pero con el pasar del tiempo cambian radicalmente.

Como ya se habló el termino sub-amortiguamiento es un caso particular de los sistemas oscilatorios donde el sistema va disminuyendo su amplitud en función del tiempo, siendo una de sus características principales. Es sumamente importante comprender cada una de esas características y factores inmersos. Con ello se puede predecir de mejor manera el comportamiento de estos y otros sistemas oscilatorios. En cuanto a la importancia de esta característica en las distintas aplicaciones se tiene que según Johnson (2018), .El sub-amortiguamiento en los sistemas de monitoreo médico puede resultar en respuestas inexactas y potencialmente peligrosas, lo que subraya la importancia de garantizar un amortiguamiento adecuado para mantener la precisión y la seguridad en la monitorización de los pacientes"(p. 125).

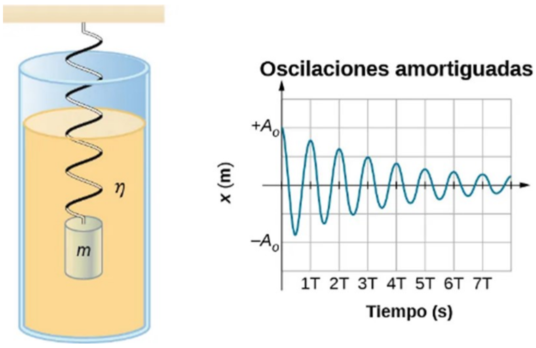
El amortiguamiento en general es una característica crucial a tener en cuenta y no una característica que se pueda pasar por alto, más aún al analizar la estabilidad del sistema. En específico el sub-amortiguamiento se da cuando el coeficiente es menor al valor crítico. Esto puede ser crítico y problemático en entornos como la medicina, donde la precisión y la seguridad debem ser prioridd en todo momento.

Aplicaciones en ciencia y tecnología

Sistema masa resorte oscilante en un fluido viscoso

Como se aprecia, en la figura 2.4 se tiene un Sistema masa resorte con masa m sumergido en un fluidos viscoso n. Y en la parte derecha se observa las oscilaciones que experimenta la masa a través del tiempo. A simple vista se observa que hay un cambio en la onda con el pasar de tiempo. De igual forma se tiene que el eje “x” (horizontal) representa el tiempo medido en segundos y en el eje “y” (vertical) es el desplazamiento de la masa medido en metros. Entre otras variables se aprecia que el rango de desplazamiento sólo va desde $-A_o$ hasta A_o, con lo que se tiene varios máximos y mínimos, y por supuesto T que representa el periodo de las oscilaciones.

Figura 2.4: Sistema oscilatorio de un fluido viscoso



Fuente: Rice university, 2021

Por cada fracción de tiempo se reduce la amplitud, siendo una relación inversamente proporcional. Así pues se cumple una de las características del Sistema oscilatorio subamortiguado, donde la amplitud de cada parte de onda va disminuyendo. Esta disminución se da hasta tener una onda completamente plana paralela al eje del tiempo. Con lo cual se infiere que en cada ciclo la amplitud de las oscilaciones va reduciéndose debido a la presencia del coeficiente de amortiguamiento. En lo referente al periodo y la frecuencia, estos se mantienen constantes pero si bien es cierto la energía interna del sistema se va disipando. Esto en términos de Física se da por la fuerza de amortiguamiento, siendo no conservativa. Esta energía al disiparse hace que el sistema pierda velocidad, en consecuencia la velocidad es menor y el movimiento también. Esta energía generalmente se refiere a energía térmica.

Amortiguadores de vibración

Una vez que se ha comprendido de manera asertiva el Sistema oscilatorio subamortiguado es posible comprender una de sus aplicaciones más populares, los famosos amortiguadores de vibración. Según el artículo "Vibration Damping: Technologies and Solutions"de la Society of Automotive Engineers (SAE) International, se menciona lo siguiente: "Los amortiguadores de vibración son dispositivos diseñados para reducir la amplitud de las vibraciones en una variedad de aplicaciones, desde sistemas mecánicos hasta estructuras civiles. Estos dispositivos utilizan principios del sistema oscilatorio subamortiguado para disipar la energía vibratoria."(SAE International, 2018). Un ejemplo visual del amortiguador de un vehículo se observa en la figura 2.5.

Siendo que aquí se intenta disminuir la amplitud de las ondas y por consiguiente lograr que no se sientan con tanta intensidad las vibraciones no deseadas. Sea por algun bache o irregularidades en la vía, principalmente se desea que la amplitud vaya disminuyendo gradualmente en el tiempo

$$x(t) < A$$

.

Figura 2.5: Amortiguador de vehículo

Fuente: Universidad de Córdoba, 2018

Estos dispositivos funcionan introduciendo una fuerza de amortiguación opuesta al movimiento del vehículo donde esta fuerza está relacionada con la velocidad de movimiento. Es posible expresarla mediante la siguiente ecuación:

$$F_{\text{amortiguación}} = -c\frac{dx}{dt}$$

Cabe decir que el dispositivo de la Figura 2.5, forma parte de sistemas más grandes con el fin de reducir las vibraciones no deseadas, siendo uno de los componentes clave. Ciertamente lo que realizan es ayudar a disipar de mejor manera la energía generada por vibraciones, consiguiendo así que la energía no ingrese y tampoco se transmita a otros componentes. Con ello se consigue minimizar, en su mayoría, los efectos perjudiciales y así mantener las estructuras por un tiempo más prolongado.

Sistemas de suspensión de un vehículo

Al momento de viajar en un vehículo de tracción a motor como un auto o una motocicleta, es evidente que el estado de las carreteras no siempre es perfecto. Baches y otros tipos de irregularidades en la vía generar vibraciones y sacudidas incómodas para los ocupantes del vehículo. He aquí la importancia de los sistemas de suspensión, de acuerdo a la investigación realizada por el ingeniero Gavilanez, "El sistema de suspensión desde su definición más simple es el encargado de mantener las ruedas del vehículo en contacto con el suelo, absorbiendo las vibraciones y movimientos provocados durante el desplazamiento del vehículo, para que estos golpes no sean transmitidos al bastidor o chasis a manera de golpe seco." (Gavilanez, 2016) Como se observa estos sistemas tienen una importancia crucial. Las constantes sacudidas no solo afectan a la comodidad, sino también la estabilidad y el control del vehículo. En este preciso punto entra en juego la aplicación del sistema oscilatorio subamortiguado en el diseño de amortiguadores de suspensión automotriz. Estos componentes ayudan a garantizar un viaje confortable y controlado, minimizando los efectos de las vibraciones no deseadas para el propio mantenimiento del vehículo.

Cuando el vehículo se encuentra con alguna irregularidad en la carretera, los amortiguadores subamortiguados brindan una respuesta automática con lo que la energía generada por el movimiento se disipa gradualmente. Reduciendo con ello la amplitud de las ondas generadas y de esta forma consecutivamente evitando oscilaciones excesivas que puedan dañar el vehículo a motor. Los amortiguadores permiten un cierto grado de oscilación en respuesta al impacto, esto gracias a su diseño tecnológico basado en los conocimientos del movimiento amortiguado. Esta acción de disipar la energía proporcionado por los amortiguadores subamortiguados mejora significativamente la experiencia al conducir. Además, los amortiguadores subamortiguados contribuyen a la estabilidad del vehículo al controlar el rebote excesivo. Cuando el vehículo pasa por un bache, por ejemplo, es natural que el sistema de suspensión oscile hacia arriba y hacia abajo. Sin embargo, los amortiguadores subamortiguados evitan que estas oscilaciones se prolonguen y causen daños mayores.

2.2.3. Sistema Oscilatorio con Vibraciones Forzadas

Un caso digno de un análisis extenso y de mencionarse en la presente investigación es el movimiento oscilatorio con vibraciones forzadas. Este movimiento en particular es una variante del oscilador armónico simple, en el cual entra en juego la influencia de una fuerza externa periódica. Además de caracterizarse por tener amplitud constante y ser de tipo $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

Definición 17. *Es aquel movimiento en el cual un objeto o sistema experimenta oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio debido a una fuerza externa aplicada periódicamente. Esta fuerza externa introduce una frecuencia específica en el sistema.*

Esta frecuencia puede provocar que las oscilaciones se amplifiquen o se modifiquen en relación con la frecuencia natural del sistema. La relevancia de este sistema radica en su capacidad para describir una gran gama de fenómenos. Estos puede ir desde oscilaciones en puentes debido a la fuerza del viento hasta la resonancia en instrumentos musicales que produzca perturbaciones indeseadas en los instrumentos.

El sistema en cuestión puede ser modelado por una EDO cuando se ve afectado por una fuerza externa periódica. Así mismo como en los casos anteriores se realiza su correspondiente deducción:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
x &: \text{posición del objeto en el tiempo t}\\
k &: \text{constante del resorte}\\
c &: \text{coeficiente de amortiguamiento}\\
F_0 &: \text{amplitud de la fuerza externa}\\
\omega &: \text{frecuencia angular de la fuerza externa}
\end{aligned}
$$

En este sistema, la fuerza externa periódica F_0 afecta al objeto y ciertamente puede generar respuestas oscilatorias que interactúan con la frecuencia angular ω. Algo a tener en cuenta es que si la frecuencia angular de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural del sistema ($\omega = \omega_0$), puede ocurrir una amplificación de las oscilaciones conocida como resonancia.

En el caso del movimiento oscilatorio con vibraciones forzadas, consideramos un sistema en el cual un objeto o sistema está sujeto a una fuerza externa periódica $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

Como ya se mencionó anteriormente para este tipo de deducciones son necesarias algunas leyes y ecuaciones como:

$$
\begin{cases}
F = ma & : \text{2da Ley de Newton}\\
F_{\text{elást}} = -kx & : \text{Fuerza elástica del resorte}\\
F_{\text{amort}} = -cv & : \text{Fuerza de amortiguamiento}
\end{cases}
$$

De la suma de estas fuerzas se obtiene la fuerza neta que actúa sobre el objeto:

$$F_{\text{net}} = F_{\text{elást}} + F_{\text{amort}} + F_{\text{ext}} = -kx - cv + F_0 \cos(\omega t)$$

Sustituyendo esto en la 2da Ley de Newton:

$$-kx - cv + F_0 \cos(\omega t) = ma$$

Dividiendo por la masa m del objeto:

$$-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) = a$$

Usando la relación $v = \frac{dx}{dt}$:

$$-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dado que $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, donde ω_0 es la frecuencia angular natural, la ecuación se simplifica a:

$$-\omega_0^2 x - \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Y finalmente, multiplicando ambos lados por m, se obtiene la EDO deseada:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t)$$

Esta ecuación describe cómo un sistema oscilatorio responde a una fuerza externa periódica y cómo esta fuerza afecta las oscilaciones del objeto de masa m.

2.3. Ecuación de onda

En el fascinante campo de física y el vasto campo de las matemáticas hay una ecuación que ha captado la atención de los científicos e investigadores por siglos. En esta sección se explorará el significado y algunas las aplicaciones de la ecuación de onda. Teniendo en cuanta su definición y la correspondiente deducción matemática de esta EDP. Además, se presentarán ejemplos para un correcto entendimiento de las bases teóricas relacionadas a este tema. Así mismo su interacción en distintos medios como el agua y el aire.

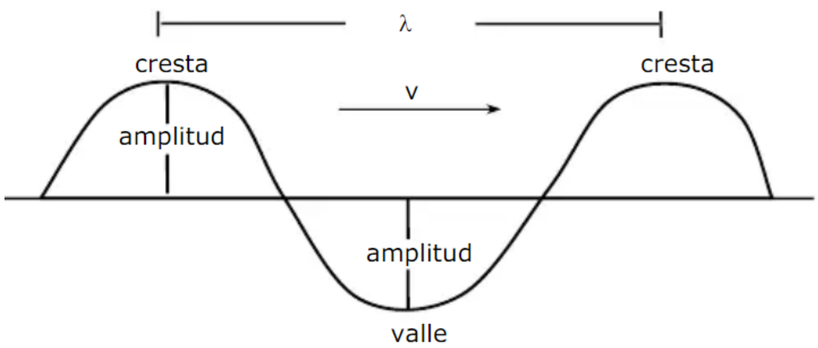
Esta ecuación diferencial es una EDP y es conocida como ecuación de onda o ecuación de advección. A lo largo del tiempo ha demostrado ser una herramienta invaluable para modelar una amplia gama de fenómenos ondulatorios con notables resultados, convirtiéndola en un pilar en el estudio de la propagación y comportamiento de ondas. De acuerdo a LeVeque se tiene que, “Es una de las ecuaciones más importantes en la física y se utiliza para modelar una amplia variedad de fenómenos, como las ondas sonoras y las ondas electromagnéticas.” (LeVeque, 2007) Con su gran elegancia ha logrado describir fenómenos que se creía no tenía explicación. Desde el hermoso trinar de las aves por la mañana hasta el hermoso sonido al rasgar un instrumento acústico, todas ellas se logran describir mediante esta grandiosa ecuación. Esta ecuación se considera una de las usadas para la exploración de cientos de misterios sobre el comportamiento ondulatorio de varias cosas.

Se considera correcto empezar con una de las definiciones mas importantes en este tema, la onda, para ello se ha recurrido al catedrático Pedro de Valdivia quien menciona:

Definición 18. *La onda es una perturbación que viaja a través del espacio o en un medio elástico, transportando energía sin que haya desplazamiento de masa.*

Cada una de las partes que la componen se enuncian en la siguiente figura 2.6:

Figura 2.6: Partes de la onda



:

Otro termino que ayuda a entender la onda es la de amplitud. Siendo este uno de los conceptos primordiales en el estudio de fenómenos ondulatorios. Representa una característica esencial que principalmente permite entender la variación de la oscilación a medida que se propaga en el tiempo o en el espacio. Esta se define como:

Definición 19. *Aquella distancia desde el punto más alto de la perturbación en el medio hasta el punto de equilibrio. Esto durante un ciclo completo de oscilación. Se representa por la letra A.*

2.3.1. Deducción de la Ecuación de Onda

Así mismo se debe considerar esta deducción para una onda que se propaga a lo largo de una cuerda, siendo el caso más básico e ilustrativo.

Recordando un poco como ya se mencionó se tiene en primer lugar la 2da Ley de Newton:

$$F = m \cdot a$$

De igual forma se tiene que ver la relación entre fuerza y cambio de movimiento lineal. Siendo el cambio de movimiento lineal un termino que explica la manera de cómo la velocidad de un objeto puede variar debido a la aplicación de una fuerza a lo largo del tiempo.

$$p = m \cdot v$$

Una fuerza neta aplicada sobre un objeto de masa m también puede relacionar con la variación de su momento lineal ($p = m \cdot v$) en función del tiempo (t):

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Otra relación se da en la relación entre cambio de momento lineal y la velocidad. El cambio de momento lineal a lo largo del tiempo también puede relacionarse con su aceleración (a):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a$$

La velocidad (v) de un objeto a lo largo del tiempo se representa mediante la derivada:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Así mismo se tiene que la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Realizando la correspondiente sustitución de la relación entre la aceleración (a) y la segunda derivada de (x) en la 2da ley de Newton, se tiene:

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ya casi finalizando se debe hablar sobre la relación con la constante de proporcionalidad c^2 (velocidad). En muchas situaciones físicas, se tiene una constante de proporcionalidad, para este caso c^2 que depende de las propiedades del medio en el que se de el movimiento. Esto finalmente lleva a encontrar la ecuación de onda:

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -c^2 \cdot m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

simplificando la masa del objeto m en ambos lados lados de la ecuación se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c^2 \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$$

2.3.2. Solución de la EDP de la ecuación de onda

Para resolver esta EDO se usará un método ya usado anteriormente. La técnica de Suposición de separación o separación de variables y así lograr resolver esta EDP de una manera apropiada.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Se realiza la suposición de que la función $u(x,t)$ puede ser igual al producto de dos funciones, una función que solo depende de x y otra solo de t:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Sustituyendo en la EDP original se tiene que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t}(X(x)\cdot T(t)) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)\cdot T(t)).$$

$$X(x)\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = c^2\cdot T(t)\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

Ahora se procede a dividir toda la ecuación entre $X(x)\cdot T(t)$:

$$\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = c^2\frac{1}{X(x)}\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

Partiendo del hecho que el primer miembro solo depende de t y el segundo miembro solo depende de x. Dado que es una igualdad ambos lados son iguales y se pueden igualar a una misma constante. Se llama a esta constante $-\lambda^2$. Esta constante debe ser negativa para no obtener soluciones triviales.

$$\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = -\lambda^2$$

$$c^2\frac{1}{X(x)}\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2$$

a continuación se resuelve la EDO resultante tanto para $T(t)$ como para $X(x)$.

Para la primera parte se tiene la ecuación diferencial ordinaria para $T(t)$:

$$\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = -\lambda^2$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = -\lambda^2 T(t)$$

Para esta resolución se tiene en cuenta que se trata de una EDO de segundo grado con coeficientes constantes. Entonces proponiendo una solución en forma de función $T(t) = e^{mx}$ donde m es una es una constante a determinar, se tiene:

$$\frac{d^2 e^{mx}}{dx^2} = -\lambda^2 e^{mx}$$

reescribiendo la segunda derivada se tiene:

y se procede a resolver esta ecuación básica:

$$m^2 e^{mx} = -\lambda^2 e^{mx}$$

$$m^2 = -\lambda^2$$

$$m = \pm i\lambda$$

Como se observa se tiene dos posibles soluciones que son complejas conjugadas, donde:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \lambda. \end{cases}$$

Por tanto la solución general es:

$$T(t) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

remplazando los valores se tiene:

$$T(t) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

Para la segunda parte se tiene la ecuación diferencial ordinaria, en este caso para $X(x)$:

$$c^2 \frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2 dx$$

$$\cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = c^2 X(x) \cdot -\lambda^2 dx$$

Para esta resolución se tiene en cuenta que se trata de una EDO de segundo grado con coeficientes constantes. Entonces proponiendo una solución en forma de función $X(x) = e^{mx}$ donde m es una es una constante a determinar, se tiene:

$$\frac{d^2 e^{mx}}{dx^2} = -\frac{1}{c^2}\lambda^2 e^{mx}$$

reescribiendo la segunda derivada se tiene:

y se procede a resolver esta ecuación básica:

$$m^2 e^{mx} = -\frac{1}{c^2}\lambda^2 e^{mx}$$

$$m^2 = -\frac{1}{c^2}\lambda^2$$

$$m = \pm i\frac{1}{c^2}\lambda$$

Como se observa se tiene dos posibles soluciones que son complejas conjugadas, donde:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{c^2}\lambda. \end{cases}$$

Por tanto la solución general es:

$$X(x) = C_3 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

remplazando los valores se tiene:

$$X(x) = C_3 \cos\left(\frac{1}{c^2}\lambda x\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{c^2}\lambda x\right)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración.

Para finalizar se debe recordar el hecho de que la función u es igual a $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ o también $u(x,t) = T(t)\cdot X(x)$. Por tanto la solución a la EDP es igual la combinación de la soluciones a $X(x)$ y $T(t)$:

$$u(x,t) = (C_1\cos(\lambda x) + C_2\operatorname{sen}(\lambda x))\cdot\left[C_3\cos\left(\frac{1}{c^2}\lambda x\right) + C_4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{c^2}\lambda x\right)\right]$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes de integración.

Por otra parte se presenta la ecuación para una onda estacionaria donde se representa la amplitud de una onda en función de la posición x en el espacio:

$$y(x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$y(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Aquí en cambio se tiene la ecuación donde se representa la amplitud de una onda en función del tiempo t:

$$y(0,t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Al observar la solución general obtenida de la EDP, se puede identificar cómo se relaciona con las ondas estacionarias que se ha mencionado previamente. Es importante notar que tanto $X(x)$ como $T(t)$ son funciones sinusoidales, y su combinación forma una onda estacionaria en el espacio y el tiempo. La parte $X(x)$ de la solución involucra términos trigonométricos (seno y coseno) que representan la amplitud de la onda en función de la posición en el espacio. Estos términos $\cos(\lambda x)$ y $\sin(\lambda x)$ describen cómo varía la amplitud a medida que la onda se mueve a lo largo de la coordenada espacial x. Esto por su parte se logra asemejar a la forma de una onda estacionaria, donde los puntos de amplitud máxima y mínima permanecen fijos a lo largo del espacio. Y así sucede también con la parte de $T(t)$

Otra notación para expresarla es:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Por otro lado en la ecuación de onda donde se representa la amplitud de una onda como se observa es una ecuación diferencial de segundo orden que depende de dos variables. Además es lineal, lo que significa que la perturbación entra en la ecuación de manera directa y proporcional.

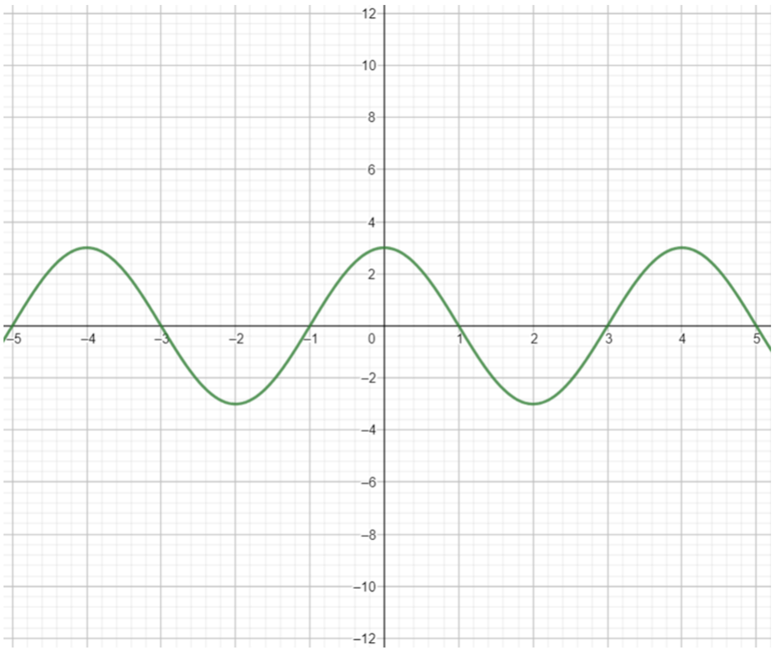
En cuanto a las condiciones que rodean esta ecuación diferencial se tienen las condiciones iniciales y de frontera:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{(Condición inicial)}$$
$$u(0,t) = g_1(t) \quad \text{(Condición de frontera izquierda)}$$
$$u(L,t) = g_2(t) \quad \text{(Condición de frontera derecha)}$$

Ejemplo 15. *Se tiene una onda estacionaria (Véase en la figura 2.7) con una amplitud de 3 unidades, misma que tiene una longitud de onda de 4 unidades, descrita por la siguiente ecuación:*

$$y(x) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{4}x\right)$$

Figura 2.7: Onda estacionaria



Fuente: Elaboración propia, 2023

:

Ejemplo 16. *Se tiene el siguiente ejemplo donde se observa variación en muchas de las variables. La ecuación de onda para este ejemplo es la de una onda que se propaga en el espacio y el tiempo hacia la izquierda:*

$$y(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

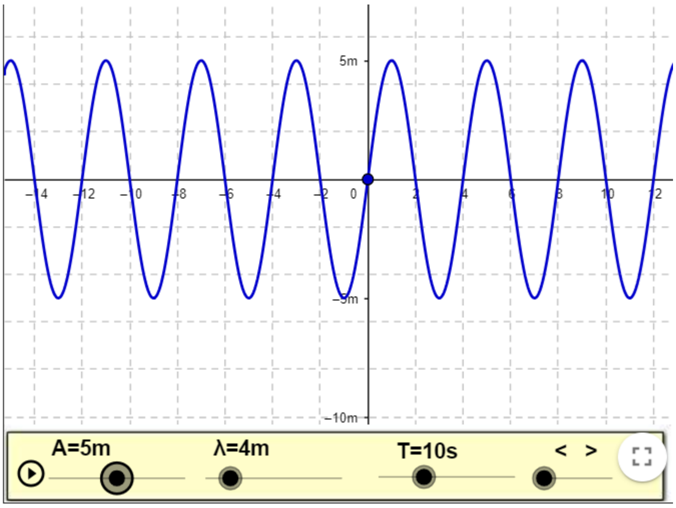
$$y(x,t) = A\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Con los datos del problema se tendría:

$$y(x,t) = 5\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{10} + \frac{x}{4}\right)\right]$$

Y la onda propagada, con los datos de este ejercicio quedaría como se muestra en la figura 2.8:

Figura 2.8: Onda propagándose



Fuente: Elaboración propia, 2023

Por otro lado, hay que destacar que existen condiciones necesarias para poder resolver una EDP planteada.

Entre las condiciones de borde-frontera para la EDP de la onda, se tiene las condiciones de frontera de tipo Dirichlet. Estas establecen principalmente valores específicos para la solución de la onda en los límites del dominio espacial, es decir, en x. Matemáticamente se tiene que:

$$u(x,t) = g(x,t)$$

Donde la solución de la ecuación de onda se denota por $u(x,t)$, esto en en el punto (x,t). La función $g(x,t)$ denota a una función dada que define los valores en la frontera. Estas condiciones implican principalmente implican que la onda está fijada en los bordes según los valores proporcionados por la función $g(x,t)$.

Por otra parte, si se tiene las condiciones de frontera de tipo Neumann. Estas establecen restricciones sobre las derivadas parciales de la solución. Esto claro en los límites del dominio espacial. Matemáticamente, se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = h(x,t)$$

Donde a la derivada parcial de la solución de la onda se la denota por: $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)$ Esto con respecto a la normal en el punto (x,t) y $h(x,t)$ es una función que define las condiciones de frontera en términos de derivadas. En el caso particular para la EDP de la onda, estas condiciones indican que el flujo de la onda está sujeto a las restricciones definidas por la función $h(x,t)$.

En conjunto, todas estas condiciones son fundamentales para lograr encontrar la solución numérica de la EDP planteada, con una solución única bien definida.

A manera de ejemplificar con las condiciones básicas y comúnmente conocidas se tiene que, un caso particular en el instante $t = 0$. Aquí se especifica claramente que se desea analizar el estado inicial de la onda. Entonces se tiene las siguientes condiciones:

Condiciones de borde tipo Dirichlet:

$$u(0,t) = 0 \quad \text{u(0,t)=0:}$$

Esto implica principalmente que el extremo izquierdo del dominio está fijado en 0 en todas las instancias de tiempo.

$$u(L,t) = 0 \quad \text{u(L,t)=0:}$$

Esto implica seguidamente que el extremo derecho del dominio también está fijado en un valor 0 para cualquier instante de tiempo t.

La condición inicial que para este caso es:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{u(x,0)=f(x):}$$

Esto indica la forma de la onda en un inicio, de igual forma en el dominio espacial en $t = 0$. La función $f(x)$ describe la forma de la onda en este primer momento.

Estas condiciones son ejemplos comunes y al combinarse forman un conjunto completo de condiciones iniciales y de frontera. Por ejemplo, junto con una ecuación de onda general, se tiene un problema completo como este:

Ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Condiciones:

$$u(0,t) = 0 \quad u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0 \quad u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

En este caso si se tiene una onda producida por una cuerda. Las condiciones de borde tipo Dirichlet y Newmann aseguran que los extremos de la cuerda representada por el dominio x de 0 a L están fijados en cero. La condición inicial $u(x,0) = f(x)$ definida en el momento inicial. Y $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ define cómo se está moviendo inicialmente la cuerda. Estas condiciones en conjunto con la ecuación de onda forman un problema bien definido que puede resolverse para encontrar la solución $u(x,t)$.

finalmente cabe recalcar que estas condiciones definitivamente varían de acuerdo al problema que se plantee.

Uso de la ecuación en distintos medios

En este punto cabe destacar esta herramienta matemática y a la vez física se puede encontrar en diferentes formulaciones. Así lo menciona el reconocido sitio web de Física Ingenierizando, "La ecuación de una onda unidimensional permite calcular la elongación de la onda en una posición determinada y un instante de tiempo concreto." (Ingenierizando, 2023) Aquí se resalta la utilización de esta ecuación, donde se muestra que con ella se es posible describir y más importante predecir el comportamiento de una onda en una dimensión. A su vez se logra llegar a modelar variados fenómenos ondulatorios que se propagan uni-dimensionalmente. Retomando el hilo anterior se tiene que las diferentes formulaciones son posibles de adaptar a otros contextos como el ya mencionado, además de otros como:

- En su forma unidimensional, describe la propagación de la onda a lo largo de una dimensión espacial, así como ya se mencionó anteriormente. Un ejemplo claro es la propagación en una cuerda. La ecuación en esta forma se puede expresar como:

$$\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- En su forma bidimensional, es aplicada en fenómenos ondulatorios en el plano coordenado, como por ejemplo la propagación de una onda sonora en una superficie o la propagación de una onda en un lago. La ecuación en esta forma se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

- En su forma tridimensional, ya es utilizada para la simulación y modelación de los mismos fenómenos ondulatorios mencionados, tales como las ondas acústicas o las ondas electromagnéticas. La ecuación en esta forma se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

En el presente trabajo se trabajará con su forma unidimensional, aunque como se ya se mencionó es importante hacer hincapié en las distintas formas y contextos donde se la puede encontrar; todo esto logra una correcta comprensión de la amplia gama de casos donde puede ser utilizada. Con lo que respecta a los medios donde la ecuación de onda es más utilizada se encuentran los siguientes:

Aire: Este es el medio donde más aplicaciones se tiene, se analiza continuamente la propagación de las distintas ondas sonoras y demás tipos de ondas que se propagan por el aire. Analizando la forma de la onda y la manera como esta se propaga por el medio es posible cambiar el tipo de sonido y con ello editar grabaciones de música. Es más, con este conocimiento se puede lograr ajustar la intensidad y también el volumen de distintos instrumentos musicales; así mismo observando la forma de la onda se es posible observar anomalías durante un concierto como volúmenes excesivamente altos o falta de claridad de sonido y así poder solucionarlos a tiempo. Es tanta su aplicabilidad que se han desarrollado ciertas carreras que analizan cada uno de los aspectos de la onda en el aire como la Ingeniería del sonido.

En este punto es importante mencionar otras aplicaciones que en ocasiones pasan desapercibidas como la mencionada por Matan, “La ecuación de onda acústica se puede utilizar para modelar la propagación del sonido en una habitación y predecir cómo se comportará el sonido en diferentes puntos de la habitación” (Matan, 2023) Esto es muy útil tanto así que cada día se desarrollan más tecnologías para conseguir un mejor aislamiento acústico en los estudios de grabación y como no, en las habitaciones de los hogares. Además del aislamiento, también ya se habla de mejorar sustancialmente la calidad de sonido de una habitación para conseguir un mejor ambiente.

Sin dejar a un lado el ya conocido aspecto de comunicaciones digitales, donde cada vez más personas nos comunicamos a través de ondas con dispositivos tan cotidianos como el smartphone.

Agua: Este es un campo que actualmente se está investigando mucho, teniendo con una aplicación relevante la terapia de sonido subacuática. Esta técnica terapéutica usa sonidos de baja o alta frecuencia según corresponda y con ella se intenta curar un sinnúmero de enfermedades que atacan a la salud mental del paciente. Según un artículo en el sitio web Sonido Terapéutico, se menciona que, "La terapia de sonido subacuática se utiliza para tratar el dolor crónico, la ansiedad y el estrés". (Canal, 2023) El efecto calmante y relajante sobre el cuerpo que produce esta terapia es fascinantemente eficiente, ya que con el efecto mencionado se ayuda a reducir los niveles de dolor que siente el paciente. Así mismo los niveles de ansiedad recaen en una medida significativa por el efecto tranquilizador que se da en el mismo sistema nervioso brindando al paciente una paz mental y emocional. De manera similar pasa con el estrés, una afección catalogada como una enfermedad mental que continuamente aqueja a miles de personas, mas aún en el mundo tan fugaz en el que vive el ser humano actualmente.

También aquí se tiene el aspecto de comunicaciones submarinas, donde con la ayuda de la Ecuación de onda acústica es posible ver como se comunican otras especies, ciertamente es un poco difícil de entender, pero se está haciendo con muchas más frecuencia de lo que se piensa. Un ejemplo notable se da en el reino animal acuático por ejemplo las ballenas, donde éstas se comunican a través de ondas sonoras y así establecen contacto con miembros de su especie. Con el continuo análisis y estudio de este hecho se espera poder comunicarnos a través del agua con igual facilidad.

Sólidos: Este campo ha sido investigado con mucho ahínco, ya que es un campo de alto impacto e interés; la aplicación de la ecuación de onda en medios solidos ciertamente ha permitido tener un avance significativo en la manipulación de las ondas en materiales sólidos.

Un ejemplo claro es la ingeniería sísmica, de acuerdo al artículo en el sitio web Sismoterra, "Las ondas sísmicas son importantes para comprender el comportamiento de la tierra y la rigidez de los materiales, una propiedad clave en cualquier proyecto de ingeniería." (Sismoterra, 2022) Como se observa el evaluar la respuesta sísmica de alguna estructura como un edificio es de vital importancia, ya que se desea predecir como se dará la interacción entre las ondas sísmicas, comúnmente generadas por terremotos, y la estructura misma. Además de los análisis ya conocidos como el de rigidez y resistencia de un cierto tipo de material hacia estas perturbaciones. Con ello se consigue tener unas evaluaciones que traten de ser lo más acertadas a unos hecho probables, sin embargo esto también depende de la intensidad con la que se den las catástrofes lo cual de igual forma también puede ser analizado con la ayuda de los conocimientos en la propagación de una onda a través de un medio físico o sólido.

2.4. Método de diferencias finitas

Es un sorprendente método que ha ayudado enormemente al desarrollo de las Matemáticas. Con este método se ha hecho posible resolver cientos de problemas relaciones a ecuaciones diferenciales que se pensaba imposible. Y consecuentemente con ello se ha logrado avances en todo tipo de industrias. Este método está basado en la idea principal de aproximar las derivadas en una ecuación diferencial con diferencias finitas, permitiendo de esta manera tener un sistema de ecuaciones lineales más fácil de resolver.
El método de diferencias finitas se define como:

Definición 20. *Técnica numérica utilizada para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales mediante la discretización de las derivadas. En este método, se divide el dominio de la ecuación en una malla o rejilla discreta, y las derivadas en la ecuación se aproximan utilizando diferencias finitas entre los puntos de la malla.*

Con la discretización mencionada se convierte a la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones. Estas se resuelven numéricamente para obtener una aproximación de la solución original. El método de diferencias finitas se ha convertido en una herramienta invaluable para el análisis y la simulación numérica de problemas en diversas áreas. (LeVeque, 2007) Entre las aplicaciones matemáticas, se encuentra la resolución tanto de EDOs como de EDPs, problemas de optimización y por su versatilidad tiene una complejidad media de implementación. Además de que se logra acortar el tiempo de cálculo significativamente en relación a otros métodos numéricos tradicionales usados.

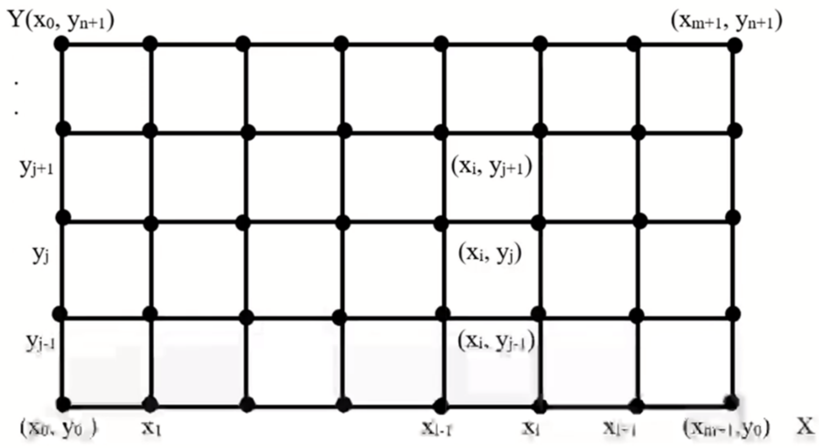
De acuerdo a las palabras de (Guzman, 2010) indica que este método:

Definición 21. *Consiste en definir una versión discreta de la EDP, y además en calcular una solución a dicha aproximación sobre un dominio discreto contenido en el dominio de la EDP en el continuo.*

De acuerdo a Sandoval, "El método de Diferencias Finitas permite discretizar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en un dominio finito." (Sandoval, 2019) Combinando los conocimientos que proporciona Sandoval y conocimientos anteriores, se tiene que el método de diferencias finitas es una técnica altamente eficaz donde se logra aproximar la solución numérica de una EDP dividiendo el dominio en una malla de puntos, esto es lo que se conoce como discretización y en su mayoría se hace con una distancia constante, es decir, los puntos están equi-espaciados.

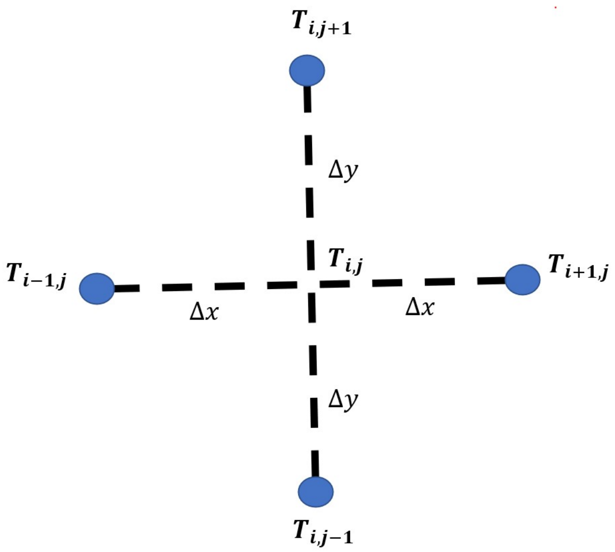
En primer lugar se inicia por discretizar el dominio obteniendo una malla de puntos, figura 2.9.

Figura 2.9: Malla de puntos



Ejemplo 17. *A manera de ejemplificar un poco lo anteriormente dicho, se tiene la siguiente malla pequeña, figura 2.10:*

Figura 2.10: Malla pequeña



Por ejemplo si se quiere calcular el valor del nodo central se suma los nodos que lo rodean y se divide para el número:

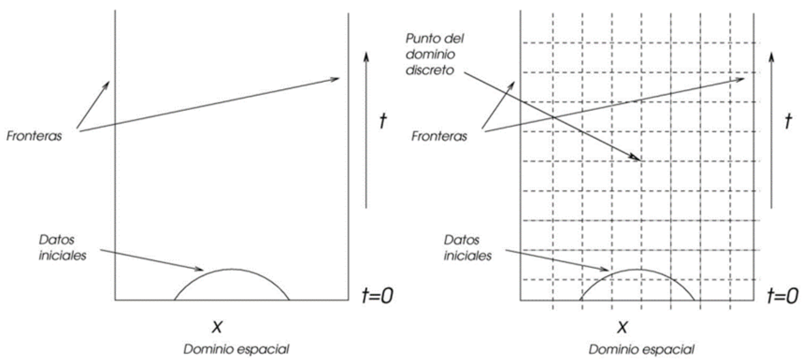
$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

Siendo así se obtiene una ecuación para el punto central. Es decir que si se tiene n nodos o puntos dentro de la malla, esto resultaría en n ecuaciones.

Por otra parte se tiene que esta malla de puntos contiene varios puntos (nodos) que juegan un rol. Mientras más puntos se tenga en la malla, se tendrá un resultado mejor ya que será más preciso. Aunque es cierto que con un mallado más fino se generará un tiempo de cálculo mayor, lo que a su vez generará un mayor costo computacional. Matemáticamente lo que sucede es que por cada nodo presente en la malla se genera una ecuación lineal con una incógnita.

la función o funciones dentro de la Ecuación diferencial quedan definidas en la malla. Esto se muestra en la siguiente figura 2.11:

Figura 2.11: Dominio discretizado



Fuente: Guzmán, 2010

Hablando más a profundidad de este proceso, se tiene la división del dominio (variable independiente x) en un gran conjunto de puntos separados por un paso llamado $h = \Delta$. Este paso es de vital importancia ya que determina en gran medida la calidad de la solución numérica. Esto se realiza sobre un intervalo

$$x \in [a, b]$$

y se desea descretizarlo en n puntos tal que:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

donde se define al paso mencionado como

$$h_i = X_{i+1} - x_i = cte$$

Entonces se tiene los puntos de discretización x_i, donde $x_i = a + i$. Cada uno de estos puntos se conoce como ”nodos”.

Como segundo punto se discretiza el tiempo y el espacio para la función $u(\mathbf{x}, t)$ donde x es un vector. En este caso se considera como dominio a un espacio unidimensional $a \leq x \leq b$ o un espacio 2D bidimensional $[a_x \leq x \leq b_x \ , a_y \leq y \leq b_y]$ Y en cuanto al tiempo se tiene que $t \geq 0$ se define en $t_0 \leq t \leq t_n$.

El tamaño de discretización o tamaño del paso es constante y se define como:

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{b_x - a_x}{n_x}, \\ \Delta y = \frac{b_y - a_y}{n_y}, \\ \Delta t = \frac{b_t - a_t}{n_t}. \end{cases}$$

donde n es el número de pasos de la discretización.

Para la iteración $i + 1$ se tiene que:

$$x_{i+1} = t_i + \Delta x = (i + 1)\Delta x$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y = (i + 1)\Delta y$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t = (i + 1)\Delta t$$

Una aproximación general del operador diferencial usando las series de Fourier es: Supongamos que tenemos una función periódica $f(x)$ con un período T y su serie de Fourier es:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)$

donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\,dx$$

Ahora, si queremos diferenciar la función $f(x)$ con respecto a x, podemos diferenciar término por término la serie de Fourier:

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi n}{T}a_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \frac{2\pi n}{T}b_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)$$

En esta fórmula, la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x se expresa como una nueva serie de Fourier con los coeficientes $-\frac{2\pi n}{T}a_n$ y $\frac{2\pi n}{T}b_n$ para cada término trigonométrico.

Ahora bien, para la obtención de las múltiples diferencias finitas se tiene de primer orden y segundo orden.

Diferencia finita de Primer orden

Desarrollando la fórmula, con la ayuda de las series de Taylor, sin tener en cuenta el error de truncamiento se tendría:

$$u(x_i,t_{i+1}) \approx u(x_i,t_i) + \Delta t\frac{\partial u(x_i,t_i)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_i,t_i)}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_i,t_i)}{\partial t^3} + ...$$

Aquí solo se toma la primera derivada con error de truncamiento local de 2do orden. La fórmula para calcular una aproximación a la función u en el punto x_i, t_{i+1} usando el Método de Euler o Euler hacia delante :

$$u(x_i,t_{i+1}) = u(x_i,t_i) + \Delta t\frac{\partial U(x_i,t_i)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\Delta t &: \text{paso de tiempo entre } t_i \text{ y } t_{i+1}\\
\frac{\partial u(x_i,t_i)}{\partial t} &: \text{derivada parcial de la función u}\\
\mathcal{O}(\Delta t^2) &: \text{error de truncamiento local de 2do orden}
\end{aligned}$$

La diferencia finita hacia delante se la obtiene derivando la formula anterior, por lo tanto se tiene: Consideramos la fórmula original:

$$u(x_i, t_{i+1}) = u(x_i, t_i) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Ahora, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_i) + \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Utilizando la regla del producto, la derivada parcial de $\Delta t \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t}$ con respecto a t se obtiene como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta t \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} \right) = 1 \cdot \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t}$$

Por lo tanto, la derivada parcial con respecto a t de la ecuación original, se obtiene como resultado la diferencia finita hacia delante:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_i) + \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

<u>Ecuaciones diferenciales de Segundo orden</u>

Ahora bien es preciso mencionar que se trabaja con error de truncamiento local de 3er orden. Se tiene las siguientes dos aproximaciones con el signo cambiado:

$$u(x_i, t_{i+1}) = u(x_i, t_i) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_i)}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$u(x_i, t_{i+1}) = u(x_i, t_i) - \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_i)}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Realizando la operación de sustracción entre las dos ecuaciones anteriores se tiene la siguiente ecuación:

$$u(x_i, t_{i+1}) - u(x_i, t_{i+1}) = 2\Delta t \frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

De igual forma derivando parcialmente con respecto al tiempo t se tiene como resultado la diferencia finita centrada:

$$\frac{\partial u(x_i, t_i)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{i-1}) - u(x_i, t_{i+1})}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Ahora si se realiza la operación de adición entre las dos mimas ecuaciones se tendría que:

$$u(x_i, t_{i+1}) + u(x_i, t_{i+1}) = 2u(x_i, t_{i+1}) + \Delta t^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_i)}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Y así mismo si se deriva parcialmente con respecto al tiempo, ahora se obtiene la diferencia central:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_i)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i, t_{i-1}) - 2u(x_i, t_i) + u(x_i, t_{i+1})}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Entre las múltiples ventajas que ofrece este método se encuentra su principal característica, la flexibilidad. Con este método se puede cambiar las condiciones iniciales y las condiciones de contorno, sin tener problema alguno; además de poder ser mejorado con facilidad solo haciendo variar el grosor de la malla. Haciendo hincapié aquí, es importante mencionar que el tener un método que aproxime mejor la solución numérica de una EDP determinada tiene su costo, hablando en métodos numéricos se menciona hay un costo computacional, mismo que para grandes cálculos pueden llegar a ser significativo.

- **Diferencia hacia adelante o progresiva:** La diferencia directa de $f(x)$ en x=a viene dada por:

$$f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- **Diferencia hacia atrás o regresiva** La diferencia directa de $f(x)$ en x=a viene dada por:

$$f(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

- **Diferencia central:** La diferencia directa de $f(x)$ en x=a viene dada por:

$$f(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Estas son las 3 diferencias finitas con las que se trabaja más comúnmente. Los operadores en este método son herramientas muy usadas; permiten aproximar las derivadas, teniendo una dirección de interés. Por esta razón, se cree es de vital importancia enunciarlos para una mejor comprensión y su futura utilización.

A continuación, se presenta una tabla a manera de resumen de los operadores más comunes en el método de diferencias finitas:

Cuadro 2.1: Operadores de diferencias finitas en la dirección x

Operador	Símbolo	Representación
Diferencia hacia adelante	Δ	$\Delta x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}$
Diferencia hacia atrás	∇	$\nabla x u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j}$
Diferencia central	δ	$\delta x u_{i,j} = u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}$

Capítulo 3

MATERIALES Y MÉTODOS

- **Enfoque de la Investigación:** La presente investigación se encuadra en un enfoque cualitativo. En esta se realizó una revisión y análisis crítico de la literatura existente sobre las ecuaciones diferenciales parciales clásicas. Así mismo se proporció explicaciones detalladas de los conceptos teóricos involucrados. Sin embargo, en el problema de programación propuesto, hace replantear un poco el enfoque, puesto que también tien un enfoque cuantitativo al implementar en el problema propuesto.

- **Alcance de la Investigación:** La presente investigación se encuadra en un enfoque cualitativo, ya que se realizará una revisión y análisis crítico de la literatura existente sobre las ecuaciones diferenciales parciales clásicas, y se proporcionarán explicaciones detalladas de los conceptos teóricos involucrados. Sin embargo, en el problema de programación propuesto, se puede incluir un enfoque cuantitativo al implementar en el problema propuesto.

- **Análisis de los datos:** se realizó de igual forma, de una manera mixta. Por un lado un análisis cualitativo a través de la revisión crítica de toda la información encontrada en las respectivas fuentes documentales seleccionadas. Por otro lado, habrá análisis cuantitativo de los resultados obtenidos a través de la implementación del algoritmo.

3.1. Diseño de investigación

El diseño de la investigación es no experimental debido a que las variables no serán manipuladas.

3.2. Tipos de investigación

Investigación transversal

La presente investigación es transversal debido a que se realizará en un solo periodo de tiempo.

Investigación documental

Ciertamente la investigación se basará en la revisión y análisis de fuentes bibliográficas y documentales existentes sobre las ecuaciones diferenciales descritas.

Investigación exploratoria

Se aborda el tema desde diferentes perspectivas, explorando su motivación histórica, su construcción matemática y sus aplicaciones.

Capítulo 4

RESULTADOS

En este punto se presenta el desarrollo de un algoritmo computacional en Python para el análisis y la aproximación numérica del sistema oscilatorio subamortiguado y la ecuación de onda utilizando el método de diferencias finitas.

Para esta implementación se ha escogido realizarla con la ayuda del lenguaje de programación Python, siendo un lenguaje en auge actualmente con una gran flexibilidad y disponibilidad de bibliotecas especializadas. De igual modo, se trabajará netamente en Jupyter Notebook, siendo esta la plataforma o cuaderno de trabajo donde se desarrollará y mostrará el resultado final. Argumentando un poco sobre las razones del porqué se lo escogió se encuentra la manera interactiva como se puede escribir el código y ejecutarlo ahí mismo; lo que a su vez facilita el proceso de desarrollo del algoritmo. Con ello se busca una mejor comprensión en cada etapa del desarrollo de ambos códigos.

4.1. EDO del Sistema oscilatorio subamortiguado

La EDO referente a este sistema se obtiene concretamente al resolver una ecuación diferencial por un método numérico. Uno de ellos es el método de diferencias finitas; éste consiste en una serie de puntos con cordenadas (x, y) que representan la función que se hubiese encontrado de forma analítica.

En este código se uso tres métodos numéricos, estos son Euler, Runge-Kutta de segundo orden (RK2) y Runge-Kutta de segundo orden (RK4); teniendo siempre presente la solución analítica. El código se puede observar en los anexos.

El uso de tres métodos numéricos mencionados junto con la solución analítica en este código ayuda para la aproximación de sistemas dinámicos, en particular los descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Argumentando un poco más sobre esto se tiene que es una buena manera de observar una comparación de precisión. Cada método tiene sus propios niveles de precisión, y esto se puede evidenciar en el código.

Cabe destacar este código en Python tiene como objetivo resolver y comparar soluciones de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden que describen un sistema oscilatorio subamortiguado.

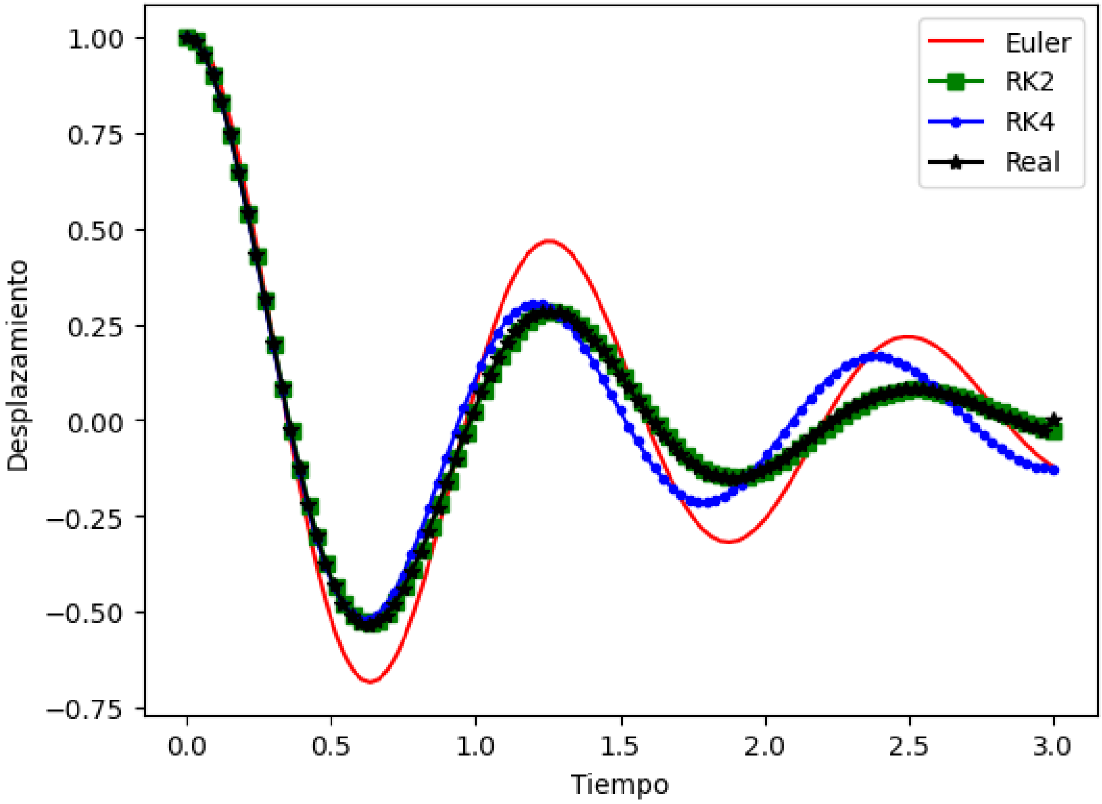
Describiendo el código a profundidad se nota como se comienza importando dos bibliotecas para su ejecución: numpy y matplotlib.pyplot. Seguidamente se define la función dibujar, misma que se usará más adelante para graficar las soluciones aproximadas. A continuación se da los parámetros físicos correspondientes del sistema tal es como la masa m, el coeficiente de amortiguamiento c, y la constante del resorte k; estos valores definen el comportamiento del sistema mecánico.

Así mismo se deine el número de pasos n y el tamaño de paso h con el que se trabajará necesario para discretizar el intervalo de tiempo en partes iguales; este paso ayuda a la discretización temporal. Seguidaente se establecen las condiciones iniciales que influyen en el sistema, z1 y z2. Se calcula la solución analítica de la EDO y se realiza lo mismo con las aproximaciones usando los 3 métodos ya mencionados.

Finalmente se usa la función DIBUJAR definida anteriormente para crear los gráficos que representen las soluciones obtenidas por los tres métodos numéricos conjuntamente con la solución analítica de referencia.

Ahora bien analizando la figura 4.1, se tiene que los gráficos de las aproximaciones numéricas de la solución de la EDO de segundo orden para un sistema oscilatorio subamortiguado, junto con la solución analítica de referencia.

Figura 4.1: Aproximación a la EDO



4.2. EDP para la Ecuación de onda

Se presenta el código desarollado de igual forma con el lenguage Python que se implementó con la ayuda del método de diferencias finitas para aproximar la EDP de la propagación de una onda a lo largo de una cuerda. Se exploró la discretización espacial y temporal, la implementación del método y por supuesto la comparación con la solución analítica (real).

Cabe recalcar que el presente código se desarrollo para la EDP de la ecuación de onda en una dimensión, usando el método ya mencionado. Las diferencias finitas son un enfoque numérico comúnmente utilizado para resolver ecuaciones en derivadas parciales (EDP) que involucran derivadas parciales con respecto al espacio y el tiempo. El código de la aproximación se puede visualizar en los anexos a cabalidad, paso por paso.

Como se observa este código esta enfocado en la aproximación numérica de la EDO de la ecuación de onda unidimensional utilizando el método de diferencias finitas. El código internamente se divide en varias secciones que contribuyen para el correcto entendimiento del mismo. Estas son:

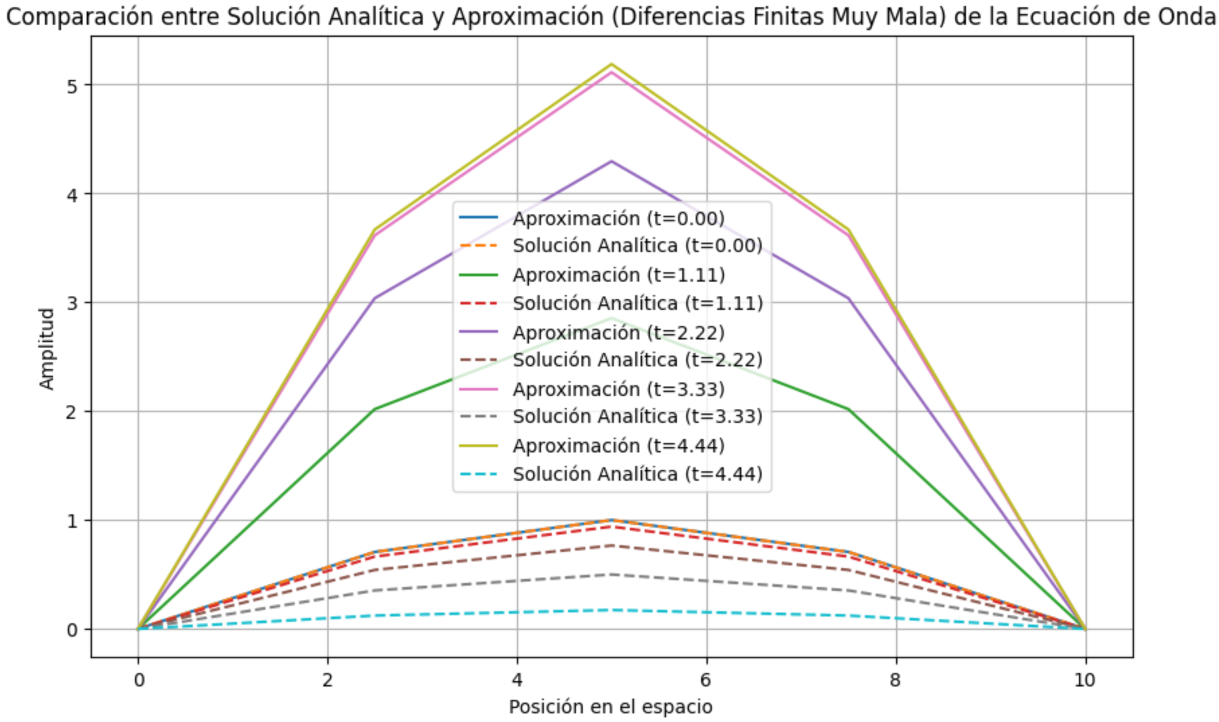
Como primer punto se tiene la importación de librerías, donde destacan NUMPY para todos los cálculos numéricos que se realice y MATPLOTLIB, un alibrerría muy popular usada para la visualización de los datos.

Luego se definen los parámetros que ciertamente son clave para el problema, algunos de estos son la longitud de la cuerda, el tiempo total de la simulación y el número de puntos en el espacio y etc. También así se definen cada una de las las condiciones iniciales como las velocidades iniciales y las amplitudes con las que inica la onda. A cotinuación se procedió a realizar la dscretización del espacio y del tiempo dividiéndolos en pasos iguales. Esto permite crear una malla en la que sera posible la realización de los cálculos. La discretización adecuada es esencial para obtener resultados lo más precisos que se pueda. Para ya ir finalizando es importante mencionar la implementación del método de Diferencias Finitas. Mismo que se da en el bucle anidado y con el se consigue calcular la evolución de la onda a lo largo del tiempo. Se aplica el método de diferencias finitas para aproximar la segunda derivada espacial en función del tiempo.

Como se conoce, aquí también se calculó la la solución analítica de la ecuación de onda unidimensional para poder compararla con la solución numérica que se obtenga a traves de la aproximación, logrando así evauar la precisión de la aproximación realizada. Finalmente la visualización de los resultados obtenidos, donde se crea una representación visual. En ella se muestra un gráfico en una dimensión que representa la propagación de la onda en función del espacio y el tiempo. Lo que consecuentemente ayuda con un gráfico de cómo la onda se propaga a lo largo de la cuerda.

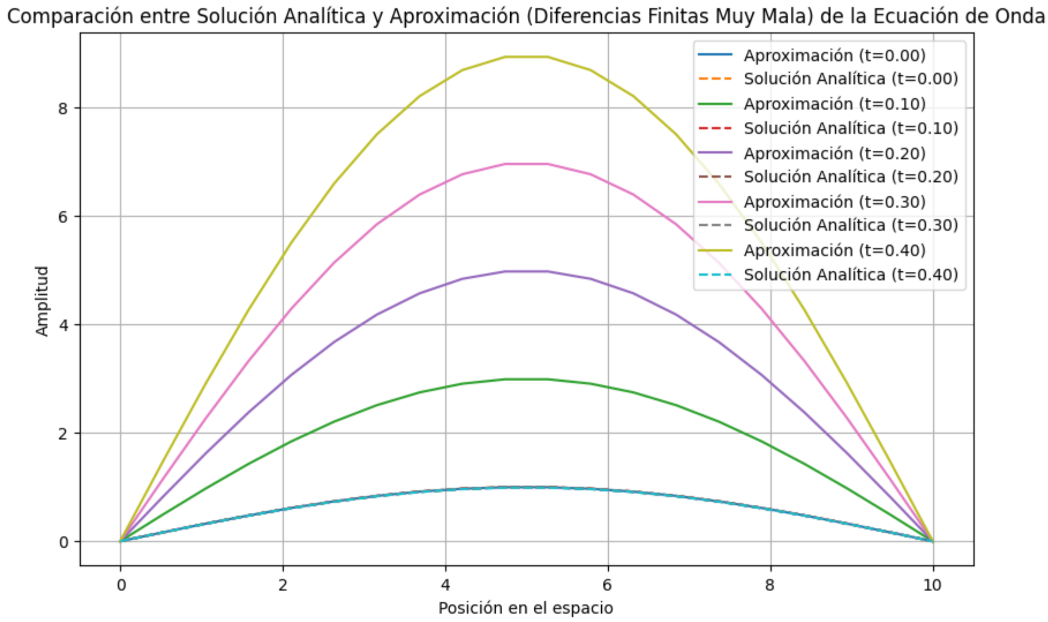
Ahora bien, en cuanto a la ejecución del código se obtiene una gráfica donde se mira lo ya mencionado. Cabe destacar la implementación del método de diferencias finitas para la ecuación de onda unidimensional, se pueden realizar con múltiples aproximaciones. Por tanto en la figura 4.2 se presenta una aproximación muy pobre:

Figura 4.2: Aproximación 1 a la EDP



Una mejor aproximación, con un ligero cambio en los parámetros, misma que dista mucho de las otras es la que se muestra en la figura 4.3. Esta se podría considerar una muy buena aproximación;

Figura 4.3: Aproximación 2 a la EDP



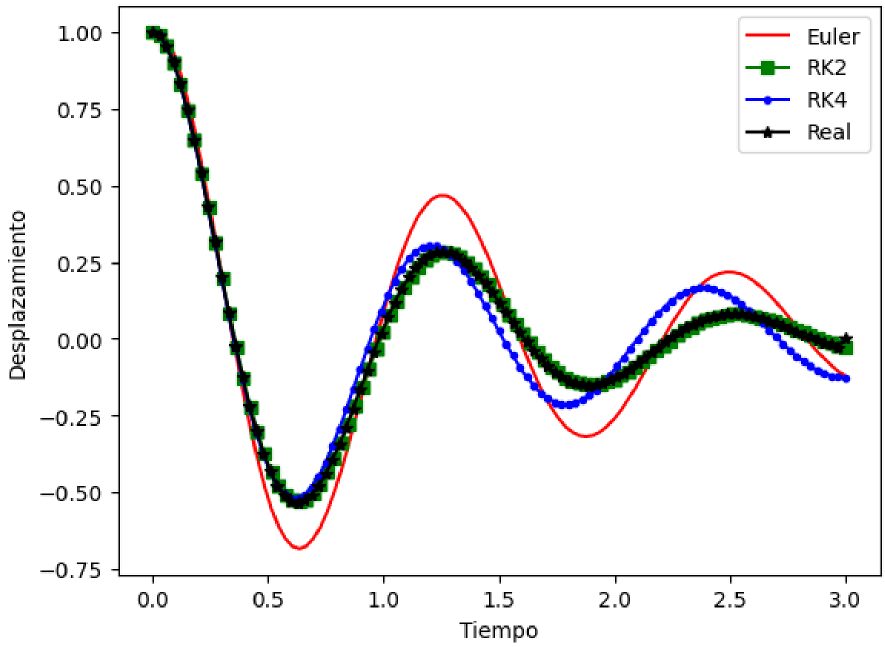
En esta segunda aproximación, se emplearon pasos relativamente pequeños, lo que condujo a una simulación precisa que se acercaba a la solución analítica.

Por otro lado, si se aumenta drásticamente el intervalo de discretización como se hizo realizó en la primera aproximación. Se vió que la calidad de la aproximación disminuyó considerablemente, los resultados se volvieron mucho más inexactos. Esto al final derivó en una mayor discrepancia entre la solución numérica y la real. Esta pequeña comparación muestra como un ligero cambio en los parametros puede ayudar a aproximar de mejor o peor manera la ecuación diferencial. Así también con esto se recalca la manera en que el tamaño de los pasos puede en la precisión de la aproximación que se haga. Siendo esto algo crucial para comprender la importancia de una discretización adecuada en cualquier aproximación numérica que se realice.

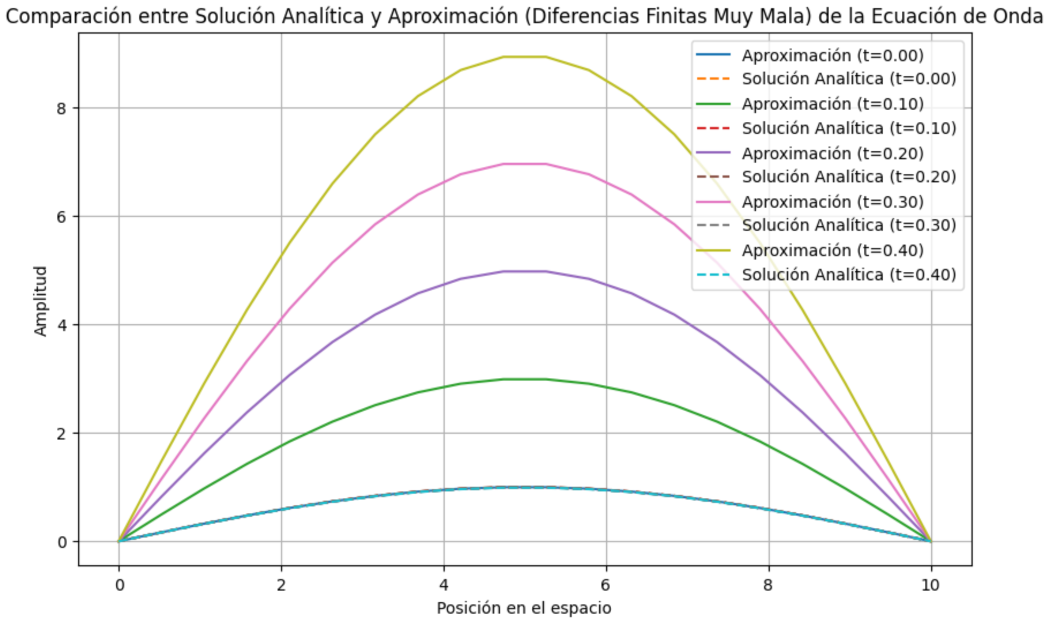
DISCUSIÓN

En el primer código referente al sistema oscilatorio se nota como las aproximaciones obtenidas son muy cercanas a los resutados numéricos de la solución analítica. Se aplicaron tres métodos numéricos para aproximar la solución de la ecuación diferencial que describe un sistema oscilatorio subamortiguado. Estos métodos incluyeron el método de Euler, el método de Runge-Kutta de orden 2 y el método de Runge-Kutta de orden 4. Los resultados mostraron que el método de Euler, siendo el más simple, proporcionó una aproximación menos precisa en comparación con los métodos de orden superior.

El método de Runge-Kutta de orden 4 demostró una mayor precisión y convergencia hacia la solución analítica conocida. Así se logró mostrar cómo la elección del método afecta la calidad de la aproximación y por ende la inminente presencia de errores numéricos. Así mismo la solución analítica actúa como una referencia confiable para validar los resultados numéricos que se obtenga con estas 3 aproximaciones a la solución. Dado que los métodos numéricos producen soluciones muy aproximadas a la ya conocida, se logra fortalecer la confianza en la precisión de los resultados numéricos y se confirma a la vez la validez del modelo matemático utilizado.



Sin embargo, también es importante resaltar el uso del método de diferencias finitas, siendo este fundamental en este contexto. El método de diferencias finitas es una técnica numérica ampliamente empleada para resolver EDs al discretizar el dominio temporal en pasos finitos. En el contexto de este código, todos los métodos usados usan el método de diferencias finitas.



En el transcurso de esta investigación, se ha emprendido un viaje hacia el corazón de la matemática teórica, con el afán de llegar a un correcto entendimiento de los conceptos. Todo esto con un enfoque particular de conseguir una aproximación numérica de dos ejemplos importantes que se plantearon: el sistema oscilatorio subamortiguado y la ecuación de onda unidimensional. Este viaje ha involucrado una profunda exploración de las ecuaciones diferenciales, la aplicación del método de diferencias finitas y con ello conseguir una correcta implementación de ambos algoritmos y lograr capturar la esencia de estos fenómenos físicos.

Un análisis comparativo entre los resultados obtenidos para los dos métodos, se logró identificar similitudes en términos de convergencia y precisión. Tales como la importancia de una discretización adecuada y sobre todo la manera cómo la elección incorrecta del tamaño de paso puede afectar de manera sumamente negativa a la calidad de la aproximación, así como se observó en el segundo método. Por tanto los resultados de esta investigación subrayan la relevancia y la utilidad de los métodos numéricos en la simulación y el análisis de sistemas oscilatorios y fenómenos ondulatorios. Además, destacan la necesidad de una cuidadosa selección de parámetros de discretización para garantizar resultados precisos. La elección del método numérico también influye en la calidad de la aproximación.

Capítulo 5

CONCLUSIÓN

En conclusión, la investigación realizada proporciona una comparación entre los tres métodos numéricos; Euler, Runge-Kutta de orden 2 y Runge-Kutta de orden 4. Cada método ayuda a aproximar la solución de la EDO que describe el sistema oscilatorio subamortiguado y así mismo la EDP para la ecuación de onda. Se obtuvo que, a pesar de su simplicidad, el método de Euler ofrece la menor precisión. Por otra parte el método Runge-Kutta de orden 4 demuestra una mayor precisión y convergencia al realizar la aproximación. Esta comparación resalta la importancia de elegir métodos numéricos apropiados para cada caso.

La presencia de la solución analítica en los resultados fortalece de cierta manera la confianza en la precisión de los métodos numéricos que se usó en este trabajo. La comparación específica que se realizó entre las soluciones numéricas y la analítica no solo valida la implementación de los algoritmos en Python, respectivamente. Sino que también confirma la idoneidad de las ED respectivamente, para describir el comportamiento del sistema oscilatorio subamortiguado y la ecuación de la propagación de una onda. Este enfoque refuerza ciertamente la importancia de su utilización como punto de referencia confiable en la evaluación de métodos numéricos.

Finalmente los resultados obtenidos de la simulación subrayan la relevancia de una discretización cuidadosa al momento de utilizar el método de diferencias finitas. Siendo que la elección incorrecta del tamaño de paso o tamaño de discretización puede afectar la calidad de la aproximación. Esto se pudo evidenciar en la simulación de la ecuación de onda. Por lo que es necesario considerar este punto y así tener una mayor precisión y por consiguiente mejor convergencia al seleccionar parámetros de discretización.

RECOMENDACIÓN

La capacidad de aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales en sistemas oscilatorios subamortiguados y la ecuación de onda han proporcionado importante información sobre el comportamiento de estos sistemas. Por tanto se recomienda investigar en futuros trabajos el desarrollo de algoritmos numéricos más eficientes y precisos para la aproximación de diverso fenómenos físicos. Teniendo como objetivo principal el enriquecimiento de la comprensión teórica y así lograr unificar un poco más a estas dos ciencias tan importantes como son la física y la matemática.

La investigación de nuevos algoritmos numéricos avanzados y eficientes se esta volviendo crucial para el desarrollo de nuevas ciencias. Por tanto se recomienda realizar una exploración de métodos numéricos, así mismo técnicas de optimización para reducir considerablemente el tiempo de cálculo y demás. El desarrollo constante de herramientas computacionales es crucial si de quiere abordar nuevo problemas que sean más complejos y brinden nuevas soluciones a problemas más atuales.

Se recomienda siempre aplicar una flexibilidad de los métodos numéricos que se use para cualquier investigación. Como se ha notado con bastante claridad en el presente trabajo, se notó como se pueden implementar en problemas muy diferentes, desde la EDO para sistemas oscilatorios subamortiguados hasta la EDP de la ecuación de onda. Esta gran versatilidad resalta la importancia de tener un conjunto de herramientas matemáticas y computacionales, mismo que debe ser diverso, a entera disposición de los investigadores.

Bibliografía

[1] //

[2] Tenreiro Machado, J. A., Galhano, A. M., y Silva, M. F. (2017). Fractional-order differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Academic Press. //

[3] Ecuación diferencial parcial. AcademiaLab. (2023). https://academia-lab.com/enciclopedia/ecuacion-diferencial-parcial/ //

[4] Team, O. S. (2022). Newton and Leibniz: the Fathers of Calculus. Oxford Summer School 2023 — Oxford Scholastica Academy. https://www.oxfordscholastica.com/blog/newton-and-leibniz-the-fathers-of-calculus/ //

[5] Juan Nápoles. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. Universidad autónoma de Querétaro. Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas //

[6] R. Quintero J. (2007). Aragón. Oscilaciones, armonía y simpatía. UNAM. G. G. Naumis //

[7] Johnson, R. D., Smith, L. J., Patel, V. (2018). Medical Device Alarm Systems: A Review of Patient Monitoring and a Framework for Safety Analysis. IEEE Reviews in Biomedical Engineering, 11, 120-131. doi:10.1109/RBME.2018.2823467 //

[8] SAE International. (2018). Vibration Damping: Technologies and Solutions. Recuperado de https://www.sae.org/standards/content/tc-7-vibration-and-sound-damping/ //

[9] Camilo Gavilanez. (2016). Análisis e Importancia de Sistema de Suspensión de Vehículos Livianos Mediante Modelo Digital. https://repositorio.usfq.edu.ec/bitstream/23000/5996/1/129359.pdf //

[10] Omar Mendoza. (2016). Resolución de Ecuaciones diferenciales parciales mediante el Método de elementos finitos y su paralelización. Universidad nacional autónoma de México. DC. MX. //

[11] Ingenierizando. (2023). Onda unidimensional. Ingenierizando. https://www.ingenierizando.com/cinematica/onda-unidimensional/ //

[12] Matan. (2023, marzo 25). La ecuación de onda acústica. Your Physicist. https://your-physicist.com/la-ecuacion-de-onda-acustica/ //

[13] Canal, M. F. (2023, 20 junio). ¿Qué es la terapia de sonido? - Sonido terapéutico. SONIDO TERAPÉUTICO. https://sonidoterapeutico.com/que-es-la-terapia-de-sonido/ //

[14] Métodos sísmicos – Sismoterra. (2022). https://sismoterrageofisica.com/metodo-sismico/ //

[15] Randall LeVeque. (2007). Finite Difference Methodsfor Ordinary and PartialDifferential Equations. SIAM //

[16] Sandoval-Ruiz, C. E. (2019). Métodos numéricos en diferencias finitas para la estimación de recursos de Hardware FPGA en arquitecturas LFSR(n,k) 55 fractales. Ingeniería, investigación y tecnología. Obtenido de https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n3.032

Fernández, J. L. (2020). Ley de Hooke. Fisicalab.com.https://www.fisicalab.com/apartado/ley-hooke

Álvarez-Ramírez, M., y García, y. A. (2013). El movimiento oscilatorio. Uam.mx. http://www2.izt.uam.mx/newpage/contactos/revista/90/pdfs/oscilatorio.pdf Serway, R. A., y Jewett, J. W. (2013). Física para Ciencias e Ingeniería (9ª ed., Cap. 15 ”Movimiento Oscilatorio”). Cengage Learning.

Movimiento oscilatorio: Oscilador armónico simple. (2003). Ehu.eus. https://www.ehu.eus/acustica/bachillerato/mases/mases.html

Iparraguirre, L. (2009). MECÁNICA BÁSICA. Gov.ar. http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001845.pdf

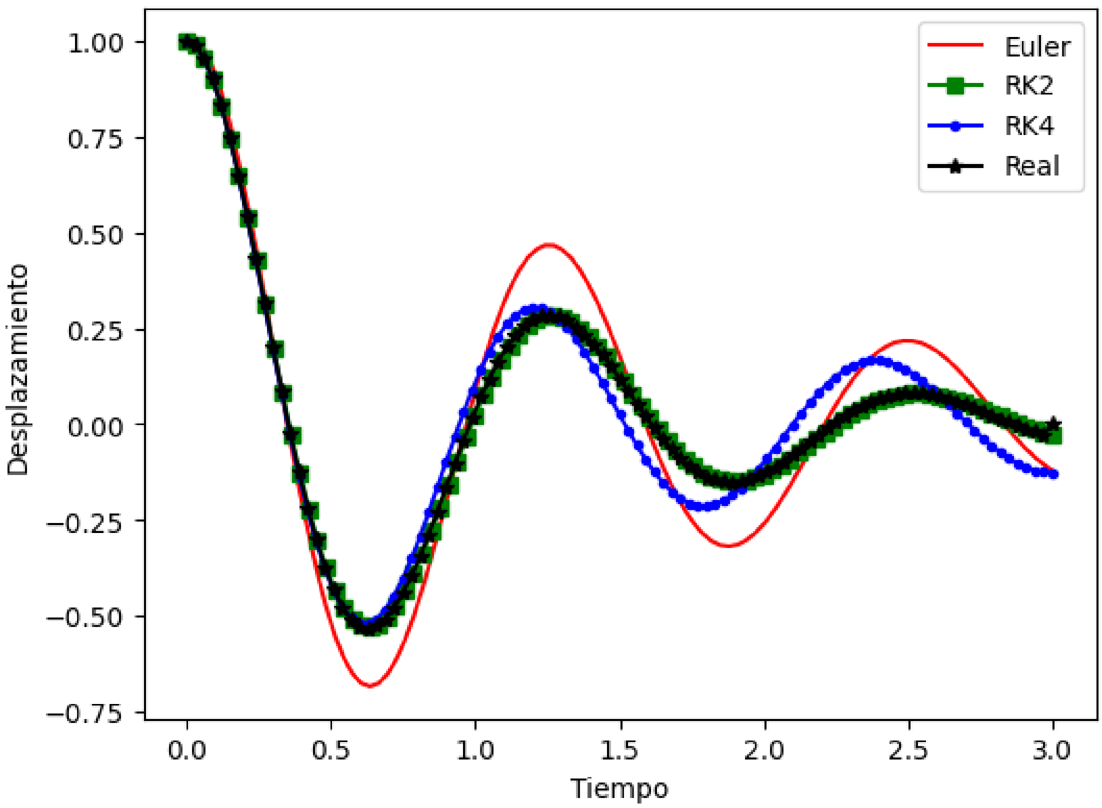
Pedro de Dvaldivia. (2016) Física común. Ondas. Vol. 2.

F. Guzman (2010). Solucion de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Revista mexicana de Física

Dennis Zill y Warren Wright. (2013). Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera. Octava edición

ANEXOS

Anexo 1: Aproximación de la EDO



Anexo 2: Capturas del código en general

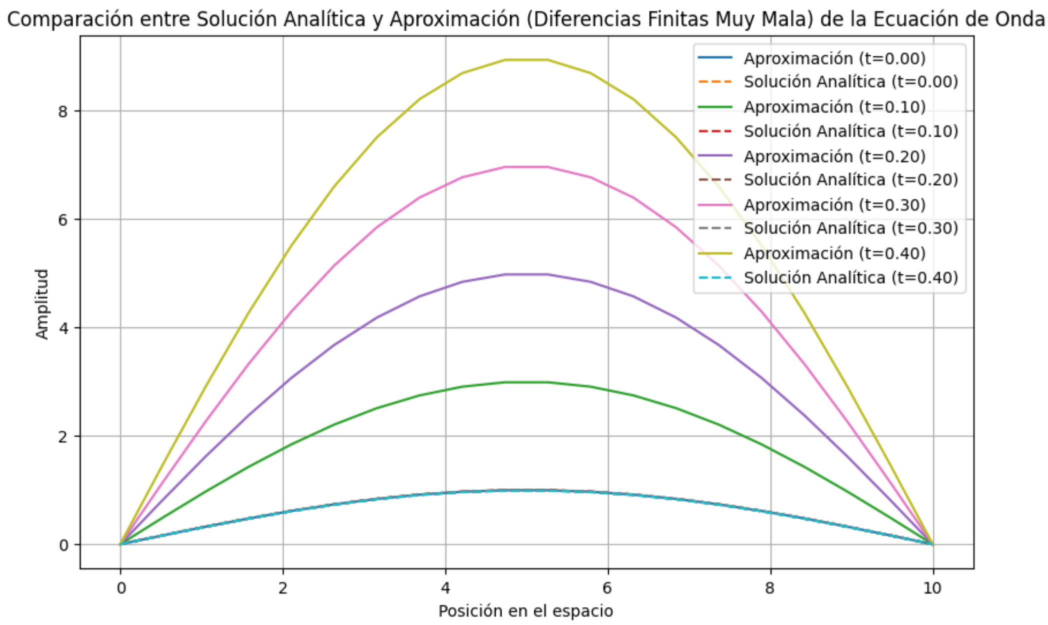
PARTE UNIFICADA DE LOS 3 MÉTODOS ADEMÁS DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA

```python

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Dibujar las soluciones, la numérica y la real
def dibujar(x,y,etiqueta,color,marca):           #Defino la función dibujar para luego solo usarla y listo
    plt.title("")
    plt.xlabel("Tiempo")
    plt.ylabel("Desplazamiento")
    plt.plot(x,y,label=etiqueta, color=color, marker=marca)
    plt.legend()

# Parámetros del sistema
m = 1.0   # masa
c = 2.0   # coeficiente de amortiguamiento
k = 26.0  # constante del resorte
# Intervalo de integración
I = [0, 3]
# Número de pasos
n = 100
h = (I[1] - I[0])/n

# Condiciones iniciales
z1_0 = 1.0  # condición inicial del vector posición
z2_0 = 0.0  # condición inicial del vector velocidad


#SOLUCIÓN REAL
x=np.arange(I[0],I[1]+h,h)
y=np.zeros(n+1)
y[0]=1
def real(n,x,y):
  for i in np.arange(0,n,1):
    y[i]=(0.2*np.sin(5*x[i])+np.cos(5*x[i]))*np.exp(-x[i])
```

```python
###########################################################################
# METODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEN 4, EXPLICITO
# ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 2DO ORDEN
###########################################################################

def runge_kutta(h, n, z1_0, z2_0, m, c, k):
    t_2 = np.linspace(0, n*h, n+1)
    z1_2 = np.zeros(n+1)
    z2_2 = np.zeros(n+1)

    z1_2[0] = z1_0
    z2_2[0] = z2_0

    for i in range(n):
        k1_z1_2 = h * z2_2[i]
        k1_z2_2 = h * (-c*z2_2[i]/m - k*z1_2[i]/m)

        k2_z1_2 = h * (z2_2[i] + 0.5*k1_z2_2)
        k2_z2_2 = h * (-c*(z2_2[i] + 0.5*k1_z2_2)/m - k*(z1_2[i] + 0.5*k1_z1_2)/m)

        k3_z1_2 = h * (z2_2[i] + 0.5*k2_z2_2)
        k3_z2_2 = h * (-c*(z2_2[i] + 0.5*k2_z2_2)/m - k*(z1[i] + 0.5*k2_z1_2)/m)

        k4_z1_2 = h * (z2_2[i] + k3_z2_2)
        k4_z2_2 = h * (-c*(z2_2[i] + k3_z2_2)/m - k*(z1_2[i] + k3_z1_2)/m)

        z1_2[i+1] = z1_2[i] + (1/6)*(k1_z1_2 + 2*k2_z1_2 + 2*k3_z1_2 + k4_z1_2)
        z2_2[i+1] = z2_2[i] + (1/6)*(k1_z2_2 + 2*k2_z2_2 + 2*k3_z2_2 + k4_z2_2)

    return t_2, z1_2

# Resolver el sistema de ecuaciones
t_2, z1_2 = runge_kutta(h, n, z1_0, z2_0, m, c, k)
y_real= real(n,x,y)

#Graficación
q=dibujar(t,z1,"Euler","red",None)
print(q)
r=dibujar(t_1,z1_1,"RK2","green","s")
print(r)
s=dibujar(t_2,z1_2,"RK4","blue",".")
print(s)
p=dibujar(x,y_real,"Real","black","*")
print(p)
```

```python
#####################################################################
# METODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEN 2, EXPLICITO
# ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 2DO ORDEN
####################################################################

def runge_kutta2_method(m, c, k, z1_0, z2_0, I, n):
    # Inicializar los arreglos para almacenar las soluciones
    t1 = np.linspace(I[0], I[1], n)
    z1_1 = np.zeros(n)
    z2_1 = np.zeros(n)

    # Establecer condiciones iniciales
    z1_1[0] = z1_0
    z2_1[0] = z2_0

    # Calcular las soluciones utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden
    for i in range(1, n):
        t1_i = t1[i-1]
        z1_1_i = z1_1[i-1]
        z2_1_i = z2_1[i-1]

        # K1
        k1_z1_1 = h * z2_1_i
        k1_z2_1 = h * (- (c * z2_1_i + k * z1_1_i) / m)

        # K2
        k2_z1_1 = h * (z2_1_i + 0.5 * k1_z2_1)
        k2_z2_1 = h * (- (c * (z2_1_i + 0.5 * k1_z2_1) + k * (z1_1_i + 0.5 * k1_z1_1)) / m)

        # Calcular los valores de z1 y z2 en el siguiente paso de tiempo utilizando los promedios ponderados
        z1_1[i] = z1_1_i + k2_z1_1
        z2_1[i] = z2_1_i + k2_z2_1

    return t1, z1_1

```

Anexo 3: Aproximación de la EDP



Anexo 4: Código de la aproximación para la EDO

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Dibujar las soluciones, la numérica y la real
def dibujar(x,y,etiqueta,color,marca):
    plt.title("")
    plt.xlabel("Tiempo")
    plt.ylabel("Desplazamiento")
    plt.plot(x,y,label=etiqueta, color=color, marker=marca)
    plt.legend()

# Parámetros del sistema
m = 1.0   # masa
c = 0.5   # coeficiente de amortiguamiento
k = 26.0  # constante del resorte
# Intervalo de integración
I = [0, 3]
# Número de pasos
n = 100
h = (I[1] - I[0])/n  #Tamaño del paso

# Condiciones iniciales
z1_0 = 1.0  # condición inicial del vector posición
z2_0 = 0.0  # condición inicial del vector velocidad


#SOLUCIÓN REAL
x=np.arange(I[0],I[1]+h,h)
y=np.zeros(n+1)
y[0]=1
def real(n,x,y):
  for i in np.arange(0,n,1):
    y[i]=(0.2*np.sin(5*x[i])+np.cos(5*x[i]))*np.exp(-x[i])
  return y

#####################################################################
```

```
# METODO DE EULER, EXPLICITO
# ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 2D ORDEN
#####################################################################

def euler_method(m, c, k, z1_0, z2_0, I, n):
    # Inicializar los arreglos para almacenar las soluciones
    t = np.linspace(I[0], I[1], n)
    z1 = np.zeros(n)
    z2 = np.zeros(n)

    # Establecer condiciones iniciales
    z1[0] = z1_0
    z2[0] = z2_0

    # Calcular las soluciones utilizando el método de Euler
    for i in range(1, n):
        #z1=z1 +h*k1z1   #Z1_i es mi sol y z1[i-1] es el punto
        o paso anterior
        z1[i] = z1[i-1] + h * z2[i-1]

        # z2=z2 +h*(k1z2 ó z2´ ó y´´) para z2 tengo q la formula es
        x´´+cx´+kx=0 y depejo x´´
        z2[i] = z2[i-1] - h * (c * z2[i-1] + k * z1[i-1]) / m

    return t, z1


# Resolver el sistema utilizando el método de Euler y la sol. analitica
t, z1= euler_method(m, c, k, z1_0, z2_0, I, n)
y_real= real(n,x,y)
#####################################################################
# METODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEN 2, EXPLICITO
# ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 2DO ORDEN
####################################################################
```

```
def runge_kutta2_method(m, c, k, z1_0, z2_0, I, n):
    # Inicializar los arreglos para almacenar las soluciones
    t1 = np.linspace(I[0], I[1], n)
    z1_1 = np.zeros(n)
    z2_1 = np.zeros(n)

    # Establecer condiciones iniciales
    z1_1[0] = z1_0
    z2_1[0] = z2_0

    # Calcular las soluciones utilizando el método de Runge-Kutta
    de 2do orden
    for i in range(1, n):
        t1_i = t1[i-1]
        z1_1_i = z1_1[i-1]
        z2_1_i = z2_1[i-1]

        # K1
        k1_z1_1 = h * z2_1_i
        k1_z2_1 = h * (- (c * z2_1_i + k * z1_1_i) / m)

        # K2
        k2_z1_1 = h * (z2_1_i + 0.5 * k1_z2_1)
        k2_z2_1 = h * (- (c * (z2_1_i + 0.5 * k1_z2_1) + k *
        (z1_1_i + 0.5 * k1_z1_1)) / m)

        # Calcular los valores de z1 y z2 en el siguiente paso
        de tiempo utilizando los promedios ponderados
        z1_1[i] = z1_1_i + k2_z1_1
        z2_1[i] = z2_1_i + k2_z2_1

    return t1, z1_1
```

```
# Resolver el sistema utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden
t_1, z1_1 = runge_kutta2_method(m, c, k, z1_0, z2_0, I, n)

#####################################################################
# METODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEN 4, EXPLICITO
# ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 2DO ORDEN
#####################################################################

def runge_kutta(h, n, z1_0, z2_0, m, c, k):
    t_2 = np.linspace(0, n*h, n+1)
    z1_2 = np.zeros(n+1)
    z2_2 = np.zeros(n+1)

    z1_2[0] = z1_0
    z2_2[0] = z2_0

    for i in range(n):
        k1_z1_2 = h * z2_2[i]
        k1_z2_2 = h * (-c*z2_2[i]/m - k*z1_2[i]/m)

        k2_z1_2 = h * (z2_2[i] + 0.5*k1_z2_2)
        k2_z2_2 = h * (-c*(z2_2[i] + 0.5*k1_z2_2)/m - k*(z1_2[i] +
        0.5*k1_z1_2)/m)

        k3_z1_2 = h * (z2_2[i] + 0.5*k2_z2_2)
        k3_z2_2 = h * (-c*(z2_2[i] + 0.5*k2_z2_2)/m - k*(z1[i] +
        0.5*k2_z1_2)/m)

        k4_z1_2 = h * (z2_2[i] + k3_z2_2)
        k4_z2_2 = h * (-c*(z2_2[i] + k3_z2_2)/m - k*(z1_2[i] + k3_z1_2)/m)

        z1_2[i+1] = z1_2[i] + (1/6)*(k1_z1_2 + 2*k2_z1_2 + 2*k3_z1_2 + k4_z1_2)
        z2_2[i+1] = z2_2[i] + (1/6)*(k1_z2_2 + 2*k2_z2_2 + 2*k3_z2_2 + k4_z2_2)
```

```
    return t_2, z1_2

# Resolver el sistema de ecuaciones
t_2, z1_2 = runge_kutta(h, n, z1_0, z2_0, m, c, k)
y_real= real(n,x,y)

#Graficación
q=dibujar(t,z1,"Euler","red",None)
print(q)
r=dibujar(t_1,z1_1,"RK2","green","s")
print(r)
s=dibujar(t_2,z1_2,"RK4","blue",".")
print(s)
p=dibujar(x,y_real,"Real","black","*")
print(p)
```

Anexo 5: Código de la aproximación para la EDP

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del sistema
c = 1.0   # Velocidad de propagación de la onda
L = 10.0  # Longitud de la cuerda
T = 5.0   # Tiempo total de simulación
Nx = 5    # Número de puntos en la discretización espacial
           (muy pocos puntos)
Nt = 10   # Número de pasos de tiempo (muy pocos pasos)

# Tamaño del paso en el espacio y el tiempo (valores muy grandes)
dx = L / Nx
dt = T / Nt

# Discretización espacial y temporal
x = np.linspace(0, L, Nx)
```

```
t = np.linspace(0, T, Nt)

# Inicialización de la solución
u = np.zeros((Nt, Nx))

# Condiciones iniciales
u[0, :] = np.sin(np.pi * x / L)  # Onda sinusoidal inicial

# Coeficiente de estabilidad
alpha = (c * dt / dx)**2

# Método de diferencias finitas para aproximar la Ecuación de Onda
for n in range(0, Nt - 1):
    for i in range(1, Nx - 1):
        u[n + 1, i] = 2 * (1 - alpha) * u[n, i] + alpha * (u[n, i + 1] +
        u[n, i - 1]) - u[n - 1, i]

# Solución analítica
u_analitica = np.zeros((Nt, Nx))

for n in range(Nt):
    for i in range(Nx):
        u_analitica[n, i] = np.sin(np.pi * x[i] / L) * np.cos(np.pi *
        c * t[n] / L)

# Gráfico comparativo de la solución analítica y la aproximación (muy mala)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.xlabel('Posición en el espacio')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.title('Comparación entre Solución Analítica y Aproximación
(Diferencias Finitas Muy Mala) de la Ecuación de Onda')

# Selecciona algunos pasos de tiempo para la visualización
pasos_de_tiempo = [0, 2, 4, 6, 8]
```

```
for n in pasos_de_tiempo:
    plt.plot(x, u[n, :], label=f'Aproximación (t={t[n]:.2f})')
    plt.plot(x, u_analitica[n, :], linestyle='dashed', label=f'Solución
    Analítica (t={t[n]:.2f})')

plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```