DEDICATORIA

Durante mi estancia en la universidad, he vivido diversas situaciones que de alguna manera pudieran tener un efecto negativo como el de renunciar a la carrera, pero junto a mi han estado personas que me han ayudado y han sido pilares fundamentales en mi vida, por este motivo el título obtenido va dedicado a mis padres Luis y Cecilia, y mis hermanos Ricardo y Andrea. También a la persona que amo en esta vida, Mariela!!!

JOSE LUIS NEIRA GUILLERMO

DEDICATORIA

Esta Tesis está dedicada a mis padres y hermanos por todo el apoyo que me han brindado desde el seno de mi hogar durante esta pequeña pero importante etapa en la vida.

BRYAND DARIO PARRA CORONEL

AGRADECIMIENTO

En mi vida universitaria, en el aula de clase se ha recibido conocimiento, formación personal, consejos entre otras cosas y muy útiles para el crecimiento profesional de manera individual como colectiva, por la cual por este medio ofrezco mis sinceros agradecimientos a los docentes y al Ing. Eugenio Cabrera e Ing. Paúl Ochoa que nos ayudaron en la elaboración de la tesis.

JOSE LUIS NEIRA GUILLERMO

AGRADECIMIENTO

Agradezco infinitamente a Dios, porque es él quien permite que todas las cosas sucedan y siempre de la mejor manera, a todos mis profesores que supieron impartir su filosofía en las aulas de clase, a mis compañeros y amigos por la satisfacción de compartir la carrera entre todos, a los Ingenieros: Eugenio Cabrera y Paúl Ochoa, nuestros directores de tesis, por la dedicación para salir adelante con este trabajo, y de manera muy especial a mis padres, por el apoyo incondicional brindado en este trayecto tan importante de mi vida.

BRYAND DARIO PARRA CORONEL.

Contenido

RESUMEN

El presente proyecto elaborará una Guía de Prácticas en los lenguajes Matlab y Derive para impulsar el proceso de aprendizaje en la Facultad Ciencias de la Administración de la Universidad del Azuay, con la utilización de las aplicaciones de manera fácil.

Se explicará las herramientas de las aplicaciones que serán utilizadas en las materias de matemáticas tanto en Economía como en Ciclos Comunes, para lo cual se realizo una investigación a cada uno de los lenguajes que se usan.

Para ayuda en esta guía, los ejercicios han sido tomados del libro "Matemáticas para Administración y Economía de Ernest F. Haeussler, Jr – Richard S. Paúl. Décima edición".

ABSTRACT

This thesis will create a Practical Guide for Matlab and Derive Languages in order to move the process of learning in the Faculty of Administration Science in the Universidad del Azuay forward by the utilization of the applications in an easy way.

The applications' tools that will be used in the mathematical subjects, as much in Economy as in Normal Courses, will be explained in the guide. It was for this reason that an investigation into each of the languages that are used was done.

In order to help with this guide, the exercises have been taken from "*Mathematics for Administration and Economy,* Heaussler, Ernest F. & Paul, Richard S. Tenth Edition."

INTRODUCCION

Con el paso de los años, el avance tecnológico se ha involucrado en todos los campos de la educación, la medicina, la mecánica, etc. Las matemáticas no han sido la excepción, tomando en cuenta que en la antigüedad, uno de los primeros métodos de cálculo fue el ábaco, luego apareció la regla de cálculo, después apareció la calculadora, y finalmente hasta ahora, el computador. Todas estas formas de resolver ejercicios matemáticos han servido de mucho, por ejemplo, para calcular desde una suma hasta las operaciones logarítmicas complejas, ahorrando tiempo y dinero, colaborando también con el desarrollo tecnológico en el mundo.

Ahora tenemos al alcance de nuestras manos las computadoras, pda's, pocket pc's, etc. Este avance tecnológico nos brinda varias alternativas para la resolución de los ejercicios matemáticos de cualquier nivel de complejidad, los mismos que muchas veces resultan imposibles de resolverlos manualmente.

Presentamos un trabajo que enseña cómo utilizar dos lenguajes o aplicaciones diferentes para la resolución de ejercicios de la materia de Matemáticas que se dicta en la Facultad de Ciencias de la Administración de la Universidad del Azuay, dejando en claro al usuario de esta guía, que no se pretende enseñar matemáticas, sino trasladar lo aprendido en las aulas hacia los medios informáticos, con el fin de ahorrar tiempo en la realización de operaciones. Esto permitirá tener más posibilidades para la explicación teórica, el razonamiento, el planteamiento de problemas, el análisis de resultados, etc. Queremos demostrar que el avance tecnológico en el mundo ha involucrado también a las matemáticas, y que ahora podemos llegar a resolver ejercicios que, manualmente resultan demorados o muchas veces imposibles de realizar. Ayudamos con esto para que los estudiantes realicen un análisis más profundo de las matemáticas.

Esta tesis surge como una respuesta a las necesidades pedagógicas de la Facultad de Ciencias de la Administración de la Universidad del Azuay, y específicamente del Centro Académico de Matemáticas, quienes se preocupan por incrementar el nivel académico de los estudiantes.

En la actualidad, un excelente nivel académico depende en gran parte del avance tecnológico y del uso que se haga de los sistemas informáticos que se presentan ahora.

Se torna indispensable aprovechar estos recursos para el aprendizaje en la Universidad, ya que todas las personas tienen acceso a éstos.

Derive

Practica 0:

0.1 Introducción

En la guía se proporcionarán tablas que contengan la nomenclatura de los operadores matemáticos que se utilizarán para las prácticas. Estos operadores son algunos con los que funcionan las aplicaciones. También se indicarán el nombre de funciones opcionales que el alumno puede utilizar para el desarrollo de las prácticas.

Se indicará las partes principales que conforman dicha aplicación, además, se explicará de la manera más sencilla el uso correcto del programa.

Los ejercicios utilizados en ésta guía son obtenidos del libro “Matemáticas para Administración y Economía” décima edición de Ernest F. Haeussler.

Como nota final, ésta es una guía para el uso correcto del software matemático (Programa del Computador) y no para la enseñanza de las matemáticas.

0.2 Aplicación DERIVE

DERIVE es un programa de matemáticas para un computador. Ésta aplicación procesa variables, expresiones, ecuaciones, funciones, vectores y matrices al igual que una calculadora. También puede realizar cálculos numéricos y simbólicos, con algebra, trigonometría y análisis, además con representaciones gráficas en dos y tres dimensiones. Es una buena herramienta para documentar los trabajos, aprender y enseñar matemáticas.

Tanto para el profesor como para el estudiante, DERIVE permite nuevos enfoques para la enseñanza, aprendizaje y comprensión de las matemáticas. De hecho, es fácil comprobar que muchos temas pueden tratarse más eficientemente que usando métodos de enseñanza tradicionales. Muchos problemas que requieren cálculos extensos y laboriosos, pueden resolverse apretando tan solo una tecla cuando se usa DERIVE, permitiendo que los alumnos se concentren en el significado de los conceptos matemáticos, facilitando la comprensión y el desarrollo de éstos.

DERIVE es una buena herramienta para acceder de manera rápida a numerosas operaciones matemáticas y a visualizar problemas y soluciones de formas diversas, gracias a que dispone de un asistente amable y potente que es muy fácil de utilizar.

La aplicación DERIVE inicia como otra aplicación de Windows, haciendo doble click en el icono de la aplicación creado en el escritorio o en el menú INICIO. Tras la ejecución de la aplicación se visualizará una ventana similar a la figura 1.1 que cuenta con lo siguiente:

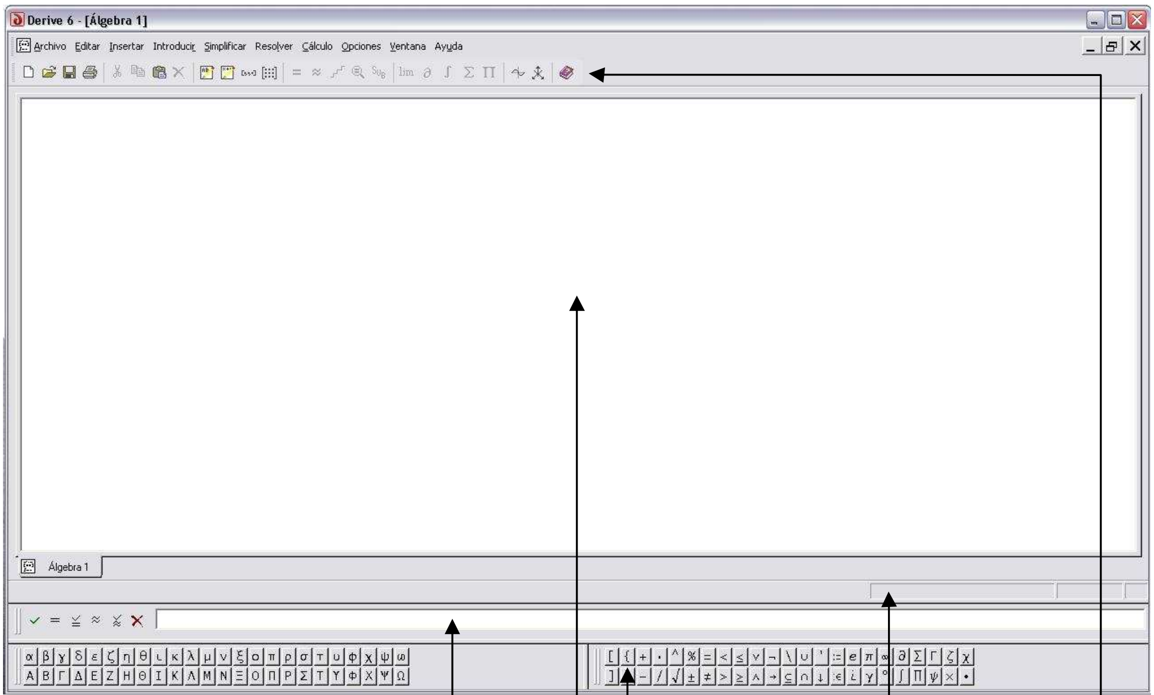


Figura: 0.2.1 Ventana inicial de DERIVE

- Barra de introducción de expresiones.
- Ventana de Algebra.
- Barra de letras griegas y la de símbolos matemáticos.
- Barra de estado.
- Barra de botones.

Barra de introducción de expresiones

Como se demuestra en la figura 0.2.2, es aquí donde se ingresan las expresiones a resolver, consta de estos botones:

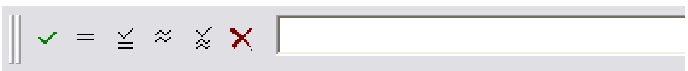


Figura: 0.2.2

-  añade la expresión en la ventana de álgebra.

- añade la expresión simplificada y el resultado en la ventana de álgebra.
- para aproximar la expresión y añade en la ventana de álgebra.
- y son la combinación de las funciones anteriores
- elimina la expresión ingresada

Ventana de Algebra

Es la ventana principal, aquí se visualiza las expresiones, los resultados, graficas. También se puede documentar el trabajo que se ha realizado.

La aplicación DERIVE dibuja las expresiones en ésta ventana, de tal forma que el estudiante pueda ver sus errores al momento del ingreso de las expresiones deseadas.

Existe una función interesante para poder corregir los errores cometidos en el instante de ingresar la expresión, fácil de aprender que más adelante será explicada en detalle.

Barra de letras griegas y la de símbolos matemáticos

La barra de símbolos matemáticos se encuentran en la parte inferior-derecha como se demuestra en la figura 0.2.3 y contiene las operaciones con las que DERIVE opera y se encuentran expuestas con el fin de facilitar el uso al practicante.

Mientras que la barra de letras griegas está ubicada en la parte inferior-izquierda y favorece a que el practicante no pierda tiempo en estar buscando o memorizando listados de comandos para obtener dicho carácter.

Figura: 0.2.3

Barra de estado

La barra de estado es muy útil, porque, indica al practicante el nombre de la función utilizada y el tiempo que se requirió para la resolución de dicha expresión. Ésta barra está ubicada en la parte superior de la barra de introducción de expresiones

Figura: 0.2.4

Barra de botones

Aquí contiene varias funciones con las que el practicante ya está familiarizado y puede hacer uso. Todas estas funciones se irán explicando paulatinamente como se requiera.

Ésta barra se demuestra en la figura 0.2.5

Figura: 0.2.5

0.3 Operadores Matemáticos

Durante la siguiente guía práctica, utilizaremos varios operadores matemáticos, los mismos que lo detallaremos en la siguiente tabla.

OPERADOR	OPERACIÓN
+	Adición o Suma
-	Sustracción o Resta
·	Multiplicación
/	División
^	Potenciación
>	Mayor que
≥	Mayor o igual que
<	Menor que
≤	Menor o igual que
=	Igual
[ ]	Indica el inicio y fin de una matriz o vector
,	Separador de valores para la matriz
;	Indicador de inicio de otra fila en la matriz
()	Signo de Agrupación

El estudiante debe utilizar los signos de paréntesis solo para agrupar operaciones como se los demuestran en las guías, no utilizar los corchetes y llaves para este propósito.

Se recomienda al estudiante que por cada ejercicio abra una nueva ventana de álgebra para mayor comprensión del manual y mejor adaptación al programa Derive.

A continuación mostraremos ejemplos básicos del ingreso de operaciones aritméticas en DERIVE. En cada ejemplo se mostrará un recuadro, en la parte izquierda - el ejercicio a resolver y en la parte derecha estará la manera de ingresar en la barra de introducción de expresiones, una vez que haya ingresado la ecuación puede seguir esta secuencia:

1. pulsar el botón ✓ o la tecla ENTER para que se dibuje la expresión en la ventana de Álgebra
2. pulse = para obtener la respuesta simplificada
3. por último pulse ≈ y se mostrará la respuesta en decimal

Nota: La secuencia que se acaba de explicar no es una norma a seguir en un futuro, sino se trata que el practicante se familiarice con la barra de introducción de expresiones.

- La siguiente expresión la demostraremos tal como se ilustra en la figura 0.3.1

$\frac{(2+3)(5-3)}{4-1}$	((2 + 3)(5 - 3)) / (4 – 1)

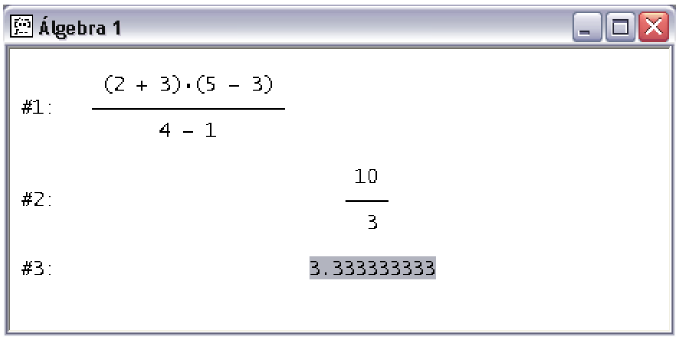


Figura: 0.3.1

Cada vez que ingrese cualquier operación en la ventana de álgebra se le asigna una variable, evitando escribir varias veces la misma ecuación. Para un ejemplo, en la barra de introducción de expresiones ingrese #1 y para finalizar pulse ✓.

- La siguiente expresión la demostraremos tal como se ilustra en la figura 0.3.2

$3^3+\frac{5}{4}$	3^3 + (5/4)

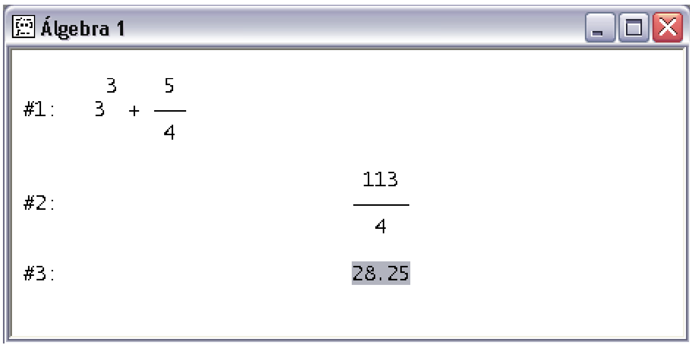


Figura: 0.3.2

- En la figura 0.3.3 mostraremos un ejemplo utilizando el botón de raíz cuadrada que se encuentra en la barra de símbolos matemáticos, al igual se puede resolver transformando a una operación de potenciación.

$\sqrt{25} + \sqrt{16}$	• √ 25 + √ 16 • 25 ^ (1/2) + 16 ^ (1/2)

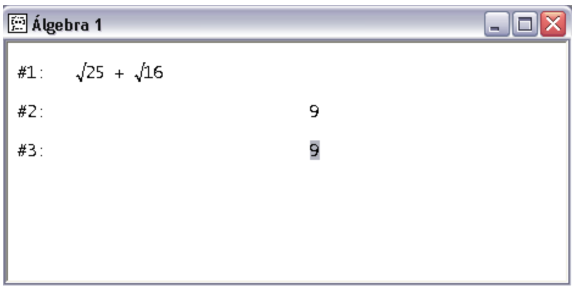


Figura: 0.3.3

- Las operaciones de raíces cúbicas y superiores, se resolverán como una operación de potencia como se observa en la figura 0.3.4.

$\sqrt[3]{8}$	8 ^ (1/3)

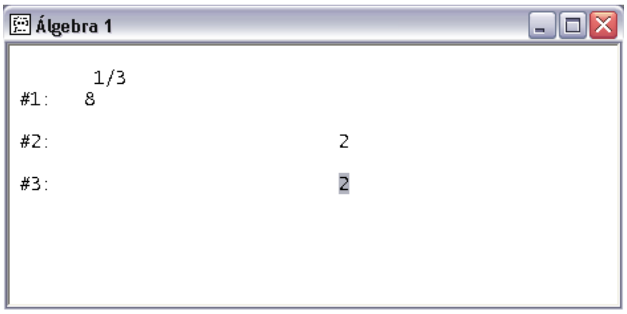


Figura: 0.3.4

- Forma de ingresar una ecuación, debe pulsar el botón ✓ de la barra para visualizar y finalizar.

$y = \sqrt{x^2 + 5}$	y = √ ((x ^ 2) + 5)

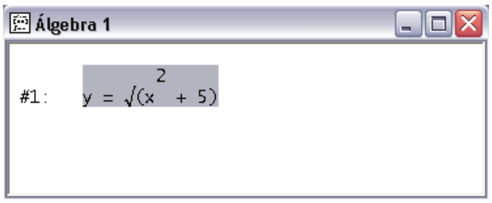


Figura: 0.3.5

DERIVE ofrece varias funciones, para ésta práctica utilizaremos las siguientes:

FUNCIÓN	OPERACIÓN
Abs()	Valor absoluto
Log(z)	Logaritmo natural o neperiano de z
Log(z, w)	Logaritmo de z con base w
Det()	Determinante de una matriz
Imp_dif()	Derivación implícita
Maximize()	Método simplex
Minimize()	Método simplex

El momento que se escriba el nombre de las funciones, en DERIVE no hay diferencia en escribir las palabras con mayúsculas o minúsculas.

- Resolveremos el siguiente ejercicio de valor absoluto utilizando la función abs().

$\|9 - 5\| = 4$	abs(9 – 5) = 4

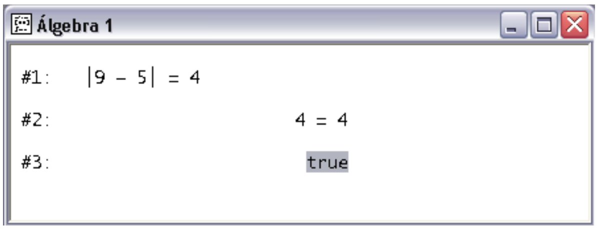


Figura: 0.3.6

- A continuación, la manera de utilizar las funciones antes descritas, al momento de ingresar la expresión en la barra de introducción de expresiones, para finalizar pulse .

$\text{Log}_3\, 4$	Log(4, 3)

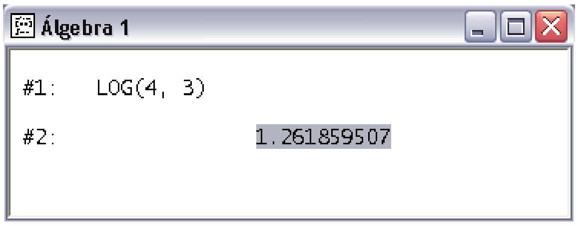


Figura: 0.3.7

- Realizaremos un ejemplo con base 10, al término del ingreso de la expresión pulse el botón para finalizar.

$\log_{10} 6$	Log(6, 10)

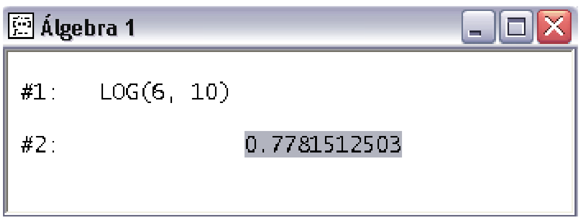


Figura: 0.3.8

Nota Importante: Al momento de realizar cualquier tipo de operación, cuando pulse o la tecla ENTER y la aplicación no responda, eso indica que está mal escrita o no se pueda realizar debido a las reglas matemáticas.

0.4. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

A continuación, con ejemplos se indicará como factorar y como realizar operaciones con expresiones algebraicas.

Ejercicio 1. Realice la operación indicada y simplifique.

$$(8x - 4y + 2)(3x + 2y - 5)$$

a) Para encontrar la solución a este ejercicio, primero debemos ingresar la expresión de la siguiente manera en la barra de introducción de expresiones, para finalizar pulse el botón o la tecla ENTER.

(8x – 4y + 2)(3x + 2y – 5)

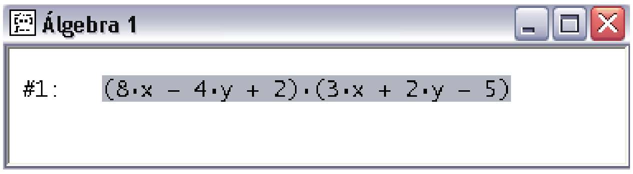


Figura: 0.4.1

b) Para resolver la operación algebraica diríjase al menú SIMPLIFICAR y presione en EXPANDIR y obtendrá la siguiente ventana.

Figura: 0.4.2

Si la expresión tiene más de 1 variable, como se observa en la figura 0.4.2 en la parte izquierda indica las variables a expandir, para este caso es necesario que las 2 variables se encuentren marcadas como se expone en la figura. Para finalizar pulse el botón EXPANDIR.

c) Y obtendrá el siguiente resultado.

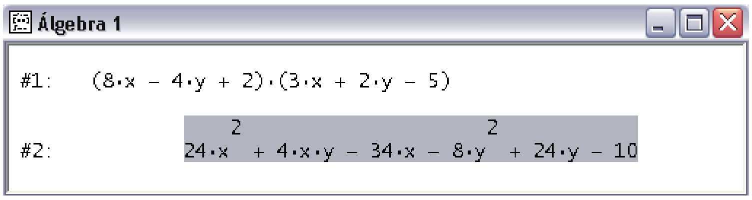


Figura: 0.4.3

Ejercicio 2. Factorice la expresión siguiente.

$$6x + 4$$

a) Para encontrar la solución a este ejercicio, primero debemos ingresar la ecuación de la siguiente manera en la barra de introducción de expresiones, para finalizar pulse el botón ✓ o la tecla ENTER.

6x + 4

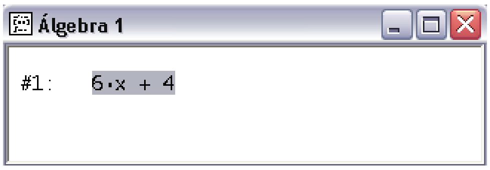


Figura: 0.4.4

b) Para factorar la expresión diríjase al menú SIMPLIFICAR y presione en FACTORIZAR y obtendrá la siguiente ventana.

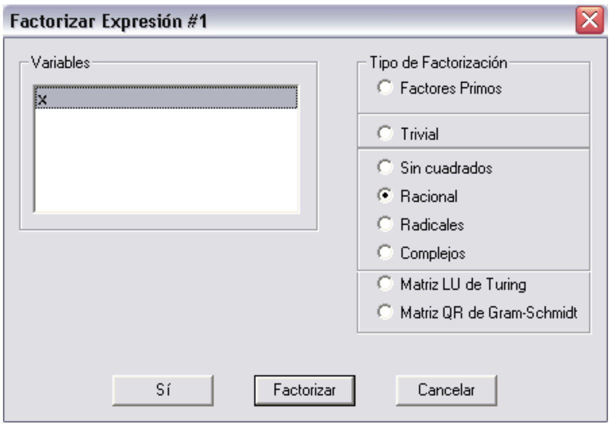


Figura: 0.4.5

c) Al pulsar el botón FACTORIZAR obtendrá el siguiente resultado.

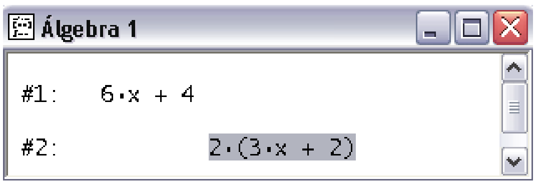


Figura: 0.4.6

0.5 EJERCICIOS

Unidad 0.6 Realice las siguientes operaciones y simplifique

2. $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$

17. $-3\{4x(x+2) - 2[x^2 - (3-x)]\}$

23. $(2x+3)(5x+2)$

25. $(x+3)^7$

36. $(2x-1)(3x^3 + 7x^2 - 5)$

51. $(3x^3 - 2x^2 + x - 3) \div (x+2)$

52. $(x^4 + 2x^2 + 1) \div (x-1)$

$(3x+1)^3(x^2+4x-2)^2$

Unidad 0.7 Factorice las expresiones siguientes

16. $y^2 - 15y + 50$

23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$

40. $27 + 8x^3$

43. $P(1+r) + P(1+r)r$

46. $81x^4 - y^4$

Unidad 0.8 Realice las operaciones y simplifique

10. $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{y-x}$

28. $\frac{\frac{6x^2y+7xy-3y}{xy-x+5y-5}}{\frac{x^3y+4x^2y}{xy-x+4y-4}}$

40. $\frac{2x-3}{2x^2+11x-6} - \frac{3x+1}{3x^2+16x-12} + \frac{1}{3x-2}$

48. $\frac{\frac{x-1}{x^2+5x+6} - \frac{1}{x+2}}{3+\frac{x-7}{3}}$

58. $\frac{x-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$

PRACTICA 1:

ECUACIONES E INECUACIONES

1.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Ejercicio 1.** Resolver por factorización. Ejemplo 28 de la pág. 53.

$$3\ (x^2 + 3x - 10)\ (x-8) = 0$$

Para encontrar el o los valores de x procedemos de la siguiente manera:

a) Debemos ingresar la ecuación en la barra de introducción de expresiones de la siguiente forma, y al culminar pulse ✓: 3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0

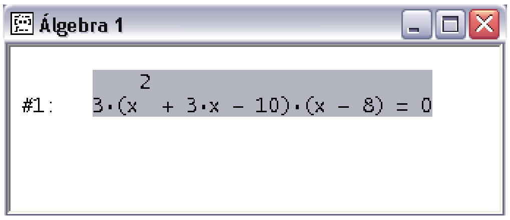


Figura: 1.1.1

b) Para obtener los valores de x, pulse de la barra de botones, aparecerá la ventana de Resolver Expresión, la figura 1.1.2 en el lado izquierdo indica las variables que contiene la ecuación, se ha seleccionado la variable x que vamos a despejar. Tan solo de un click en el botón RESOLVER y mostrará el resultado del ejemplo.

Figura 1.1.2

c) La figura 1.1.3 nos muestra los resultados de la ecuación, en este caso serán "8","2" y "-5".

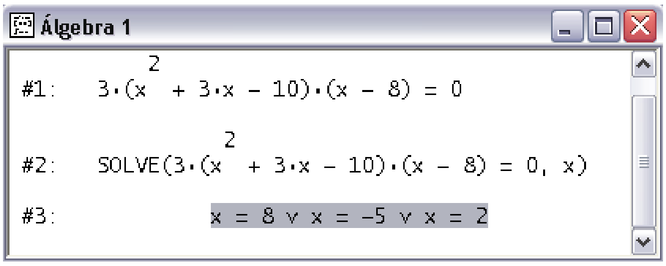


Figura: 1.1.3

- **Ejercicio 2.** Resuelva la desigualdad y realice el bosquejo de la gráfica.

3x > 9

a) Para obtener x debemos realizar los mismos pasos del **ejercicio 1**, y al culminar el resultado será x>3.

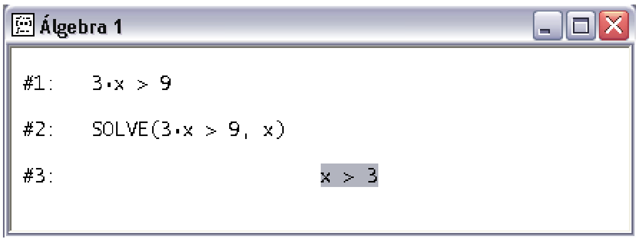


Figura: 1.1.4

b) Para realizar el bosquejo de la gráfica, de un click sobre el #1 o #3 para resaltar la expresión, ahora pulse el botón  y aparecerá la ventana “GRAFICAS-2D” con su propia barra de botones, y pulse el botón  de la nueva barra para dibujar la expresión, como se demuestra en la figura 1.1.5.

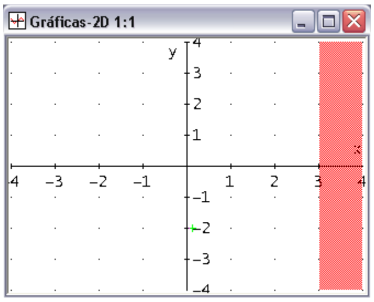


Figura: 1.1.5

c) Para incrustar la gráfica en la ventana de álgebra, diríjase al menú ARCHIVO y pulse en INCRUSTAR (también puede utilizar Ctrl+B).

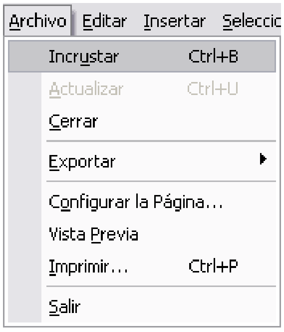


Figura 1.1.6

d) Para regresar a la ventana de álgebra, lo puede hacer pulsando el botón .

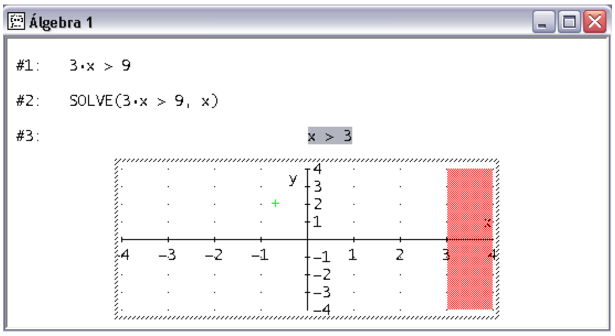


Figura: 1.1.7

Nota Importante: El propósito de incrustar la imagen, es porque DERIVE guarda lo que se ha realizado tan solo en la ventana de álgebra.

- **Ejercicio 3.** Determinar por sustitución cuales de los números dados satisfacen la ecuación. Ejemplo 1 de la pág. 41.

$$9x - x^2 = 0 \qquad [1, 0]$$

a) Primero debemos ingresar la ecuación a la ventana de álgebra.

9x – (x^2) = 0

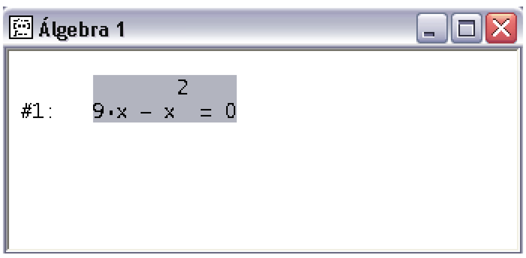


Figura: 1.1.8

b) Procedemos a sustituir, pulse  de la barra de botones y aparecerá la ventana Sustitución de Variables, aquí define la variable y el valor que se asigna, para este caso, x se le asigna un valor de 1 y para terminar presione el botón SIMPLIFICAR.

Figura: 1.1.9

c) En la siguiente figura, se ve claramente que el valor de 1 no satisface la ecuación. Ingresemos un comentario pulsando  de la barra de botones y digite el siguiente texto: "con el valor de 1 no satisface la ecuación".

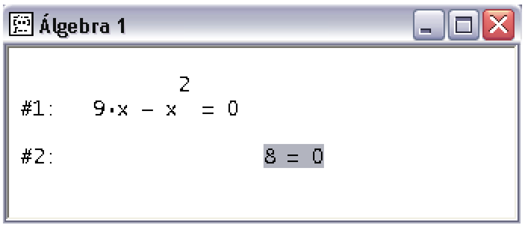


Figura: 1.1.10

d) Ingresado el texto, para sustituir el otro valor en la ecuación, con el mouse seleccione la ecuación del #1 y repita el paso b ingresando el valor de 0.

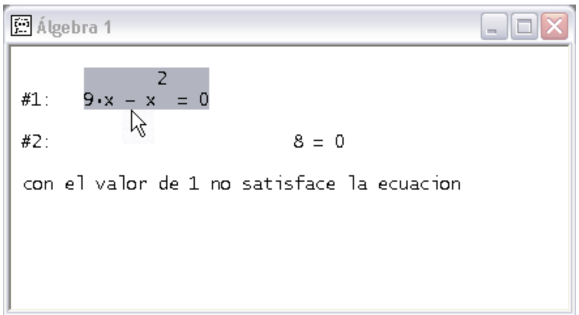


Figura: 1.1.11

e) Una vez alcanzado el resultado, se obtiene que el valor de 0 satisface la ecuación y proceda a ingresar un comentario.

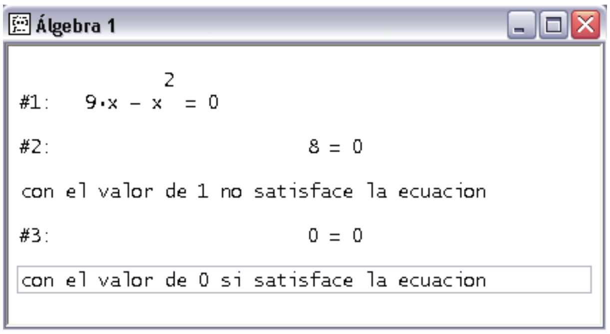


Figura: 1.1.12

1.2 Ejercicios

Unidad 1.1 Determine el valor que satisface la ecuación.

1. $y + 2(y - 3) = 4 \qquad [\frac{10}{3}, 1]$

6. $x(x + 1)^2(x + 2) = 0 \qquad [0, -1, 2]$

Encuentre los valores de y para los correspondientes valores de x.

$y = x^3 + 3x^2 + 2x \qquad [2, -1, {}^{1}/_{5}]$

Resolver las siguientes ecuaciones

41. $\frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{6} = x - 2$

42. $\frac{x}{5} + \frac{2(x-4)}{10} = 7$

44. $\frac{2y-7}{3} + \frac{8y-9}{14} = \frac{3y-5}{21}$

46. $(3x - 1)^2 - (5x - 3)^2 = -(4x - 2)^2$

Unidad 1.3 Halle el valor de x que satisface la ecuaciones.

28. $3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0$

42. $0.01x^2 + 0.02x - 0.6 = 0$

48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0$

62. $\frac{2x - 3}{2x + 5} + \frac{2x}{3x + 1} = 1$

73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0$

79. **Geometría.** El área de una pintura rectangular, con ancho 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles con las dimensiones de la pintura?

83. **Dosis de droga**. Existen varias reglas para determinar las dosis de las medicinas para niños una vez especificadas las de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etc. Si A es la edad del niño, d es la dosis para adulto y c la dosis para niño, a continuación se presentan dos reglas.

Regla de Young: $c = \frac{A}{A+12}d$

Regla de Cowling: $c = \frac{A+1}{24}d$

¿A qué edad las dosis para los niños son las mismas usando estas reglas?

Aquí el profesor puede realizar otras preguntas.

Unidad 2.1

6. **Administración de bosques**. Una compañía maderera posee un bosque que tiene forma rectangular de 1x2 millas. Si se tala una franja uniforme de árboles en los extremos de este bosque, ¿Cuál debe ser el ancho de la franja, si se deben conservar $3/4$ de millas cuadradas de bosque?

10. **Ventas**. La directiva de una compañía quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de $100000. Para este caso se cuenta con la siguiente información: precio de venta por unidad, $20; costo variable por unidad, $15; costo fijo total, $600000. A partir de estos datos determine las unidades que deben venderse.

23. **Cuidado de la vista.** Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros $35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales en ese rubro, hasta cubrir un total máximo de $100. Para un empleado, determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa.

29. **Rentas.** Usted es el asesor financiero de la compañía que posee un edificio con 50 oficinas. Cada una puede rentarse en $400 mensuales. Sin embargo, por cada incremento de $20 mensuales se quedarán dos

vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener un total de $20240 mensuales de rentas del edificio. Se le pide determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

33. **Equilibrio de mercado.** Cuando el precio de un producto es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $2p - 8$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $300 - 2p$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está equilibrio. Determine ese valor de p.

Unidad 2.2 Resolver las siguientes inecuaciones con sus representaciones graficas.

18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}$

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2-0.01x}{0.2}$

34. $\frac{5y-1}{-3} < \frac{7(y+1)}{-2}$

35. **Utilidades**. Cada mes del año pasado una compañía tuvo utilidades mayores que $37000 pero menores que $53000. Si S representa los ingresos totales del año, describa S utilizando desigualdades.

37. **Geometría**. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para x.

Unidad 2.3

3. **Arrendamiento con opción a compra vs compra**. Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de poseer un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Ella puede arrendar un automóvil por $420 al mes (con una base anual). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es $0.06. Si ella compra el automóvil, el gasto fijo anual seria de $4700, y otros costos ascenderían a $0.08 por milla. ¿Cuántas millas por lo menos tendría que conducir ella por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

7. **Inversión.** Una compañía invierte $30000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y $6\frac{3}{4}$%. Desea un rendimiento anual que no sea

menor al $6\frac{1}{2}\%$. ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}\%$?

11. **Sueldo por hora**. A los pintores con frecuencia se les paga por hora o por obra determinada. El salario que reciben puede afectar a su velocidad de trabajo. Por ejemplo, suponga que unos pintores pueden trabajar por \$8.50 la hora, o por \$300 más \$3 por cada hora por debajo de 40, si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma t horas. Si $t \geq 40$, claramente el sueldo por hora es mejor. Si $t \leq 40$, ¿para qué valores de t el salario por hora es mejor?

Unidad 2.4 Resuelva la siguiente expresión.

20. $|4 + 3x| = 6$

22. $|7x + 3| = x$

28. $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}$

31. $\left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$

35. $\left|\frac{3x-8}{2}\right| \geq 4$

Unidad 9.5 Resolver las siguiente desigualdades con sus representaciones graficas

15. $x^3 + 2x^2 - 3 > 0$

20. $\frac{3}{x^2-5x+6} > 0$

21. $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$

24. $\frac{2x+1}{x^2} \leq 0$

27. **Ingresos**. Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de cada uno es de 20 – 0.1q dólares. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso de las ventas no sea menor que \$750?

29. **Diseño de recipiente**. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa, mediante el corte de un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los

lados. La caja debe contener al menos 324 $pulg^3$. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

PRACTICA 2

FUNCIONES Y GRÁFICAS, RECTAS, PARABOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1 INTRODUCCION

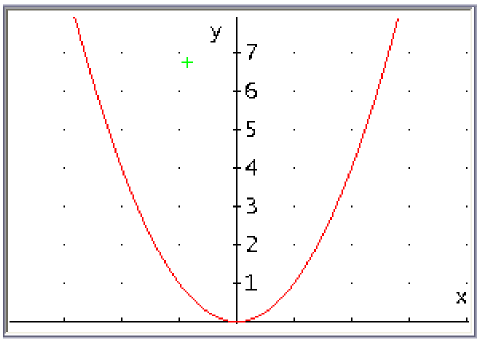
Comportamiento de las ecuaciones

Observar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas.

Simetría:

En ésta ocasión examinaremos ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen simetría.

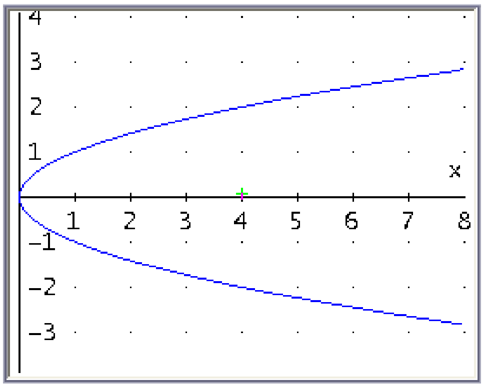
Considere la gráfica de $\mathbf{y=x^2}$ de la siguiente gráfica, la parte izquierda del eje **y** es el reflejo de la parte de la derecha, del eje, y viceversa



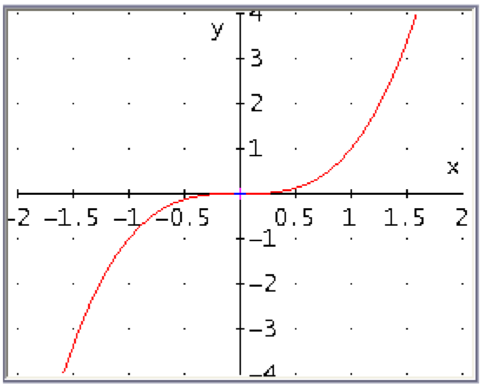
Ejemplo 1:

Simetría con respecto al eje "y".

Con el antecedente anterior, podremos ver que la gráfica de $\mathbf{x=y^2}$ (la cual es lo contrario de la ecuación propuesta en el párrafo anterior) tendrá simetría con respecto al eje **x.**

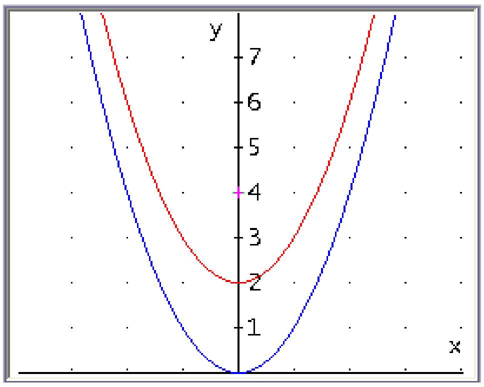


Tenemos un tercer tipo de simetría, simetría con respecto al origen, y se ilustra por la gráfica de $\mathbf{y=x^3}$, a la cual la graficaremos de la misma manera que la anterior, obteniendo la siguiente gráfica.



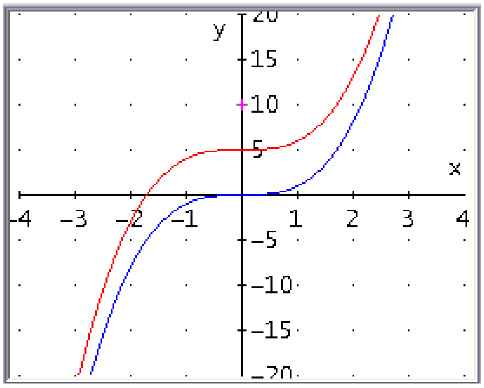
Traslaciones y reflexiones:

A veces, al modificar una función mediante una manipulación algebraica, la gráfica de la nueva función puede obtenerse a partir de la gráfica de la función original realizando una manipulación geométrica. Podemos utilizar la gráfica de $\mathbf{f(x)= x^2}$ para graficar $\mathbf{g(x)= x^2+2}$. Obsérvese que $\mathbf{g(x)=f(x)+2}$. Por tanto, para cada $\mathbf{x}$, la ordenada correspondiente para la gráfica de $\mathbf{g(x)= x^2+2}$, es dos unidades mayor que la obtenida para la gráfica de $\mathbf{f(x)= x^2}$. Esto significa que la gráfica de $\mathbf{g(x)= x^2+2}$ es la gráfica de $\mathbf{f(x)= x^2}$, desplazada o trasladada, 2 unidades hacia arriba, tal como nos muestra la figura.



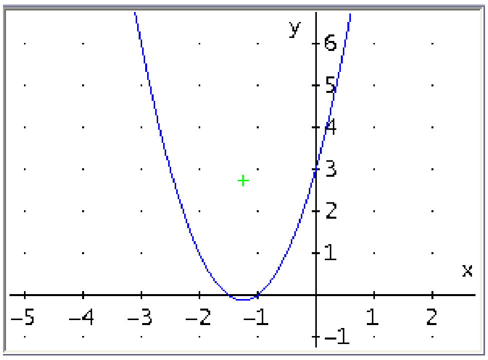
En este caso pedimos que **y1, y2** se grafiquen en función de la variable **x,** aclarando que **y1, y2** representan las variables **“f(x)”** y **“g(x)”** respectivamente.

Si aplicamos esta misma teoría a otra función, por ejemplo, **f(x)=x^3,** sumándole a esta una constante cualquiera, para este caso, le sumaremos **5** a la variable, obtendremos que la nueva gráfica se desplazará 5 unidades hacia arriba, tal como nos muestra la figura.



Gráfica de una función cuadrática.

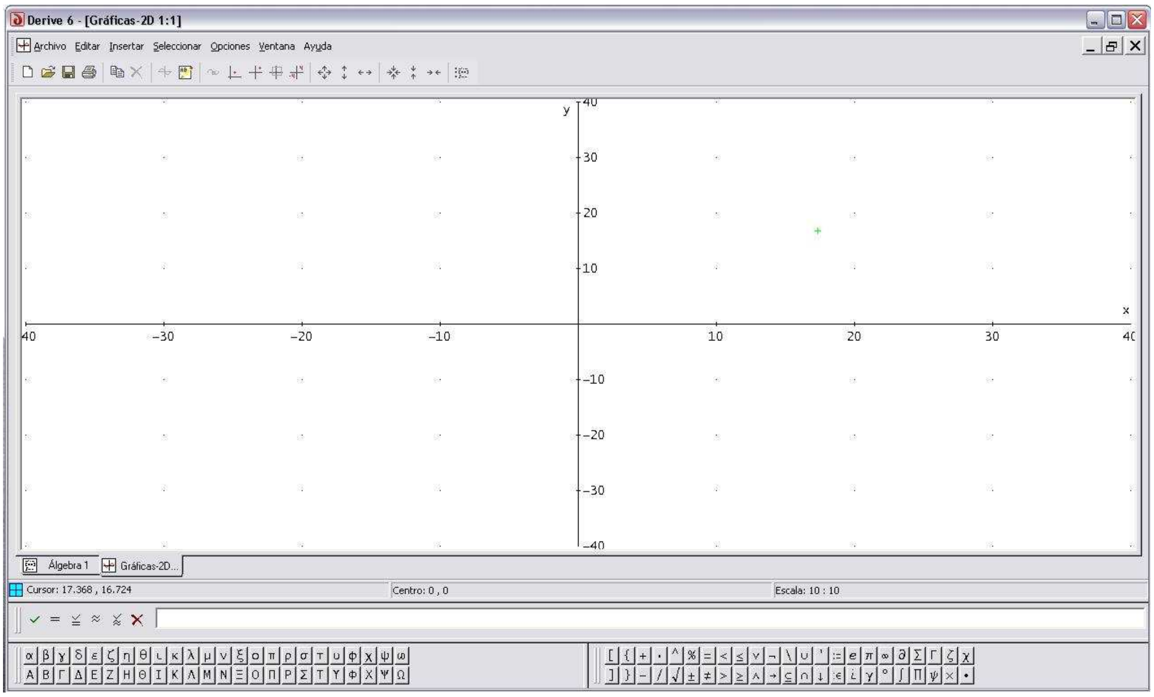
La gráfica de la función cuadrática $2x^2 + 5x + 3$ es una parábola por las siguientes razones:



1. Si a> 0, la parábola abre hacia arriba. Si a<0, abre hacia abajo.
2. Para hallar el punto más bajo de la grafica se calcula $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
3. La c es la intersección con el eje y.

Derive - Gráficas 2D

En esta guía el estudiante debe relacionarse con la ventana "**Gráficas 2D**", es similar a la ventana de álgebra y su diferencia consiste en una nueva barra de botones.



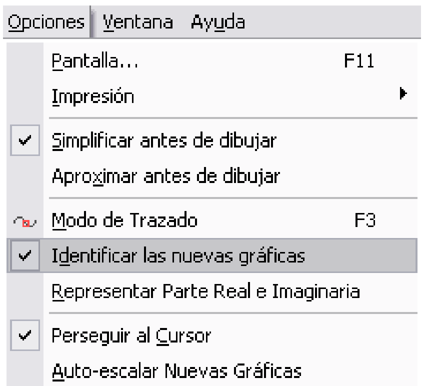
Gráfica 2D

Barra de botones

Vamos a explicar los botones más importantes que el practicante utilizará, hay funciones conocidas que no necesitan ser expuestas.

-  dibuja la expresión seleccionada en la ventana de álgebra.
-  ingresa una anotación en la coordenada que guste.
- mueve el cursor sobre la gráfica.
-  centra la gráfica de acuerdo a la posición del cursor.
-  y  centran la gráfica en el origen.
-  selección grafica de la región gráfica o rango.
-  éstas opciones permiten aumentar o disminuir el valor tanto para el eje x como para el eje y.
-  activa o maximiza la ventana de álgebra.

En algún momento de su estudio necesitará realizar el bosquejo de varias gráficas, para identificarlas a cada una de ellas en el menú OPCIONES debe seleccionar en IDENTIFICAR LAS NUEVAS GRAFICAS.



2.2. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

2.2.1. FUNCIONES Y SUS GRAFICAS

- **Ejercicio 1.** Realizar el bosquejo de la gráfica de la siguiente ecuación.

$$y = 4x^2 - 16$$

a) Primero ingresemos la ecuación en la barra de introducción de expresiones y luego pulse o la tecla ENTER.

y = 4x ^ 2 – 16

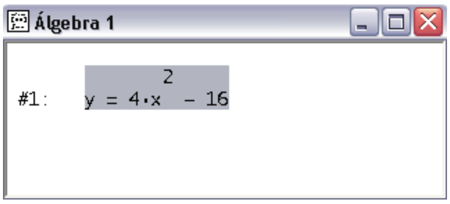


Figura: 2.2.1.1

b) Para realizar el bosquejo de la gráfica, pulse el botón para abrir la ventana de "Gráfica 2D", ahora pulse el mismo botón de la nueva barra y tendrá la siguiente figura:

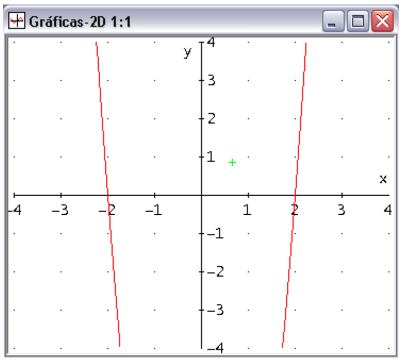


Figura: 2.2.1.2

c) Pulse el botón dos veces, con el propósito de visualizar la grafica en su totalidad:

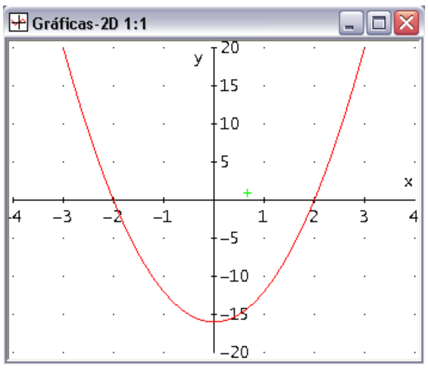


Figura: 2.2.1.3

d) Incruste la imagen obtenida en la ventana de álgebra, pulse  para regresar a la ventana principal y el resultado será el siguiente:

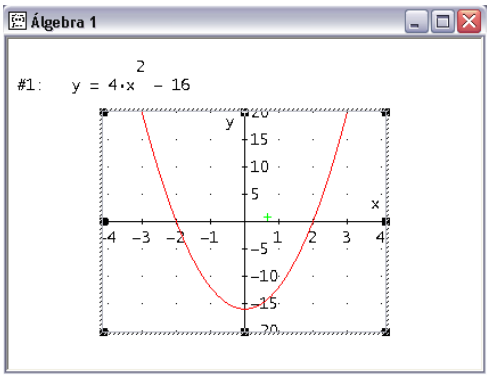
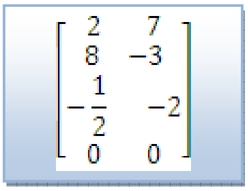


Figura: 2.2.1.4

- **Ejercicio 2.** Localice los puntos y únalos a partir de las siguientes coordenadas: (2, 7), (8, -3), (-1/2, -2) y (0, 0). Ejemplo 1 de la pág. 112.



$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & -3 \\ -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Para realizar la gráfica, los puntos deben ser ingresados en una matriz, para crearla pulse el botón  y al finalizar obtendrá la siguiente figura.

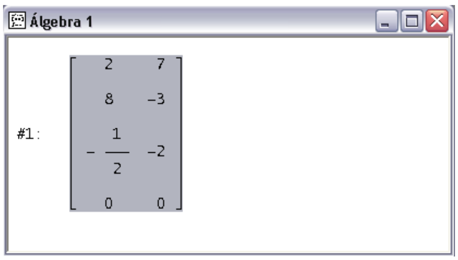


Figura: 2.2.1.5

b) Para que los puntos se conecten entre sí, se necesita cambiar la configuración del programa. Pulse el botón  y dando doble click en ésta ventana obtendrá la siguiente figura.

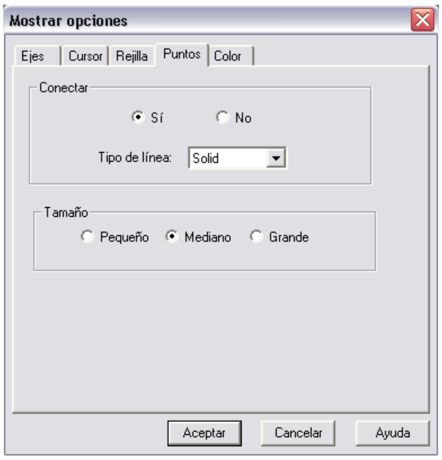


Figura: 2.2.1.6

Elija la pestaña PUNTOS y seleccione SI en CONECTAR, esta opción hace que los puntos ingresados en la matriz se enlacen, a continuación pulse ACEPTAR.

c) Para obtener la grafica pulse el botón  de la ventana “Gráfica 2D”, debido a que la gráfica es grande pulse el botón .

d) Para centrar la grafica utilice el botón , centrará de acuerdo a la posición del cursor, con el mouse de un click en el primer cuadrante y pulse el botón, y obtendrá una grafica parecida a la figura 2.2.1.7.

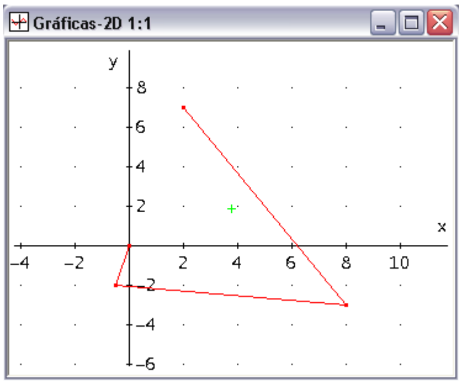


Figura: 2.2.1.7

e) Incruste la imagen y regrese a la ventana de álgebra pulsando .

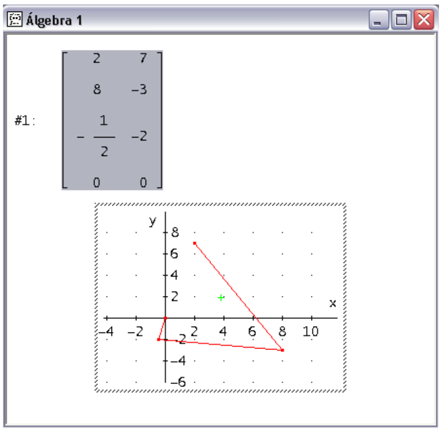


Figura: 2.2.1.8

2.2.2. RECTAS, PARABOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

- **Ejercicio 1 – RECTA.** Hacer el bosquejo de la gráfica. Ejemplo 8 de la pág. 133.

$$2x - 3y + 6 = 0$$

a) Ingrese la ecuación usando la barra de introducción de expresiones, una vez terminado presione el botón  para obtener la ventana “GRAFICA 2D” y pulse una vez más el mismo botón de la nueva barra de botones para obtener la grafica.

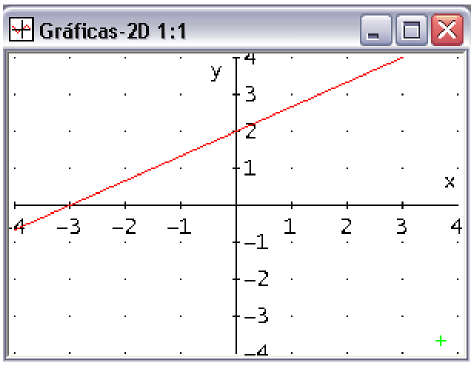


Figura: 2.2.2.1

b) Para obtener los puntos de corte con respecto a los ejes “x” e “y”, pulse  para regresar a la ventana de álgebra y pulsamos  para sustituir el valor de la variable.

Figura: 2.2.2.2

c) Asignemos un valor de 0 a la variable x, para terminar presione SIMPLIFICAR, le devolverá una ecuación que no se encuentra despejada, para encontrar el valor de y pulse  y obtendrá el siguiente resultado.

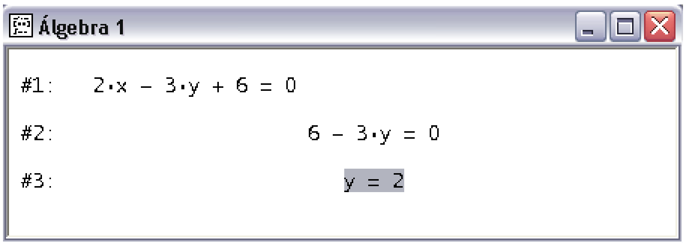


Figura: 2.2.2.3

d) Para la primera coordenada se obtuvo (0, 2), para obtener el otro punto repetimos los pasos b y c, pero ahora se le asigna valor de 0 a y. Al finalizar el otro punto será (-3, 0).

- **Ejercicio 2 – PARABOLA**. Realizar el bosquejo de la gráfica y encontrar los cortes con el eje x. Ejemplo 3 de la pág. 147.

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

a) Primero ingrese la ecuación sin igualar a 0y obtenga la siguiente gráfica pulsando el botón .

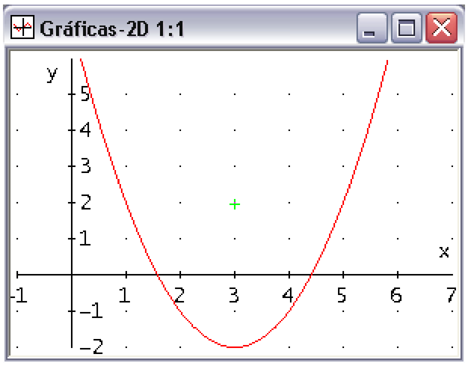


Figura: 2.2.2.4

b) Regresamos a la ventana del álgebra con el botón , para encontrar el valor de x, pulse el botón  de la barra y obtendrá la siguiente figura.

Figura: 2.2.2.5

c) De por finalizado pulsando en RESOLVER y dará como resultado $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

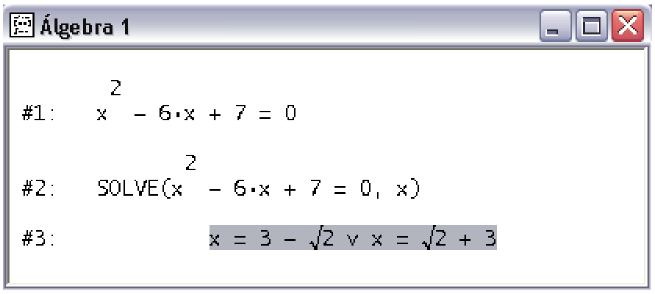


Figura: 2.2.2.6

- **Ejercicio 3 – SISTEMA DE ECUACIONES.** Equilibrio con demanda no lineal. Ejemplo 2 de la pág. 170.

Encontrar el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$ y $p = \frac{8000}{q}$, respectivamente.

a) Primero visualizará las 2 ecuaciones en la ventana del álgebra con el botón , no es necesario ingresar los caracteres "p=".

$\frac{q}{40} + 10$	q/40 + 10
$\frac{8000}{q}$	8000/q

b) Aquí la ecuación de la demanda no es lineal, entonces procedemos a igualar las ecuaciones, para esto en la barra de introducción de expresiones ingrese lo siguiente:

#2 = #1

Y obtendrá la siguiente ecuación como se demuestra en la figura:

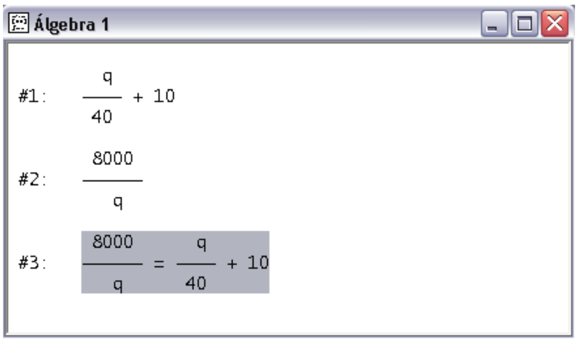


Figura: 2.2.2.7

c) Necesitamos despejar la variable q, pulse el botón , aparecerá la siguiente ventana y de un click sobre RESOLVER:

Figura: 2.2.2.8

d) Obtendrá dos respuestas como se demuestra en la figura 2.2.2.9.

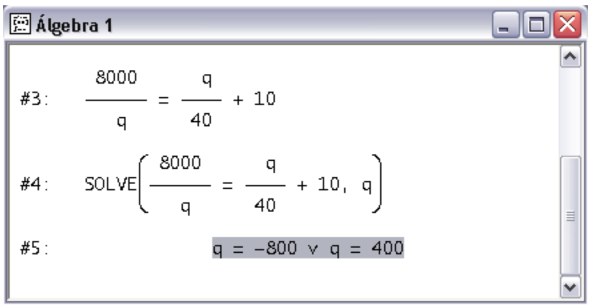


Figura: 2.2.2.9

e) Se descarta q = -800, ya que q representa una cantidad. Eligiendo q = 400, reemplazamos en cualquiera de las 2 ecuaciones iníciales y tenemos p = (8000/400) = 20, de modo que el punto de equilibrio es (400, 20). Grafique las ecuaciones del #1 y #2 pulsando .

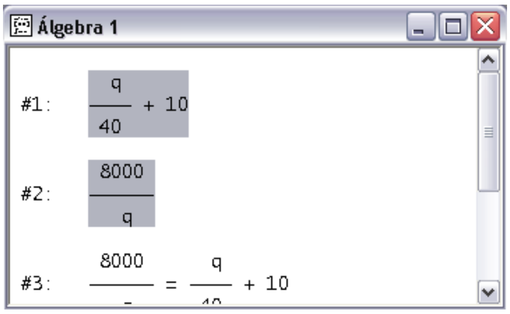


Figura: 2.2.2.10

f) Una vez graficado, comprobará que el punto de equilibrio se encuentra en las coordenadas (400,20).

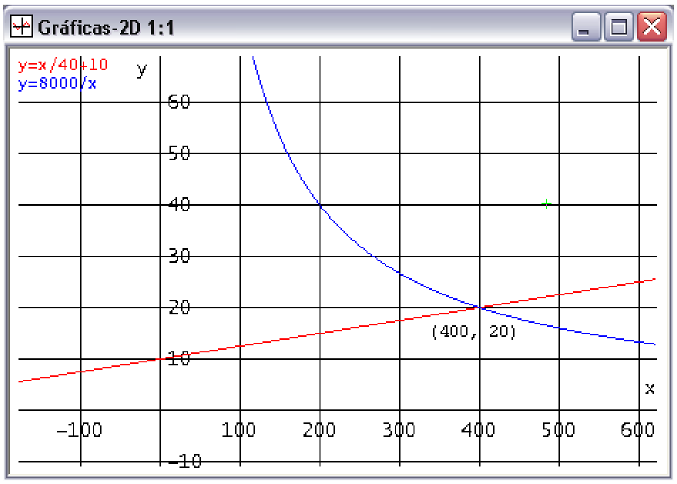


Figura: 2.2.2.11

Como se observa en la figura 2.2.2.11, “(400, 20)” es un texto ingresado por el practicante y si quiere obtener el cuadriculado en la grafica, de doble click sobre la grafica, y obtendrá lo siguiente:

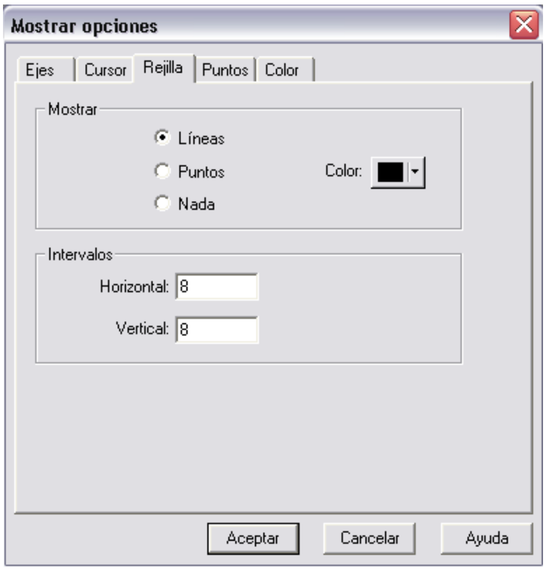


Figura: 2.2.2.12

Elija la viñeta REJILLA y en la opción MOSTRAR seleccione LINEAS. Pulse ACEPTAR para culminar.

- **Ejercicio 4 – SISTEMA NO LINEAL.** Realice el bosquejo de las siguientes funciones y obtener los puntos de corte.

$$y = 2x + 3 \qquad y = x^2 - 5$$

Si dichas funciones contaran con 3 variables, la graficación se realizará usando el botón  ("Gráficas 3D") y el procedimiento es el mismo.

a) Primero debe ingresar las dos ecuaciones de la siguiente manera:

y = 2x + 3
y= (x^2) - 5

Una vez ingresado, con el mouse seleccione las dos expresiones como se demuestra en la siguiente figura:

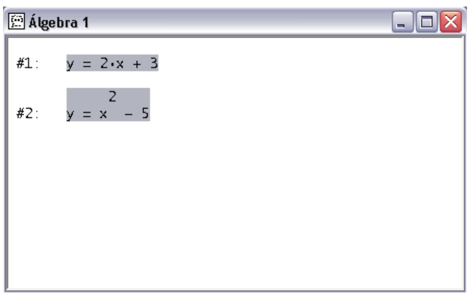


Figura: 2.2.2.13

b) Vamos a realizar el bosquejo de las gráficas y visualizaremos su respectiva ecuación para identificarlas, presione el botón  para que aparezca la ventana "Gráfica 2D", diríjase al menú OPCIONES y seleccione INDENTIFICAR LAS NUEVAS GRAFICAS, ahora pulse  para dibujar las expresiones y obtendrá la siguiente imagen.

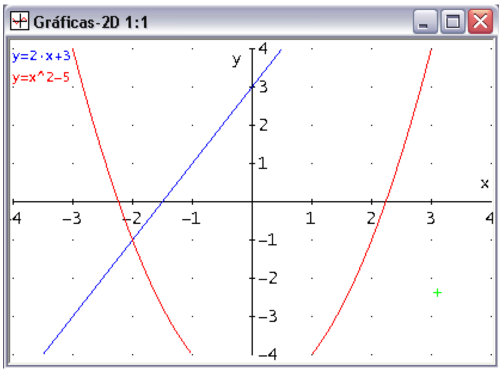


Figura: 2.2.2.14

c) Para una visión completa pulse dos veces el botón . Ahora para obtener los puntos de corte diríjase a la ventana de álgebra con el botón , seleccione el menú RESOLVER y presione en SISTEMA.

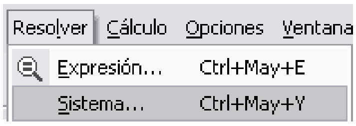


Figura: 2.2.2.15

d) A continuación tendrá la siguiente ventana donde va a ingresar el número de ecuaciones, para este ejemplo seleccione 2 y pulse en SI.

Figura: 2.2.2.16

e) Obtendrá la siguiente pantalla:

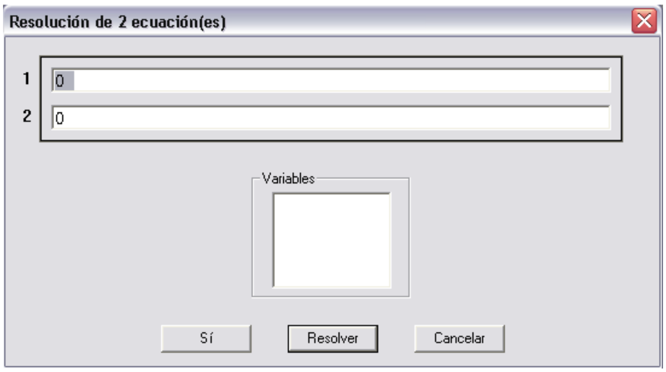


Figura: 2.2.2.17

f) En el recuadro 1 ingrese el #1 y en el recuadro 2 ingrese #2, cuando esté en el recuadro 2 pulse la tecla TAB para visualizar las variables, como se observa en la figura siguiente:

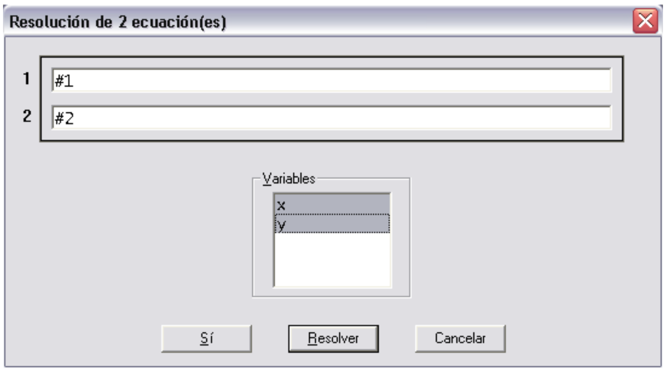


Figura: 2.2.2.18

g) Las 2 variables deben estar seleccionadas, en éste caso "x" e "y", pulse la tecla RESOLVER para obtener la respuesta.

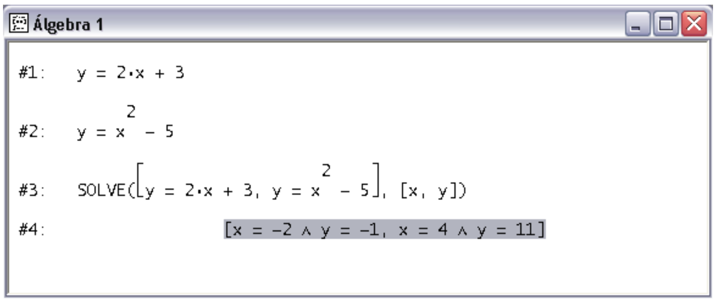


Figura: 2.2.2.19

Respuesta: El primer punto de corte es (-2, -1) y el segundo punto es (4, 11)

NOTA: El símbolo # junto al número representa a dicha ecuación que se visualiza en la ventana de álgebra.

2.3. Ejercicios

Unidad 3.5 Determine las intersecciones con el eje “x” e “y”. También pruebe la simetría con respecto al eje “x”, al eje “y” y al origen. Después realice el bosquejo de las gráficas.

2. $y = x^2 - 4$

5. $9x^2 - 4y^2 = 36$

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$

13. $y = \frac{x^3}{x^2 + 5}$

15. $y = \frac{3}{x^3 + 8}$

19. $y = x^3 - 4x$

Unidad 4.2

15. **Ecuación de demanda.** Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18 cada una. Halle la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieren 30 unidades.

Unidad 4.3

29. **Ingreso.** La función de la demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2400 - 6q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (semanales). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

31. **Utilidad.** La utilidad diaria de la venta de árboles para el departamento de jardinería de un almacén está dada por $P(x) = -x^2 + 18x + 144$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga la gráfica de la función.

Unidad 4.4 Resolver los siguientes sistemas

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36 \\ 8v - 3w = -54 \end{cases}$

17. $$\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

27. **Tejidos**. Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base de algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste $3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de $4.00, $3.00 y $2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

41. **Contratación de trabajadores**. Una compañía paga a sus trabajadores calificados $15 por hora en su departamento de ensamblado. Los trabajadores semicalificados de ese departamento ganan $9 por hora. A los empleados de envíos se les paga $10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de $760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, debe emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos trabajadores semicalificados, calificados y empleados de envíos deben contratar la compañía?

Unidad 4.5 Resuelva el sistema no lineal.

3. $$\begin{cases} p^2 = 5 - q \\ p = q + 1 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x^2 = y^2 + 13 \\ y = x^2 - 15 \end{cases}$$

Unidad 4.6

6. Determine el punto de equilibrio si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo.

Oferta: $p = (q + 10)^2$

Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$

13. Y_{TR} representa el ingreso total en dólares y Y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades

producidas como el número de unidades vendidas. Encuentre la cantidad de equilibrio.

$$Y_{TR} = 100 - \frac{1000}{q+5}$$

$$Y_{TC} = q + 35$$

PRACTICA 3:

LOGARITMOS Y ÁLGEBRA DE MATRICES

3.1. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

3.1.1 FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

- **Ejercicio 1.** Encuentre el valor de x. Ejemplo 35 de la pág. 201.

$$\ln x = -3$$

a) Primero ingrese la expresión a la ventana de álgebra.

Ln (x) = -3

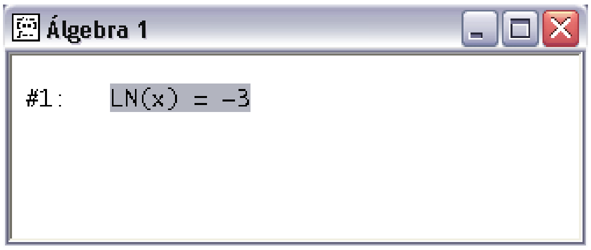


Figura: 3.1.1.1

b) Para despejar la variable x, pulse .

Figura: 3.1.1.2

c) Pulse RESOLVER para terminar.

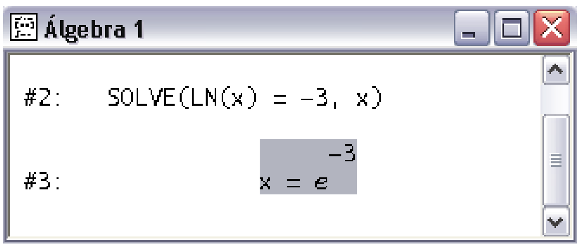
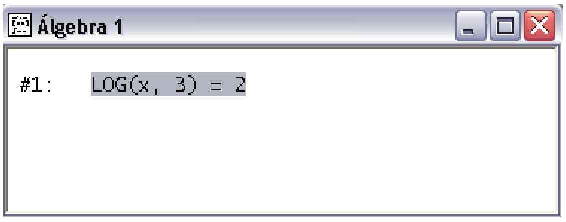


Figura: 3.1.1.3

- **Ejercicio 2.** Encuentre el valor de x. Ejemplo 29 de la pág. 201.

$$\log_3 x = 2$$

a) Procedemos a ingresar la ecuación en la barra de introducción de expresiones de la siguiente manera.

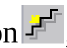


Log (x, 3) = 2

Figura: 3.1.1.4

b) Para hallar el valor de x, pulse  de la barra de botones y obtendrá la siguiente ventana:

Figura: 3.1.1.5

c) Pulse el botón SI y en esta ocasión no obtendrá el resultado de inmediato. Pulse varias veces este botón , hasta que la respuesta dada en cada paso no cambie.

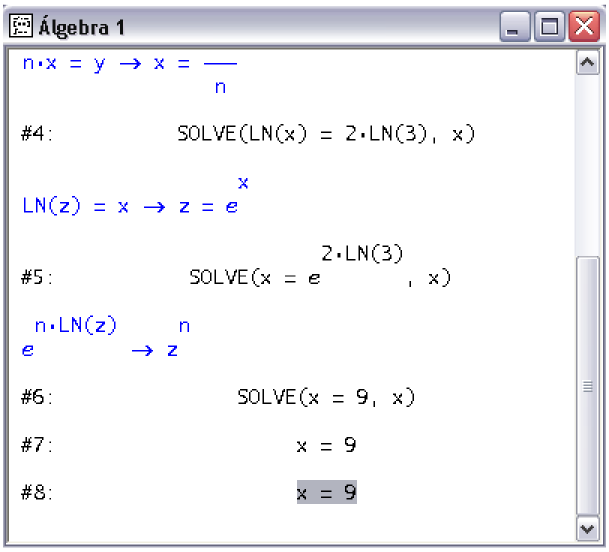


Figura: 3.1.1.6

3.1.2 ALGEBRA DE MATRICES:

CREACIÓN DE MATRICES.

Para la utilización de la siguiente guía explicamos a continuación cómo crear matrices.

1) En el siguiente ejemplo se explicará la manera de crear una matriz, cuando ingrese la expresión y pulse el botón , obtendrá la matriz como se demuestra en la siguiente figura. Los corchetes indican el inicio y el fin de la matriz, la "," hace referencia a la separación de columnas y el ";" se usa para indicar el inicio de la siguiente fila.

$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$	[5 , 9; 2 , 7]

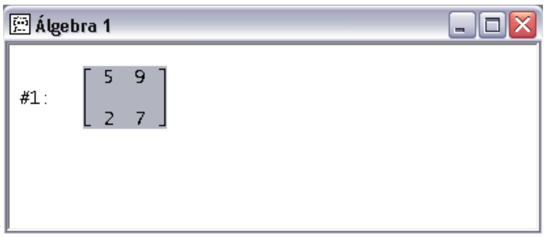


Figura: 3.1.2.1

2) Existe otra forma más sencilla de crear una matriz, se debe seguir los siguientes pasos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Pulse  que se encuentra en la barra de botones. Aparecerá una ventana llamada “Tamaño de la Matriz…”, donde debe introducir el tamaño, en éste ejemplo tanto para filas como columnas se le asignará un valor de 2 y para continuar pulse el botón SI.

Figura: 3.1.2.2

b) Una nueva ventana aparecerá, aquí debe ingresar los valores de la matriz a crear. Una vez ingresado todos los valores pulse el botón SI para continuar.

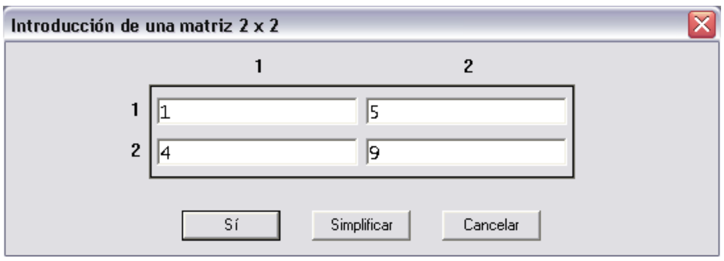


Figura: 3.1.2.3

c) Al término del paso anterior se obtiene la matriz como muestra la siguiente figura.

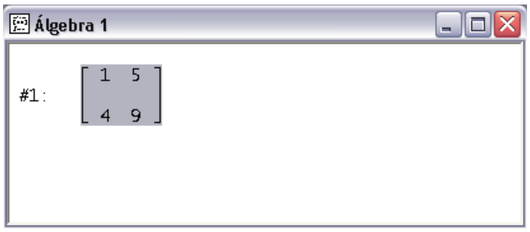


Figura: 3.1.2.4

Si por alguna razón se equivocara en el ingreso de los datos en la matriz, con el mouse seleccione la matriz y pulse ENTER, le pedirá si hay algún cambio en las dimensiones de la misma, cambie o no, no perderá los valores antes ingresados. Para mayor entendimiento, cambie el valor de 9 por 7.

- **Ejercicio 1.** Suma con otra matriz, multiplicación por un escalar y multiplicación por una matriz.

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Primero cree la matriz y gracias a DERIVE no hace falta asignar a una variable. Para hacer referencia a dicha matriz se utiliza el símbolo "#" seguido del número. Para realizar la suma duplicaremos la matriz del #1, para esto ingrese "#1" en la barra de introducción de expresiones.

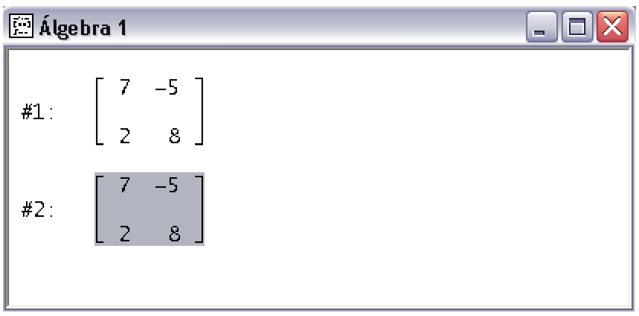


Figura: 3.1.2.5

b) Vamos a realizar la suma entre 2 matrices. Para cualquier tipo de operación con matrices nunca olvide de ubicar el signo "=" al final.

#1 + #2 =

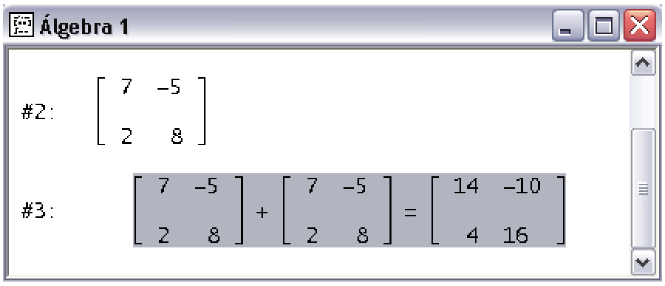


Figura: 3.1.2.6

c) Para multiplicar por un escalar, utilice el operador de la barra de símbolos matemáticos o el símbolo asterisco "*". Para este ejemplo cualquiera de las 2 formas es válida.

3 · #1 =
#1 · 3 =

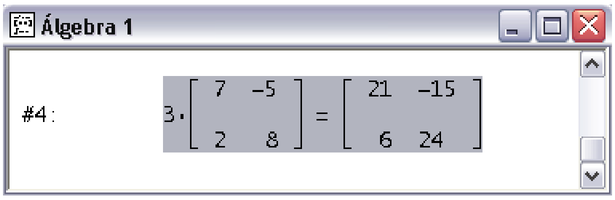


Figura: 3.1.2.7

d) Multiplicación entre 2 matrices.

#1 · #2 =
#2 · #1 =

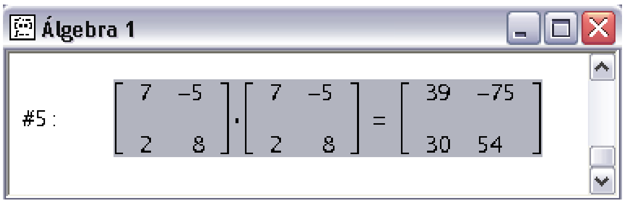
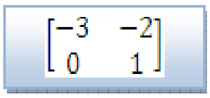


Figura: 3.1.2.8

- **Ejercicio 2.** Cálculo del determinante, de la matriz inversa y de la transpuesta.



a) Primero cree la matriz y para obtener el determinante de esta matriz, debemos utilizar la función DET() y no olvide finalizar con el símbolo =.

Det(#1) =

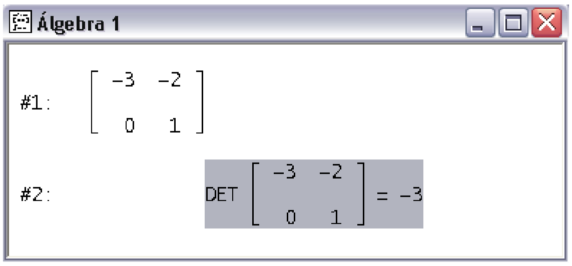


Figura: 3.1.2.9

b) Para obtener la inversa de la matriz, hay que elevar la matriz a la "-1".

#1 ^ -1 =

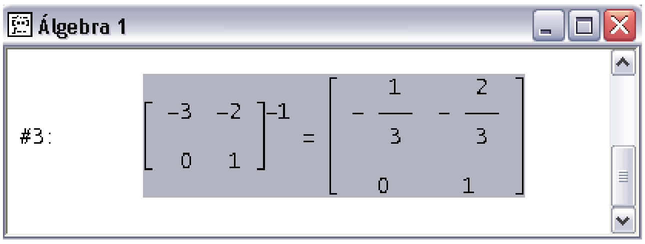


Figura: 3.1.2.10

c) Para conseguir la transpuesta de la matriz utilice el botón de la barra de los símbolos matemáticos.

#1 =

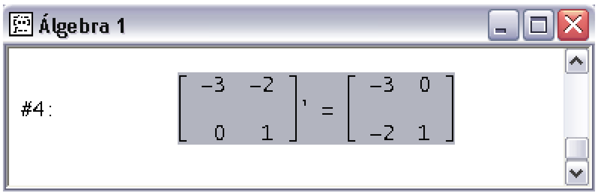


Figura: 3.1.2.11

Nota: Cuando realicen la inversa de una matriz y dicha matriz obtenida se encuentre con exponente "-1", indica que esa matriz no es invertible.

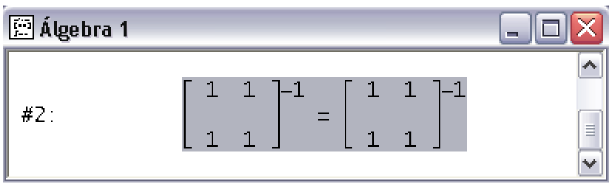
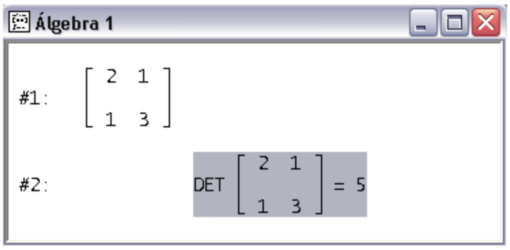


Figura: 3.1.2.12

- **Ejercicio 3 – Regla de Cramer.**

$$\begin{cases} 2x + y = -5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

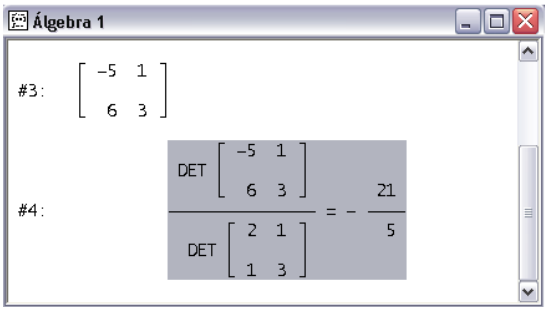
a) Primero cree la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y obtenga el determinante de coeficientes:



Det(#1) =

Figura: 3.1.2.13

b) Ya que el determinante es $\neq 0$, se debe resolver tanto para x como para y. Primero creamos la matriz $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ y procedemos a dividir para hallar el valor de x.



Det(#3) / Det(#1) =

Figura: 3.1.2.14

c) Para encontrar el valor de y, creamos la siguiente matriz $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ y dividimos los determinantes.

Det(#5) / Det(#1) =

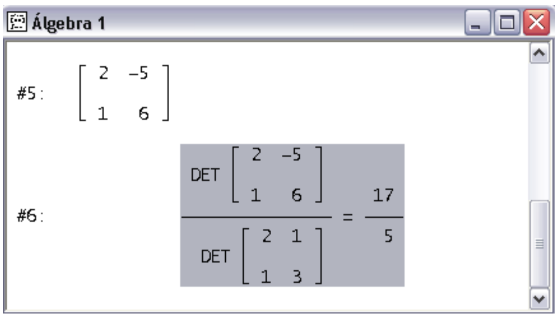


Figura: 3.1.2.15

Los resultados son $x = -{}^{21}/_{5}$ $y = {}^{17}/_{5}$.

- **Ejercicio 4.** Resolver el sistema por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1 \end{cases}$$

a) Debemos crear las siguientes matrices:

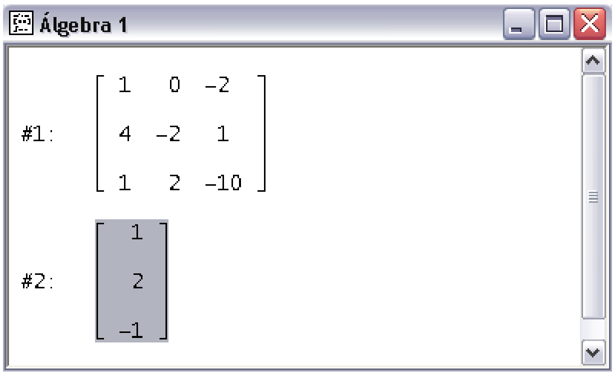


Figura: 3.1.2.16

b) La solución está dada por:

(#1^-1) #2 =

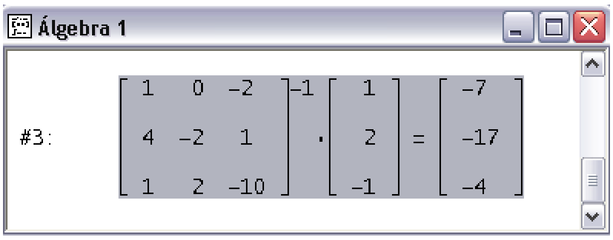


Figura: 3.1.2.17

La matriz de la derecha tiene las siguientes respuestas:

3.2 Ejercicios

Unidad 5.2 Encuentre el valor de x

36. $\log_x 100 = 2$

39. $\log_x \frac{1}{6} = -1$

45. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$

47. $\log_x(2x + 8) = 2$

48. $\log_x(30 - 4x - x^2) = 2$

Unidad 5.3 Encuentre el valor de x

45. $e^{\ln(2x)} = 5$

47. $10^{\log x^2} = 4$

48. $e^{3\ln(x)} = 8$

Unidad 5.4 Encuentre el valor de x

5. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 6)$

9. $16^{3x} = 2$

21. $5^{2x-5} = 9$

24. $5(3^x - 6) = 10$

Unidad 6.1 Encontrar la transpuesta de la matriz

18. $a = [2, 4, 6, 8]$

19. $b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Unidad 6.2 Realice las operaciones requeridas.

2. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calcule las matrices requeridas si

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $-(\mathbf{A} - \mathbf{B})$

15. $2\mathbf{O}$

17. $2(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$

19. $3(\mathbf{A} - \mathbf{C}) + 6$

20. $\mathbf{A} + (\mathbf{C} + \mathbf{B})$

22. $3\mathbf{C} - 2\mathbf{B}$

23. $\frac{1}{2}\mathbf{A} - 2(\mathbf{B} + 2\mathbf{C})$

Unidad 6.3 Realice las operaciones indicadas.

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolver el sistema por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes

Unidad 6.4

13. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x - 4y + 6z = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

Unidad 6.5

1. $\begin{cases} w - x - y + 4z = 5 \\ 2w - 3x - 4y + 9z = 13 \\ 2w + x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3w - x + 12y + 18z = -4 \\ w - 2x + 4y + 11z = -13 \\ w + x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$

Unidad 6.6

21. $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 4x + 3y = 37 \end{cases}$

Unidad 6.8 Resolver los siguientes sistemas por el método de Cramer

3. $\begin{cases} -2x = 4 - 3y \\ y = 6x - 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}z = 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0.6x - 0.7y = 0.33 \\ 2.1x - 0.9y = 0.69 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3r - t = 7 \\ 4r - s + 3t = 9 \\ 3s + 2t = 15 \end{cases}$

Resolver el sistema por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

Una compañía produce 3 tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones deben fabricar?

	Madera	**Plástico**	**Aluminio**
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

PRACTICA 4:

LÍMITES Y DERIVADAS POR FÓRMULA

4.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

Limites:

El signo indica lo siguiente:

- **Ejercicio 1.** Encontrar el límite. Ejemplo 43 de la pág. 417.

$$\lim_{x \to -7} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 49}}$$

a) Primero debemos ingresar la ecuación en la barra de introducción de expresiones de la siguiente forma:

(x^2 + 1) / (√ (x^2 - 49))

b) Ingresada la ecuación procedemos a calcular el límite, pulse el botón lim de la barra de botones y aparecerá la siguiente ventana.

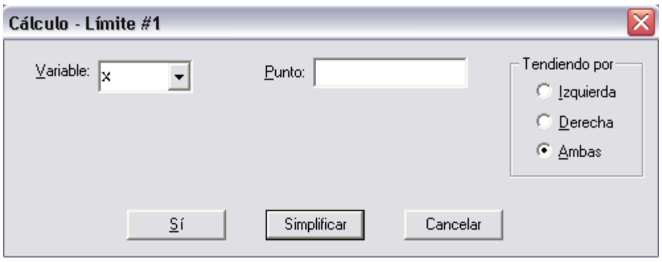


Figura: 4.1.1

c) Seleccione la variable e ingrese el valor de -7 en la casilla de PUNTO y para terminar pulse en SIMPLIFICAR.

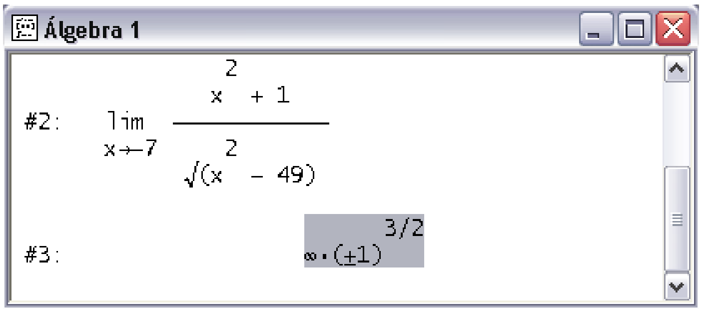


Figura: 4.1.2

Como observamos en la figura 4.1.2, indica que este ejemplo no tiene límite.

- **Ejercicio 2.** Costo Promedio. Ejemplo 59 de la pág. 418.
  Si c es el costo total en dólares para producir q unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dada por . Así si la ecuación de costo total es , entonces

$$c = \frac{5000}{q} + 6$$

e) Primero debe ingresar la ecuación en la ventana de álgebra, en ésta ocasión no importa los caracteres “c=”.

5000/q + 6

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de , demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

f) Para hallar el limite pulsamos el botón lim, se selecciona la variable q e ingresamos en la casilla de PUNTO la palabra inf o pulsando el botón ∞ (ambos representan ∞) y finalice pulsando SIMPLIFICAR.

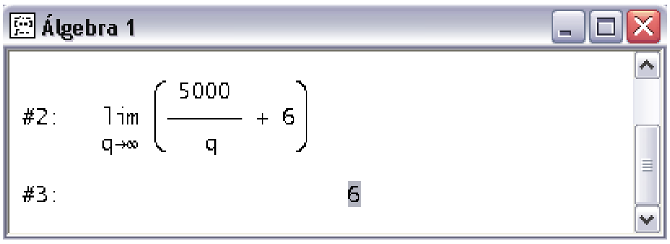


Figura: 4.1.3

De resultado tenemos un 6 como valor limite del costo promedio.

g) Para obtener cuadriculado en el bosquejo de una función, con el mouse seleccione la ecuación del #1 de la ventana de álgebra y pulse el botón  para que aparezca la ventana "GRAFICA 2D". De doble click en ésta pantalla y obtendrá lo siguiente:

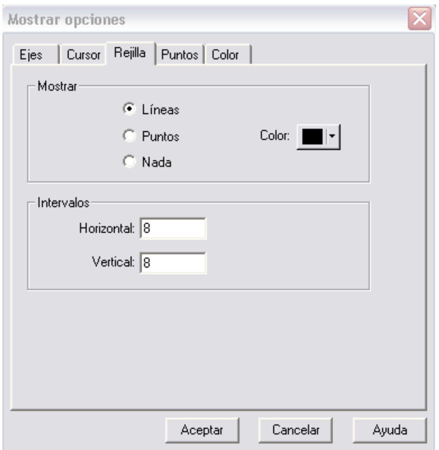


Figura: 4.1.4

Elija la viñeta REJILLA y en la opción MOSTRAR seleccione LINEAS. Pulse ACEPTAR para culminar.

h) Pulse  para realizar el bosquejo y conseguirá lo siguiente.

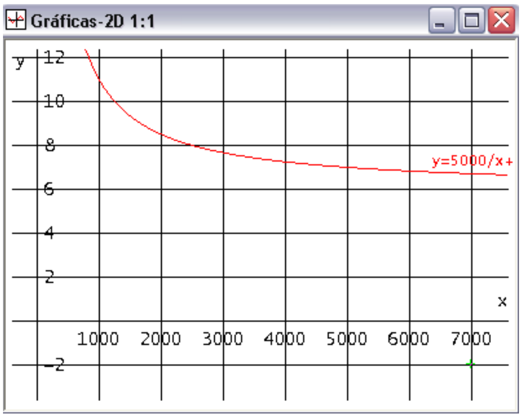


Figura: 4.1.5

i) Para copiar la imagen a la ventana de álgebra diríjase al menú ARCHIVO y seleccione INCRUSTAR, ahora pulse el botón .

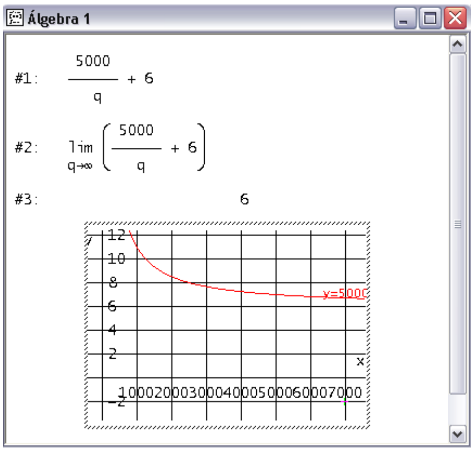


Figura: 4.1.6

Derivadas:

Para obtener la primera y la segunda derivada es necesario que el estudiante tenga conocimiento de cómo ingresar ecuaciones en la aplicación DERIVE.

En la siguiente figura, la casilla ORDEN se encuentra un valor de 1, eso indica que va obtener la primera derivada.

Figura: 4.1.7

- **Ejercicio 3.** Diferenciar la siguiente función.

$$y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$$

f) Primero ingresamos la ecuación en la ventana de álgebra, los caracteres “y=” no son necesarios ingresar. Para derivar la función presione el botón ∂ que se encuentra en la barra de botones y le aparecerá la siguiente ventana.

Figura: 4.1.8

g) En la figura 4.1.8 se define el orden y la variable, en este caso la variable es x y el orden es 1, para culminar pulse SIMPLIFICAR. La respuesta es

.

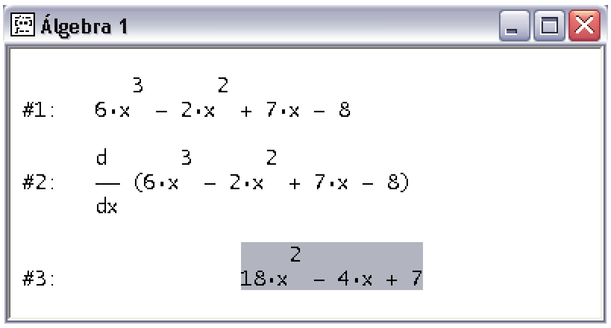


Figura: 4.1.9

- **Ejercicio 4.** En este ejemplo vamos a utilizar el siguiente botón, se utiliza tanto para las derivadas como para las integrales, la función de este botón es de indicar la regla que se utiliza en cada paso.

$$y = 2x^4 - 6$$

a) Primero se ingresa la ecuación sin los caracteres "y=", luego presionamos el botón ∂ para derivar y aparecerá la siguiente ventana, para finalizar pulsamos el botón SI.

Figura: 4.1.10

b) Ahora presionamos este botón de la barra de botones para resolver paso a paso e irá indicando la regla utilizada, se debe pulsar varias veces hasta que DERIVE ya no utilice ninguna regla más. El resultado de este ejemplo es .

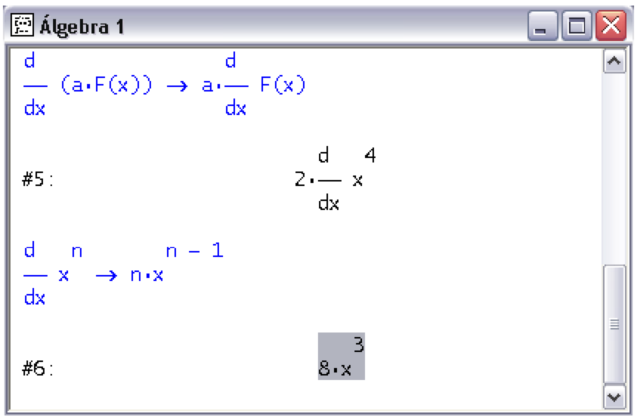


Figura: 4.1.11

- **Ejercicio 5.** Encontrar — por medio de la derivación implícita.

$$y + y^3 - x = 7$$

a) Para resolver este tipo de ejercicio, se debe igualar a cero e introducir el primer miembro de la ecuación de la siguiente forma:

y + y^3 - x -7

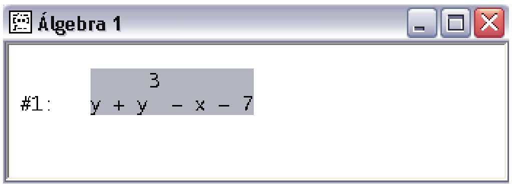


Figura: 4.1.12

b) La función a utilizar se llama **imp_dif(u,x,y,n)**, y sus parámetros son:

1. **u** - es la ecuación.
2. Si quiere obtener $\frac{dy}{dx}$ el orden es (x,y), si es lo contrario $\frac{dx}{dy}$ el orden es (y,x).
3. **n** - derivada implícita de grado n

Ingrese de la siguiente manera y para finalizar pulse :

imp_dif(#1, x, y, 1)

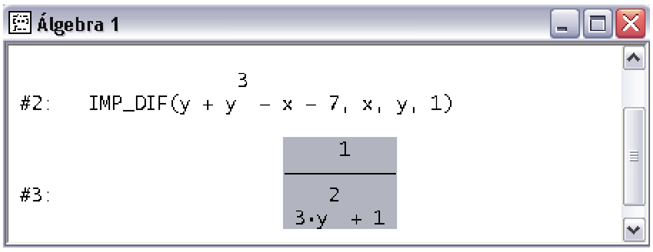


Figura: 4.1.13

4.2. Ejercicios

Unidad 9.1 Encuentre los limites

24. $\lim_{t\to 0} \frac{t^2+2t}{t^2-2t}$

29. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$

45. **Planta de Energía.** La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por $E = \frac{T_h - T_c}{T_h}$, donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a) $\lim_{T_c \to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c \to T_h} E$.

Unidad 9.2 Encuentre los limites. Si no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

20. $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{2x\sqrt{x}}$

41. $\lim_{x\to 1^+}\left[1+\frac{1}{x-1}\right]$

44. $\lim_{x\to -3^+}\ \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

48. $\lim_{x\to 1/2}\ \frac{1}{2x-1}$

49. $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{3}{x}\right)$

53. $\lim_{x\to -\infty}\ \frac{x+1}{x}$

54. $\lim_{x\to \infty}\left[\frac{2}{x}-\frac{x^2}{x^2-1}\right]$

57. $g(x) = \begin{cases} x, \text{si } x < 0 \\ -x, \text{si } x > 0 \end{cases}$

(a) $= \lim_{x\to 0^+}\ g(x)$ (b) $= \lim_{x\to 0^-}\ g(x)$ (c) $= \lim_{x\to 0} g(x)$

(d) $= \lim_{x\to \infty}\ g(x)$ (e) $= \lim_{x\to -\infty} g(x)$

61. **Población**. La población de cierta ciudad pequeña t años a partir de ahora se pronostica que será $N = 20000 + \frac{10000}{(t+2)^2}$. Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\lim_{x\to\infty} N$.

Unidad 10.2 Diferencie las funciones

64. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$

66. $f(x) = \sqrt{x}(5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$

67. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$

74. $f(x) = \frac{7x^3+x}{12\sqrt{x}}$

Unidad 10.5 Diferencie las funciones

44. $f(s) = \frac{17}{s(5s^2-10s+4)}$

45. $y = 3x - \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1}}{x-2}$

46. $y = 7 - 10x^2 + \frac{1 - \frac{7}{x^2+3}}{x+2}$

Unidad 10.6 Encuentre y’

44. $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2 - 3}{x^2+2}}$

51. $y = 8t + \frac{t-1}{t+4} - (\frac{8t-7}{4})^2$

53. $y = \frac{(2x+1)(3x-5)^2}{(x^2-7)^4}$

54. $y = \frac{\sqrt{x+2}(4x^2-1)^2}{9x-3}$

Unidad 11.1 Diferencie las funciones

29. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

33. $y = 5 \ln (x\sqrt{2x+1})$

34. $y = 6 \ln \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

44. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Unidad 11.2 Diferencie las funciones

7. $f(r) = e^{3r^2+4r+4}$

26. $y = e^{-x} \ln x$

27. $y = e^{x \ln x}$

Unidad 11.3 Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por medio de diferenciación implícita

7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5$

13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0$

15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$

16. $x^3y^3 + x = 9$

20. $\ln(xy) + x = 4$

24. $y^2 = \ln(x+y)$

PRACTICA 5:

APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

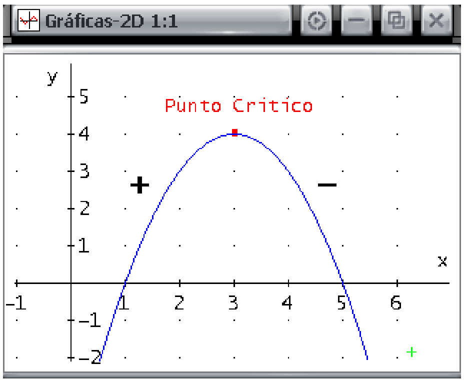
5.1 INTRODUCCION

En esta guía, se expondrá la forma de obtener en DERIVE los máximos y mínimos, puntos críticos, puntos de inflexión y su respectiva gráfica.

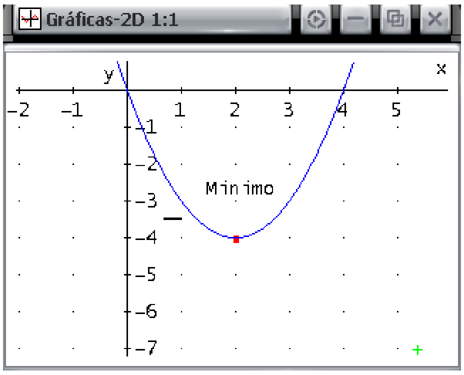
Para alcanzar los puntos críticos al practicante se le demostrará la forma más idónea para despejar una variable. Esto es necesario para la sustitución de valores con el fin de obtener el máximo, el mínimo y el punto de inflexión si lo hay.

El estudiante aprenderá como obtener la segunda derivada para la comprobación de los puntos críticos, en los ejemplos que resolveremos, se observará que la palabra ORDEN se relaciona con DERIVADA.

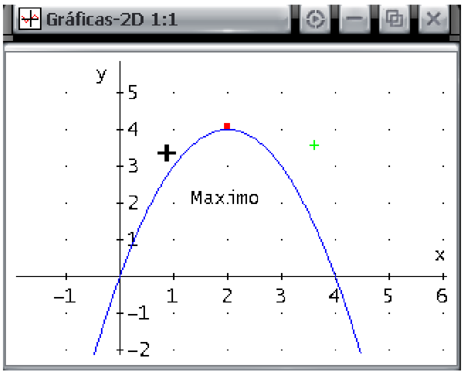
De forma grafica explicaremos lo que es punto crítico, punto de inflexión, máximo y mínimo:



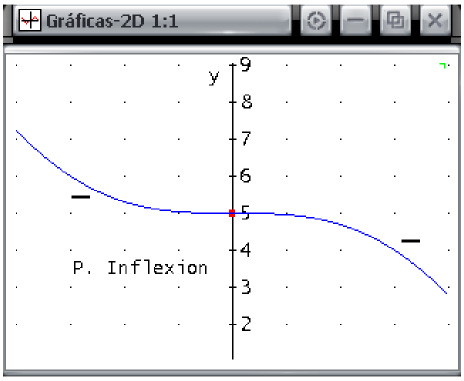
Punto Crítico



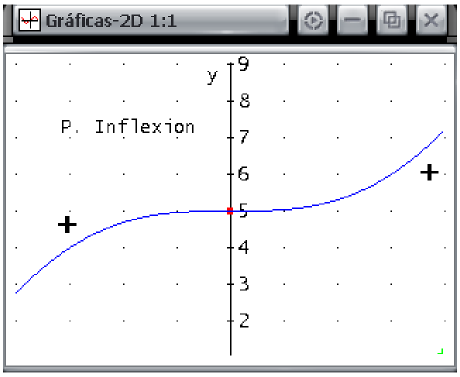
Mínimo



Máximo



Punto de inflexión



Punto de inflexión

5.2 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Ejercicio 1 – Máximos y Mínimos**. Encontrar máximos y mínimos de las siguientes desigualdades, y encontrar puntos de inflexión.

$$y = x^3 + x^2 - 5x - 5$$

a) Ingrese la ecuación sin los caracteres “y=”, para abrir la ventana “GRAFICA 2D” pulse y presione el mismo botón para que se dibuje la gráfica.

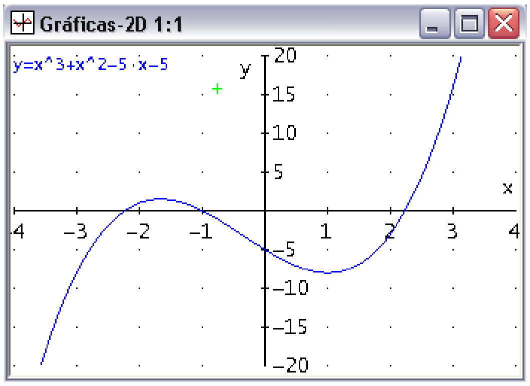


Figura: 5.2.1

b) En la figura anterior se observan los puntos críticos, para encontrar su ubicación pulse el botón . Una vez en la ventana de álgebra, procedemos a derivar pulsando y aparecerá la siguiente ventana.

Figura: 5.2.2

c) Seleccionado x como variable y 1 para obtener la primera derivada, presione SIMPLIFICAR para terminar.

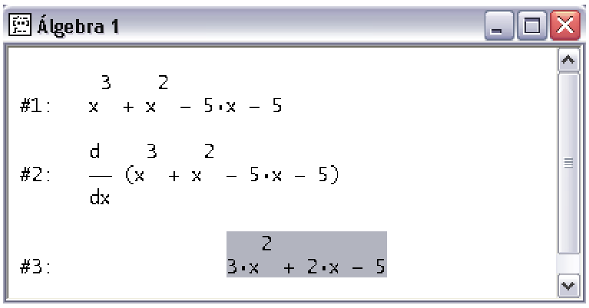


Figura: 5.2.3

d) Conseguida la primera derivada procedemos a despejar la variable x. Seleccionada la ecuación del #3, pulsamos el botón y obtendrán la siguiente ventana.

Figura: 5.2.4

e) Presionamos el botón RESOLVER para hallar los valores de x.

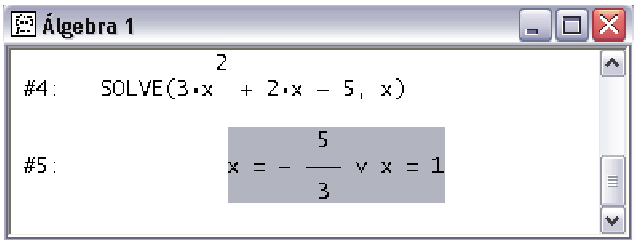


Figura: 5.2.5

Averiguamos en estos puntos críticos obtenidos si existe un máximo, un mínimo o ninguno, mediante la prueba de la segunda derivada.

f) Para obtener la segunda derivada con el mouse seleccione la expresión del #1 y pulse el botón y seleccione como variable x y en orden ingrese el valor de 2, para finalizar pulse el botón SIMPLIFICAR.

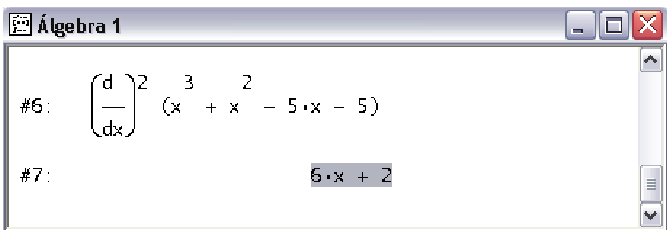


Figura: 5.2.6

g) Una vez finalizado procedemos a sustituir por los puntos críticos, pulse el botón SUB y sustituya el valor de x =1.

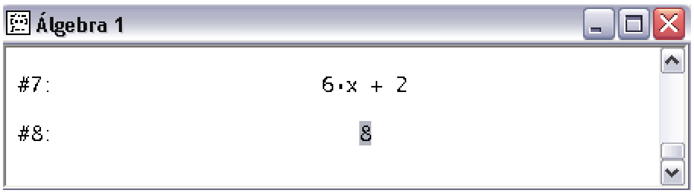


Figura: 5.2.7

h) En la figura anterior observamos que x=1 es un mínimo, ahora sustituya con el valor de $x = -{}^{5}/_{3}$.

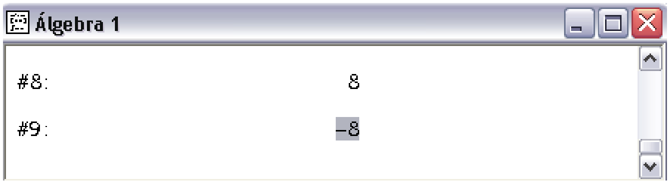


Figura: 5.2.8

Tenemos como resultado que $x = -{}^{5}/_{3}$ es un máximo.

i) Por último encontramos estos valores máximos y mínimos de la función original, sustituyendo en esta los valores de los puntos críticos de x=1 y $x = -{}^{5}/_{3}$.

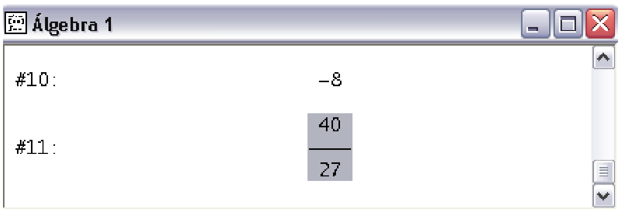


Figura: 5.2.9

j) Para encontrar los puntos de inflexión debemos hallar el valor de x de la segunda derivada, con el mouse seleccione la ecuación del #7 y pulse el botón y de la ventana obtenida presione en RESOLVER para finalizar.

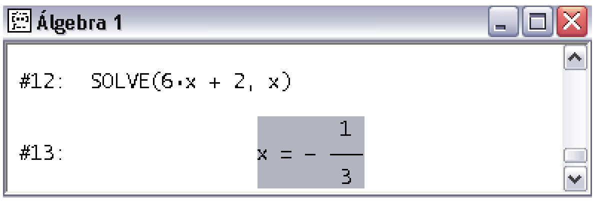


Figura: 5.2.10

k) Del resultado obtenido procedemos a sustituir en la ecuación original (#1) lográndolo con el botón .

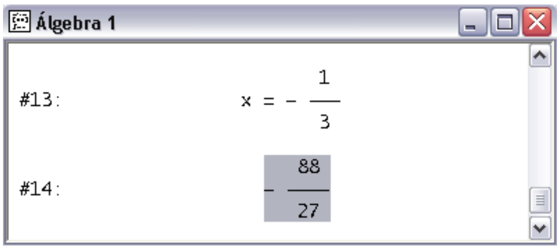


Figura: 5.2.11

El punto de inflexión tiene como coordenadas (-1/3, -88/27)

- **Ejercicio 2 - Máximos y Mínimos.** Resolver el siguiente ejemplo.

$$y = x^5 - 5x^3$$

a) Ingrese la ecuación sin los caracteres “y=” y obtenga el bosquejo de la gráfica pulsando .

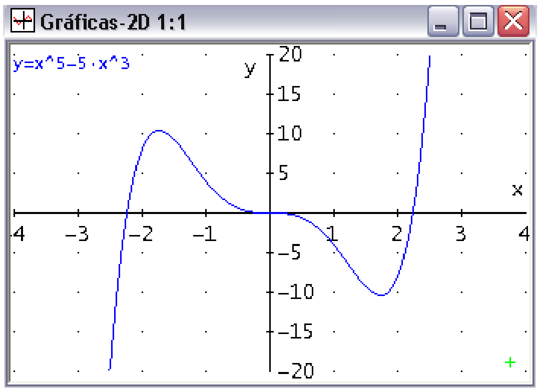


Figura: 5.2.12

b) Para encontrar los puntos críticos regresamos a la ventana de álgebra pulsando de la barra de botones, primero debemos derivar y para lograrlo pulse .

Figura: 5.2.13

c) Seleccione x como variable y 1 para obtener la primera derivada, presione SIMPLIFICAR para terminar.

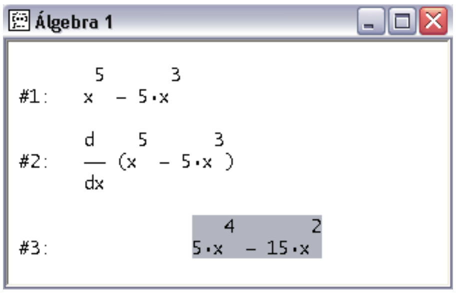


Figura 5.2.14

d) Para hallar el valor de x pulse  de la barra de botones y obtendrán la siguiente figura.

Figura 5.2.15

d) Presionamos el botón RESOLVER para despejar la expresión y hallar el o los puntos críticos.

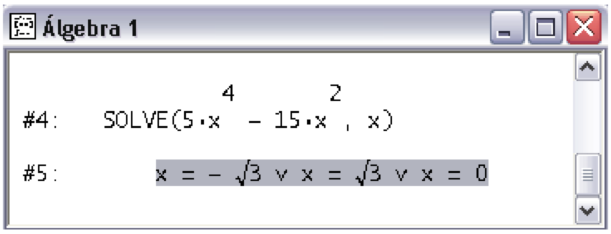


Figura: 5.2.16

Averiguamos en estos puntos críticos obtenidos si existe un máximo, un mínimo o ninguno, mediante la prueba de la segunda derivada.

l) Para obtener la segunda derivada con el mouse seleccione la expresión del #1 y pulse el botón  y seleccione como variable x y en orden ingrese el valor de 2, para finalizar pulse el botón SIMPLIFICAR.

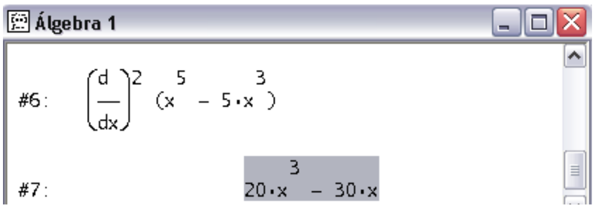


Figura: 5.2.17

m) Una vez finalizado procedemos a sustituir por los puntos críticos, pulse el botón  y sustituya el valor de $x = \sqrt{3}$.

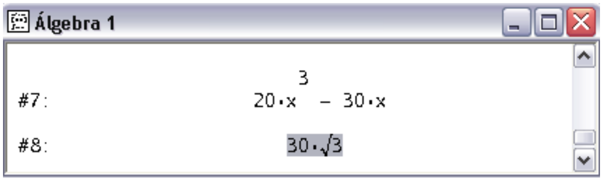


Figura: 5.2.18

n) En la figura anterior observamos que $x = \sqrt{3}$ es un mínimo, ahora sustituya con el valor de $x = -\sqrt{3}$ y $x = 0$.

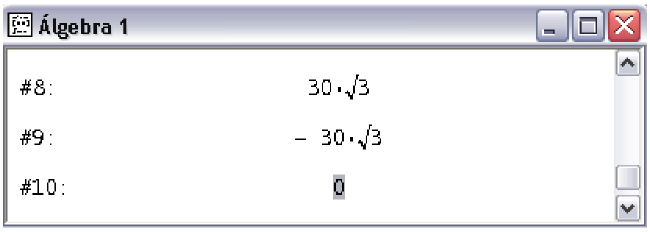


Figura: 5.2.19

Tenemos como resultado que $x = -\sqrt{3}$ es un máximo y con x=0 se obtiene un valor de 0.

o) Por último encontramos estos valores máximos y mínimos de la función original, sustituyendo en esta los valores de los puntos críticos de $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ y x=0.

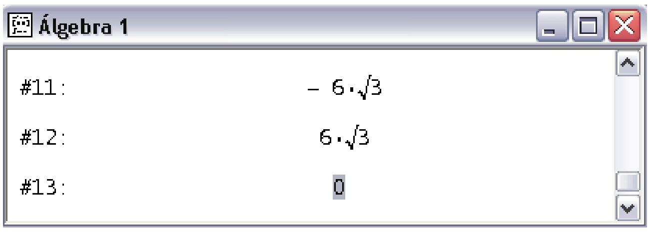


Figura: 5.2.20

p) Para encontrar los puntos de inflexión debemos hallar el valor de x de la segunda derivada, con el mouse seleccione la ecuación del #7 y pulse el botón y de la ventana obtenida presione en RESOLVER para finalizar.

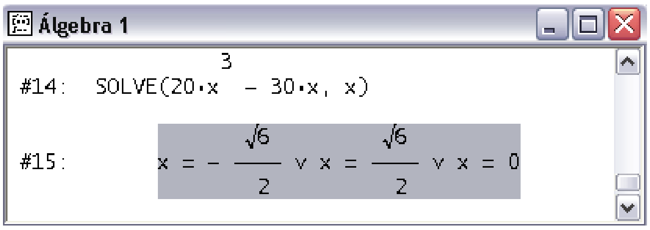


Figura: 5.2.21

q) De los resultados obtenidos procedemos a sustituir en la ecuación original (#1) pulsando el botón SUB.

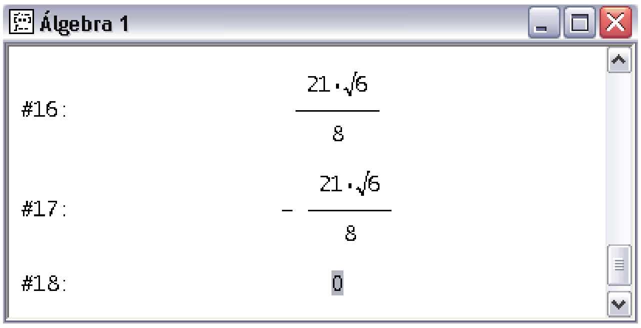


Figura: 5.2.22

El punto de inflexión tiene como coordenadas $\begin{cases} \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{21\sqrt{6}}{6}\right) \\ \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{21\sqrt{6}}{6}\right) \\ (0, 0) \end{cases}$

5.3 Ejercicios

Unidad 12.3 Para cada una de las siguientes funciones realizar el procedimiento completo, desarrollado en los ejemplos anteriores.

8. $y = 3x^2 - 6x + 5$

11. $y = 4x^3 - 21x^2 + 5x$

14. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x$

17. $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5$

20. $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 10x - 2$

Unidad 12.5 Para cada una de las siguientes funciones realizar el procedimiento completo, desarrollado en los ejemplos anteriores.

4. $y = \frac{2x+1}{2x+1}$

8. $y = \frac{x}{x^2-4}$

10. $y = \frac{x^3}{x^2-9}$

16. $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-9x+4}$

18. $y = \frac{x^2+x}{11x}$

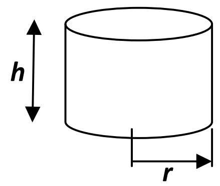
Unidad 13.1 Resolver los siguientes problemas.

19. **Ingreso.** Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno \$18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

25. **Diseño de recipiente.** Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen K. Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a $\sqrt[3]{K/\pi}$.

Volumen = $\pi r^2 h$

Área de la superficie = $2\pi rh + \pi r^2$



27. **Utilidad.** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$p = 600 - 2q$, y la función de costo total es $c = 0.2q^2 + 28q + 200$. Encuentre la producción y el precio que aumentarán al máximo la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿Cuáles serían entonces la producción y el precio que aumentarían al máximo la utilidad? Ahora, ¿Cuál es la utilidad?

33. **Costo de transporte**. El costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es $0.165 + {}^{s}/_{200}$ dólares por milla, donde s es la velocidad (uniforme) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de $18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?

38. **Tasa de rendimiento**. Para construir un edificio de oficinas, los costos son de $2.5 millones e incluyen el precio del terreno, los honorarios del arquitecto, la cimentación, la estructura, etc. Si se construyen x pisos, el costo (excluyendo los costos fijos) es $c = 5x[100000 + 5000(x - 1)]$. El ingreso por mes es de $50000 por piso. ¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión? (tasa de rendimiento = ingreso total/costo total.)

PRACTICA 6:

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Ejercicio 1.** Esbozo de una superficie. Ejemplo 5 de la pág. 743.

$$z = x^2$$

d) Ingrese la expresión en la ventana de álgebra, y realice el bosquejo en 3D utilizando el botón, y una vez en la ventana "Gráfica 3D" pulse el mismo botón de la nueva barra de botones:

z = x^2

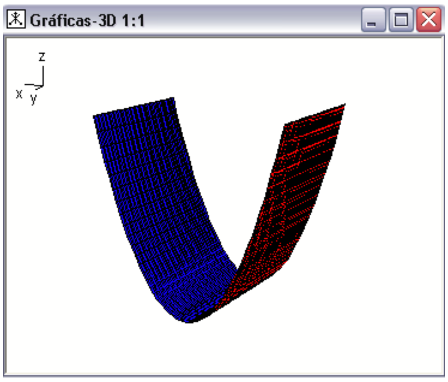


Figura: 6.1.1

e) Si desea visualizar los ejes y la gráfica en un cubo, pulsando la tecla F11 obtendrá las propiedades de la gráfica.

Figura: 6.1.2

En la viñeta EJES, seleccione SI en LINEAS, y de la misma forma en la viñeta CAJA para obtener el cubo.

- **Ejercicio 2**. Esbozo de una superficie. Ejemplo 6 de la pág. 743.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

a) Ingrese la expresión y realice el bosquejo de la gráfica, pulsando el botón .

x^2 + y^2 + z^2 = 25

Figura: 6.1.3

Le sale un mensaje indicando que no se puede representar gráficamente, la única forma es despejando y dejándola en función de z.

b) Para despejar pulse y obtendrá la siguiente figura.

Figura: 6.1.4

En la casilla de variables, para dejarlo en función de z debe elegir primero la variable x debido a que dicha variable aparece marcada, ahora elija la letra z y para finalizar pulse RESOLVER.

c) El resultado es el siguiente:

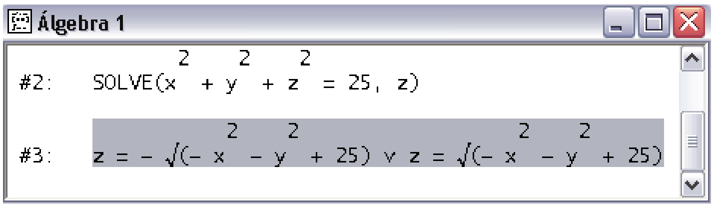


Figura: 6.1.5

d) Una vez despejada, proceda a graficar la expresión del #3 con el botón .

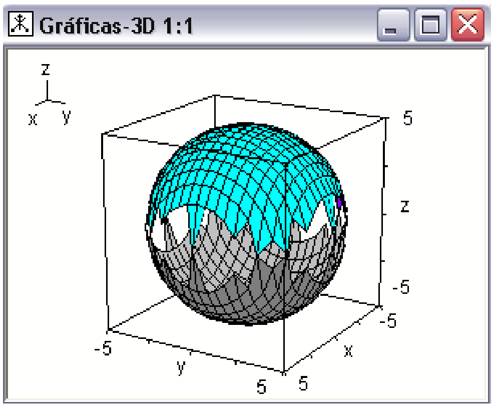


Figura: 6.1.6

- **Ejercicio 3.** Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables. Ejemplo 1 de la pág. 749.

$$f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 7$$

a) A continuación ingrese la ecuación sin los caracteres "f(x,y)=".

4x^2 + 3y^2 – 7

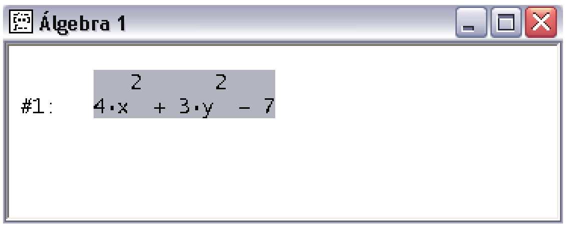


Figura: 6.1.7

b) Para realizar la derivada con respecto a "x" presione el botón ∂, defina "x" como la variable y 1 en orden. Pulse SIMPLIFICAR para culminar y obtendrá el siguiente resultado:

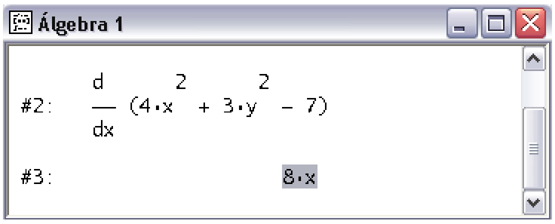


Figura: 6.1.8

c) Del mismo modo para realizar la derivada con respecto a "y" procedemos de la siguiente forma: con el mouse seleccione la ecuación del #1 y de la misma manera como se hizo en el paso anterior, derive y defina la variable "y".

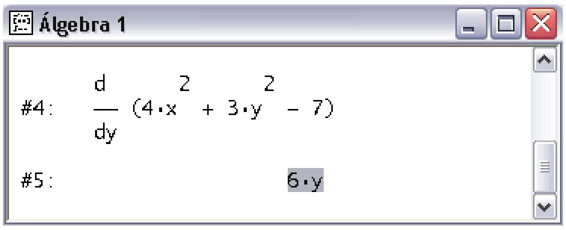


Figura: 6.1.9

- **Ejercicio 4.** Encontrar — por medio de la derivación implícita.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

c) Para resolver este tipo de ejercicio, se debe igualar a cero e introducir el primer miembro de la ecuación de la siguiente forma:

x^2 + y^2 + z^2 - 9

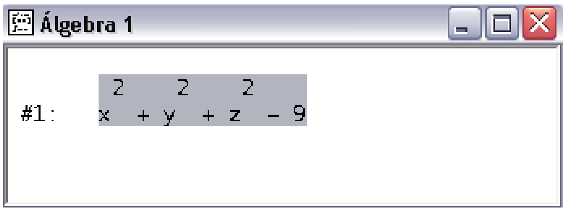


Figura: 6.1.10

d) La función a utilizar se llama **imp_dif(u,x,y,n)**, y sus parámetros son:

4. **u** - es la ecuación.
5. Si quiere obtener — el orden es (**x, y**), si es lo contrario — el orden es (**y, x**).
6. **n** - derivada implícita de grado n

Ingrese de la siguiente manera y para finalizar pulse :

imp_dif(#1, x, z, 1)

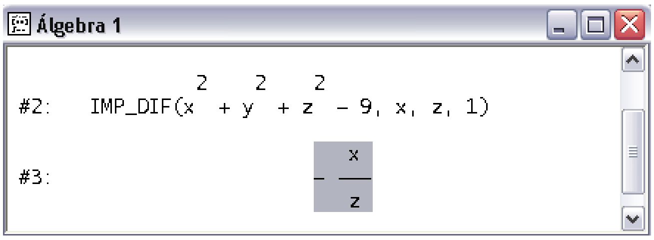


Figura: 6.1.11

- **Ejercicio 5**. Encuentre la derivada parcial mixta

$$f(x,y) = 4x^2y; \quad f_{xy}(x,y)$$

a) Para encontrar primero debemos ingresar la ecuación sin los caracteres "f(x,y)="la ventana de álgebra.

4(x^2)y

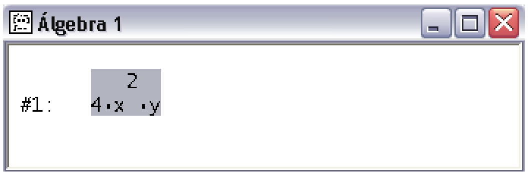


Figura: 6.1.12

b) Para realizar la derivada parcial mixta debemos proceder de la siguiente manera: primero derive con respecto a x eligiendo el orden 1 utilizando el botón ∂ de la barra de botones.

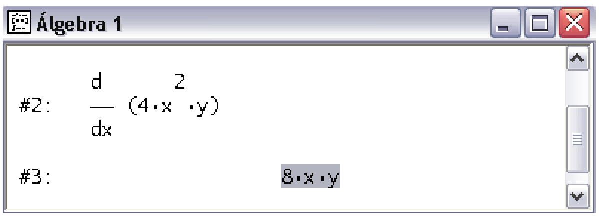


Figura: 6.1.13

c) Del resultado obtenido derive con respecto a y eligiendo el orden 1 utilizando el botón ∂, así obtendrá la derivada parcial mixta.

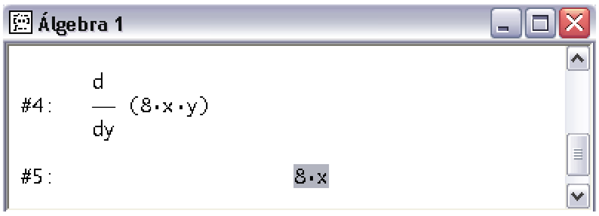


Figura: 6.1.14

6.2 Ejercicios

Unidad 16.1 Realizar el bosquejo de las graficas en 3D.

1. $4x - y^2 + 3$

2. $3x^2y - 4y$

3. $e^x(2y + 3z)$

4. $x^2y + xy^2 + yz^2$

6. $\ln(ru)$

Unidad 16.2 Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

5. $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y - 4xy + 3y$

9. $h(s, t) = \frac{s^2+4}{t-3}$

11. $u(q_1, q_2) = \frac{3}{4}\ln q_1 + \frac{1}{4}\ln q_2$

14. $h(x, y) = \frac{\sqrt{x+9}}{x^2y+y^2x}$

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}(r^3 - 2rs + s^2)$

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$

Unidad 16.4 Encuentre las derivadas implícitas utilizando la función **imp_dif().**

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9 \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20 \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

7. $e^x + e^y + e^z = 10 \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

Encuentre las derivadas parciales y evalúe para los valores dados de las variables utilizando el botón .

14. $xz + xyz - 5 = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x}, x = 1, y = 4, z = 1$

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}, x = 2, y = 2, z = 6$

18. $\frac{rs}{s^2+t^2} = t;\quad \frac{\partial r}{\partial t}, r = 0, s = 1, t = 0$

Unidad 16.5 Para todas las funciones siguientes encontrar $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial xy}$.

5. $f(x, y) = 9e^{2xy}$

9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

14. $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - x^2y^2$

23. $2z^2 = x^2 + 2xy + xz$

PRACTICA 7:

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

7.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Ejercicio 1 – APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA.** Encontrar los máximos y mínimos relativos de la siguiente función, usando la prueba de la segunda derivada. Ejemplo 3 de la pág. 771.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$$

a) Ingrese la ecuación sin los caracteres "f(x, y)=", y derivamos con el botón  tanto para "x" como para "y", y obtenemos las respuestas en el #3 y #5.

x^3 + y^3 - xy

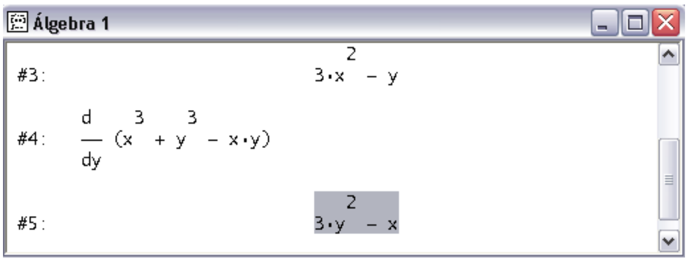


Figura: 7.1.1

b) Para obtener los puntos críticos procedemos así: nos dirigimos al menú RESOLVER y seleccionamos en SISTEMA. Después elegimos 2 en la casilla de ecuaciones y obtenemos esta ventana.

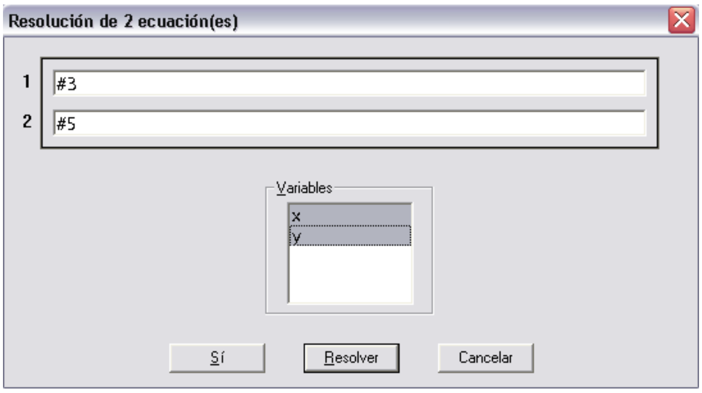


Figura: 7.1.2

Ingrese , después presiones el botón RESOLVER.

c) Obtenemos los siguientes resultados.

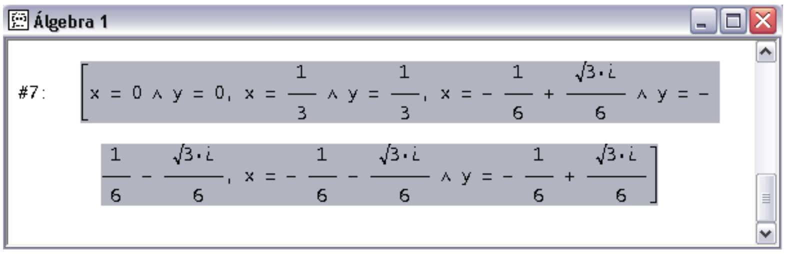


Figura: 7.1.3

No debe tener en cuenta las soluciones que tienen valores imaginarios. Para este ejemplo, el primer punto es (0,0) y el segundo es $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

d) Para cumplir $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$, debemos obtener la segunda deriva tanto para "x" como para "y". Para derivar seleccione la expresión del #1 pulse .

Figura: 7.1.4

Para la segunda derivada ingrese en la casilla ORDEN el valor de 2. Y para terminar presione SIMPLIFICAR.

e) Realizado la segunda derivada para "x" e "y", obtenemos los resultados en el #9 y #11 respectivamente.

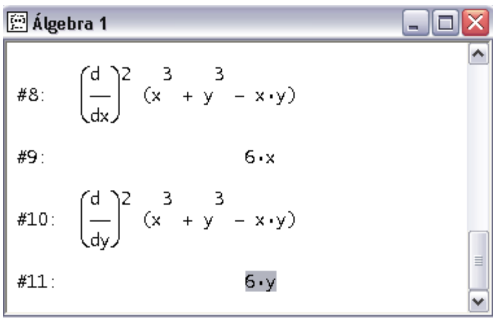


Figura: 7.1.5

f) Para cumplir con el tercer término, que es la derivada mixta, primero derive para "x" y del resultado obtenido derive para "y".

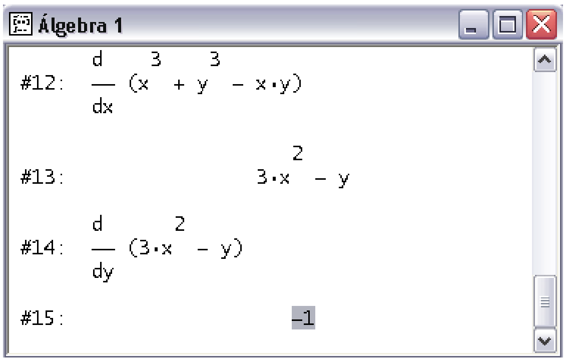


Figura: 7.1.6

En el #15 tenemos como resultado el valor de –1.

g) Reemplazamos la función por los valores obtenidos $D(x, y) = (6x)(6y) - (-1)^2$ e ingresamos en la ventana de álgebra sin los caracteres “D(x,y)”. Una vez ingresado la ecuación sustituimos las variables con los puntos críticos (0,0) obtenidos anteriormente, lo logrará pulsando SUB.

(6x)(6y)-(-1)^2

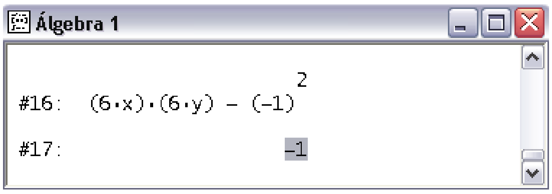


Figura: 7.1.7

Con los puntos (0,0) obtenemos un valor de -1 e indica que no existe extremo relativo.

h) Ahora sustituya utilizando los puntos$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pulsando SUB.

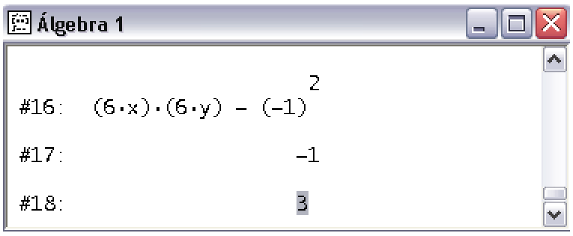


Figura: 7.1.8

i) Obtenemos 3 > 0 y para que sea un mínimo relativo debe ser mayor a 0 sustituyendo en la segunda derivada con respecto a x, seleccionamos la expresión del #9 y pulse SUB para sustituir por los puntos $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

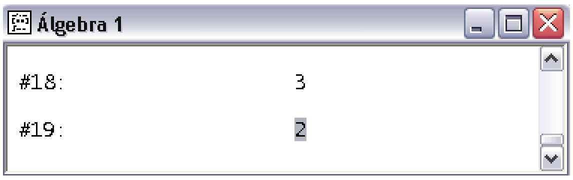


Figura: 7.1.9

Tenemos un mínimo relativo debido a que el resultado obtenido es mayor a 0.

j) Para hallar el valor de la función, sustituya en la expresión principal que se encuentra en el #1 por los puntos – – pulsando el botón .

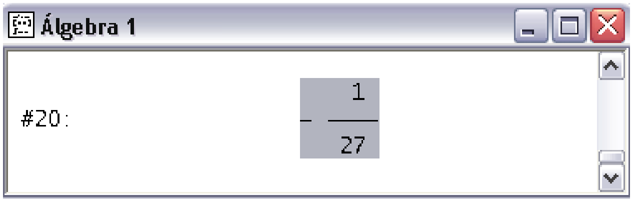


Figura: 7.1.10

- **Ejercicio 2 – Método de los multiplicadores de Lagrange.** Encontrar los puntos críticos sujeta a la siguiente restricción. Ejemplo 1 de la pág. 780.

$$z = f(x,y) = 3x - y + 6 \qquad restriccion \;\; x^2 + y^2 = 4$$

a) Escribimos la restricción como , y formamos la función . Obtenida la expresión, ingrésela en la ventana de álgebra y el símbolo λ lo podrá encontrar en la barra de letras griegas.

3x – y + 6 – λ(x^2 + y^2 - 4)

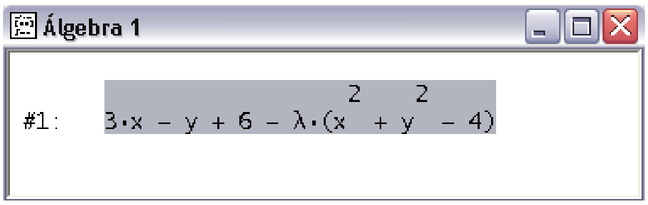


Figura: 7.1.11

b) Ahora procedemos a obtener la derivada parcial de cada una de las variables pulsando el botón .

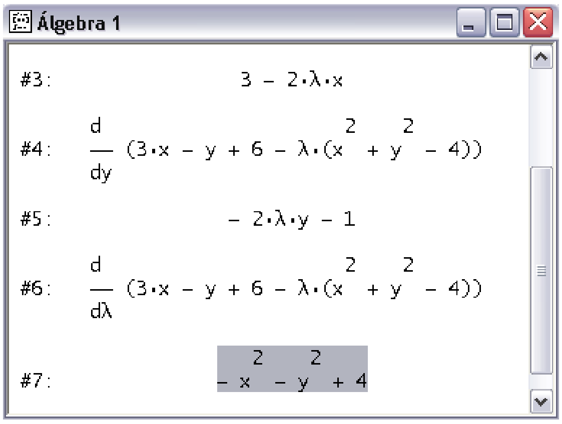


Figura: 7.1.12

c) Una vez obtenida las derivadas parciales, para encontrar los puntos críticos resolvemos el sistema dirigiéndonos al menú RESOLVER - SISTEMA. A continuación obtendrá una ventana donde ingresará el número de ecuaciones en este caso un valor de 3. Para finalizar pulse el botón SI y obtendrá la siguiente ventana.

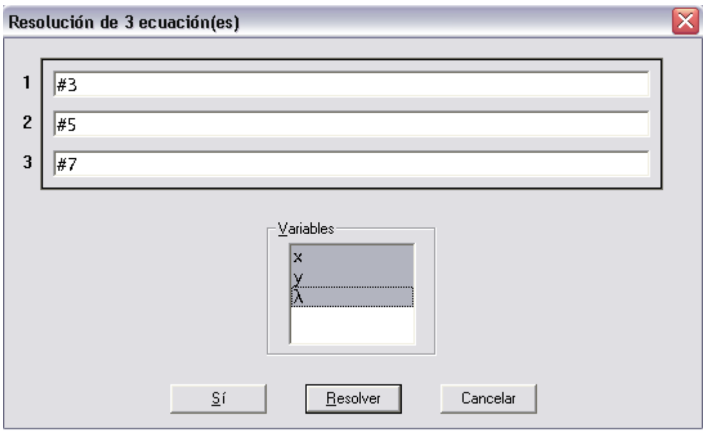


Figura: 7.1.13

Ingrese $\begin{cases} \text{casilla } 1 = \#3 \\ \text{casilla } 2 = \#5 \\ \text{casilla } 3 = \#7 \end{cases}$, después presiones el botón RESOLVER.

d) El resultado será el siguiente:

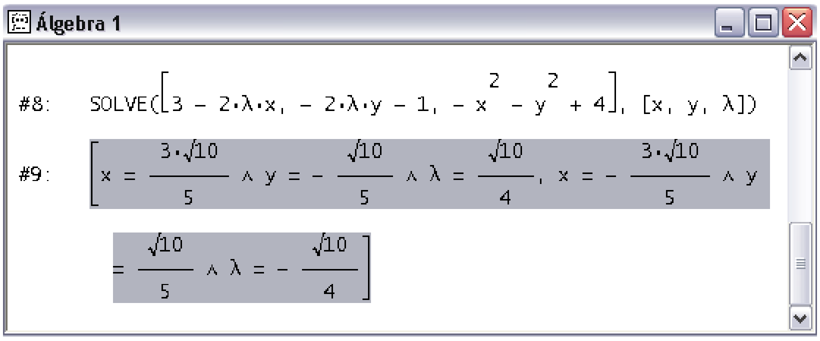


Figura: 7.1.14

7.2 Ejercicios

Unidad 16.7 Encuentre los puntos de las funciones. Para cada punto crítico, determine, por medio de la prueba de la segunda derivada, si corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo, a ninguno de los dos, o si la prueba no da información.

7. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3$

16. $f(l, k) = l^3 + k^3 - 3lk$

19. $f(x, y) = (y^2 - 4)(e^x - 1)$

21. **Maximización de la producción**. Suponga que

$$p = f(l, k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$$

Es una función de producción para una empresa. Encuentre las cantidades de entrada, l y k, que maximizan la producción P.

23. **Utilidad**. Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de 60 y 70 (centavos la libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por $q_A = 5(p_B - p_A)$ y $q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B)$. Encuentre los precios de venta p_A y p_B que maximicen la ganancia de la empresa.

28. **Utilidad**. Para los productos A y B de un monopolista, la función de costos conjuntos es $c = (q_A + q_B)^2$ y las funciones de demanda son $q_A = 26 - p_A$ y $q_B = 10 - 0.25p_B$. Encuentre los valores de p_A y p_B

que maximizan la utilidad. ¿Cuáles son las cantidades de A y B que corresponden a esos precios? ¿Cuál es la utilidad total?

Unidad 16.8 Encuentre por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujetas a las restricciones indicadas.

5. $f(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 + z^2;\ x - 3y - 4z = 16$

6. $f(x, y, z) = xyz^2; x - y + z = 20(xyz^2 \neq 0)$

10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ x + y + z = 4;\ \ x - y + z = 4$

11. $f(x, y, z) = xyz; x + y + z = 12, x + y - z = 0\ (xyz \neq 0)$

13. **Asignación de producción.** Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por $c = f(q_1, q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000$, donde q_1y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respetivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? (suponga que el punto crítico obtenido corresponde al costo.)

18. **Maximización de la producción.** Cuando se invierten l unidades de trabajo y k unidades de capital, la producción total, q, de un fabricante está dada por la función Cobb-Douglas de producción $q = 5l^{1/5}k^{4/5}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$22 y cada unidad de capital \$66. Si se van a gastar exactamente \$23760 en la producción, determine las unidades de trabajo y de capital que deben invertirse para maximizar la producción (suponga que el máximo se presenta en el punto crítico obtenido)

PRACTICA 8:

INTEGRALES Y CÁLCULO DE ÁREAS

8.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

8.1.1 INTEGRALES:

- **Ejercicio 1.** Integral indefinida. Ejemplo 8 de la pág. 615.

$$\int y^2 \left(y + \frac{2}{3} \right) dy$$

a) Primero ingresamos la ecuación en la ventana de álgebra de la siguiente manera:

y^2 (y + 2/3)

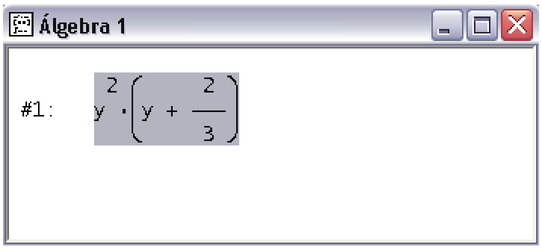


Figura: 8.1.1.1

b) Para resolver la integral, pulsamos $\int$ de la barra de botones y obtendrá la siguiente figura:

Figura: 8.1.1.2

En esta ventana hay que definir que la integral sea indefinida, seleccionar la variable y en la casilla de constante digite la letra C. Para finalizar pulse el botón SIMPLIFICAR.

c) En la siguiente figura se observa la respuesta.

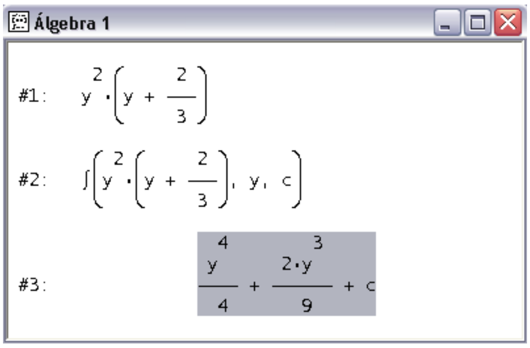


Figura: 8.1.1.3

- **Ejercicio 2.** Integral definida. Ejemplo 1 de la pág. 652.

$$\int_{-1}^{3}(3x^2 - x + 6)\,dx$$

a) Ingrese la ecuación de la siguiente manera:

3x^2 – x + 6

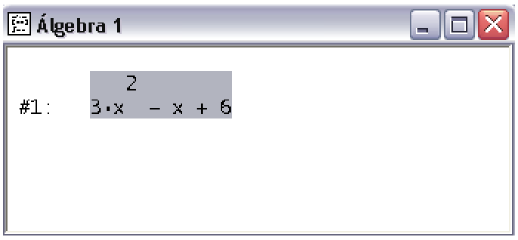


Figura: 8.1.1.4

b) Ahora pulse el botón .

Figura: 8.1.1.5

Elegimos la variable x, indicamos que es una integral definida y en la casilla de los límites ingresamos los valores de 3 y -1, para culminar pulse SIMPLIFICAR.

c) Una vez terminado, la respuesta será la siguiente:

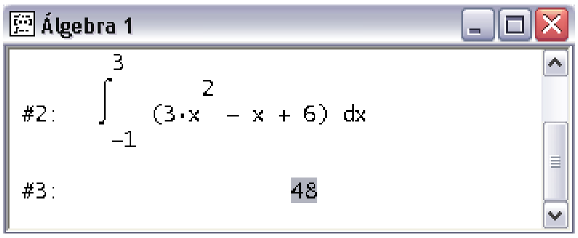


Figura: 8.1.1.6

Para visualizar las reglas utilizadas en el ejemplo, procedemos de la siguiente forma: primero de un click en la ecuación del #1 y repita el paso b con la diferencia que para culminar pulse el botón SI. Vamos a utilizar este botón , su función es resolver paso a paso visualizando la regla utilizada. Pulse varias veces hasta que el resultado no cambie.

8.1.2 CALCULO DE AREAS

- **Ejercicio 1.** Determinación de un área entre 2 curvas. Ejemplo 2 de la pág. 665.

$$y = 4x - x^2 + 8 \qquad y = x^2 - 2x$$

a) Ingresemos las 2 ecuaciones a la ventana de álgebra, y realice el bosquejo de las gráficas pulsando el botón .

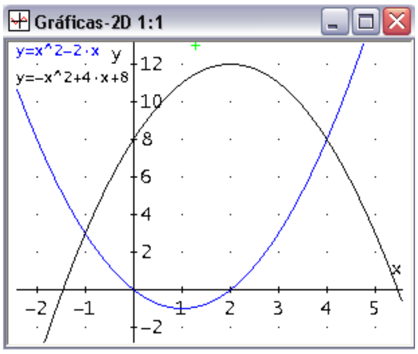


Figura: 8.1.2.1

b) Para encontrar las coordenadas de intersección, regrese a la ventana de álgebra pulsando , diríjase al menú RESOLVER y seleccione SISTEMA, obtendrá una ventana donde deberá ingresar el número de ecuaciones, digite 2. Para finalizar pulse SI y conseguirá la siguiente figura.

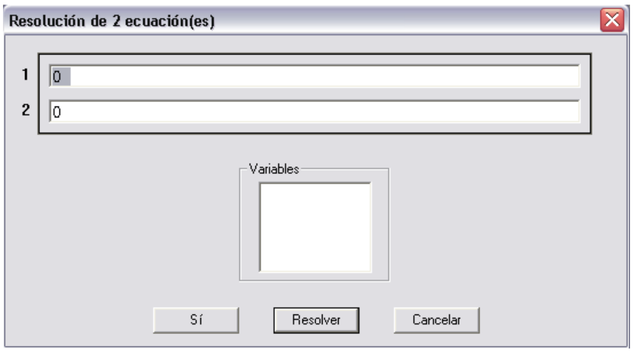


Figura: 8.1.2.2

Digite en $\begin{cases} recuadro\ 1 & = & \#1 \\ recuadro\ 2 & = & \#2 \end{cases}$ y para finalizar pulse RESOLVER.

c) A continuación, conseguirá las coordenadas donde se interceptan las gráficas, los valores de x son los límites inferiores como superiores de una integral.

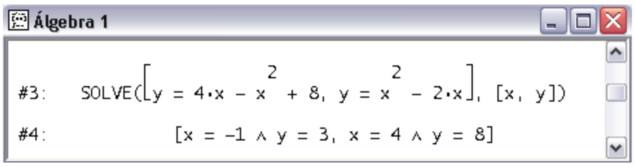


Figura: 8.1.2.3

Para este ejemplo x=-1 y x = 4.

d) Ahora ingresamos las 2 ecuaciones, cumpliendo $[y_{sup} - y_{inf}]\Delta x$.

4x – x^2 + 8 – x^2 + 2x

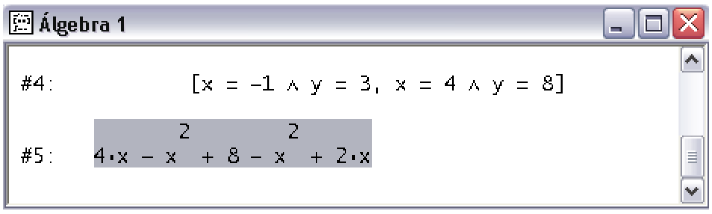


Figura: 8.1.2.4

e) Para obtener el área, procedemos a realizar la integral **definida** pulsando el botón ∫ de la barra de botones, utilizando los límites 4 y -1.

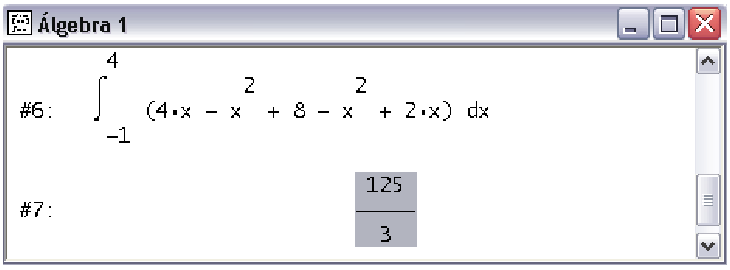


Figura: 8.1.2.5

- **Ejercicio 2.** Encontrar el área de la región limitada por la curva y las líneas siguientes. Ejemplo 4 de la pág. 667.

$$y^2 = 4x \qquad y = 3 \qquad x = 0$$

a) Ingrese las ecuaciones en la ventana de álgebra, y realice el bosquejo de las gráficas con el botón .

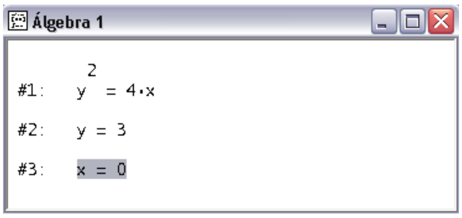


Figura: 8.1.2.6

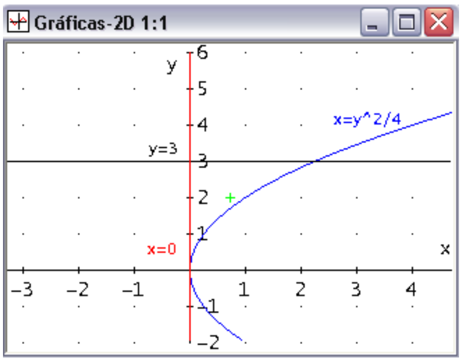


Figura: 8.1.2.7

b) Para encontrar el puntos de intersección regrese a la ventana de álgebra con el botón , diríjase al menú RESOLVER y seleccione SISTEMA, en esa ventana ingrese el número de ecuaciones, 2. Para finalizar pulse SI y conseguirá lo siguiente:

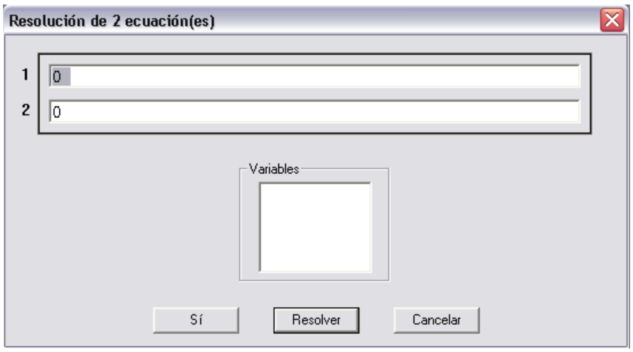


Figura: 8.1.2.8

En para encontrar la intersección entre la línea negra y azul como se demuestra en la figura 8.1.2.7, para finalizar pulse RESOLVER.

c) Para los limites tomamos el valor de − como se demuestra en la figura siguiente:

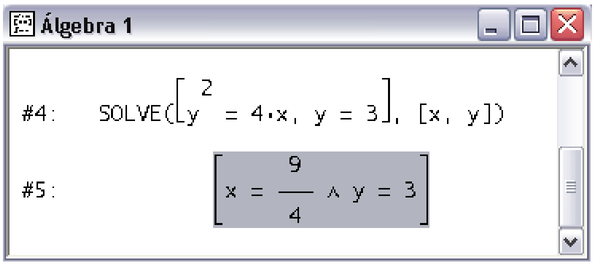


Figura: 8.1.2.9

d) Repetimos el paso b, ahora para la intersección entre la línea y la ecuación

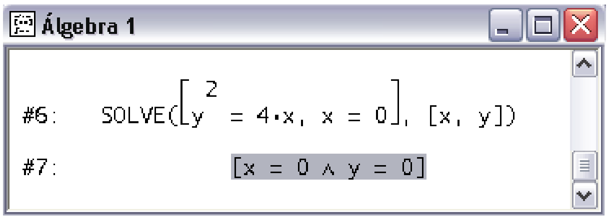


Figura: 8.1.2.10

e) Tenemos los limites tanto inferior como superior, y − , ahora realizamos la siguiente integral cumpliendo .

$$\int_0^{9/4} 3 - 2\sqrt{x}$$

f) En la barra de introducción de expresiones ingresamos la siguiente expresión:

3 - 2 √x

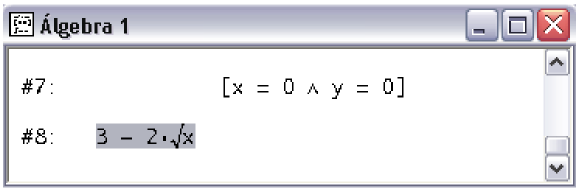


Figura: 8.1.2.11

g) Para integrar pulse ∫ y definir que es una integral definida con los limites $x = 0$ y $x = \frac{9}{4}$. Una vez simplificada el resultado será:

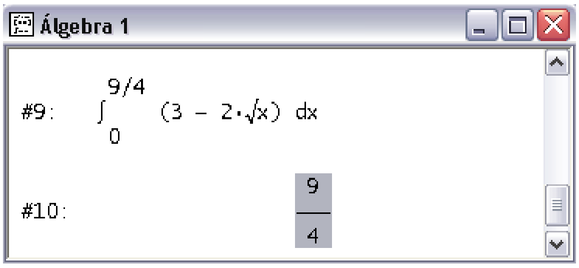


Figura: 8.1.2.12

8.2 Ejercicios

En los ejemplos de cálculo de áreas, no olvide de incrustar la imagen en la ventana de álgebra. En caso de no acordarse, diríjase al menú ARCHIVO y presione INCRUSTAR.

Unidad 14.1 Encuentre las integrales indefinidas

39. $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 6x \right) dx$

48. $\int [6e^u - u^3(\sqrt{u} + 1)] du$

51. $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx$

Unidad 14.3 Encuentre las integrales indefinidas

56. $\int \frac{3}{5}(v - 2)e^{2-4v+v^2} dv$

69. $\int \left[\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^5}{(x^6+1)^2} \right] dx$

71. $\int \left[\frac{1}{3x-5} - (x^2 - 2x^5)(x^3 - x^6)^{-10} \right] dx$

79. $\int \frac{x+1}{x^2+2x} ln(x^2 + 2x)\, dx$

Unidad 14.4 Determine las integrales indefinidas

40. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$

47. $\int (x^3 + ex)\sqrt{x^2 + e}\, dx$

51. $\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}} ds$

55. $\int \frac{ln(xe^x)}{x} dx$

Unidad 14.7 Evalué la integral definida

22. $\int_{-e^e}^{-1} \frac{6}{x}\, dx$

27. $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3}\, dx$

31. $\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{7x^3 + 1}\, dx$

38. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx$

53. **Distribución de ingresos**. El economista Pareto ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que da el número N de personas que reciben x o más dólares. Si $\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B}$, donde A y B son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre a y b, si a < b.

55. **Flujo continuo de ingreso**. El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de $2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por $\int_0^5 2000e^{-0.06t}\, dt$. Evalúe el valor actual, al dólar más cercano.

Unidad 14.9 Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos.

9. $y = x^2,\ y = 2x$

10. $y = x,\ y = -x + 3,\ y = 0$

16. $y = x - 4,\ y^2 = 2x$

21. $2y = 4x - x^2,\ 2y = x - 4$

26. $y^2 = 2 - x,\ y = x + 4$

31. $4x + 4y + 17 = 0,\ y = {}^1\!/_x$

32. $y^2 = -x,\ x - y = 4,\ y = -1,\ y = 2$

PRACTICA 9:

PROGRAMACIÓN LINEAL

9.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Ejercicio 1.** Realizar los bosquejos de las gráficas.

$$y \leq 7 \qquad 3x - y \leq 3 \qquad x + y \geq 5 \qquad x, y \geq 0$$

a) Ingrese las 5 desigualdades en la ventana de álgebra y realice el bosquejo pulsando el botón, para tener idea del resultado de cada una de ellas, se le pide al estudiante que las realice de una en una.

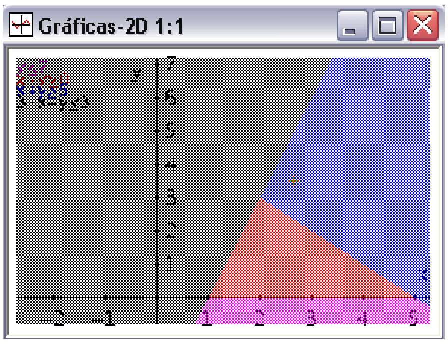


Figura: 9.1.1

b) Para encontrar la interacción entre las desigualdades regrese a la ventana de álgebra con el botón y proceda de esta forma: diríjase al menú RESOLVER y seleccione SISTEMA. En la nueva ventana, en la casilla de ecuaciones ingrese el valor de 5 y obtendrá la siguiente ventana.

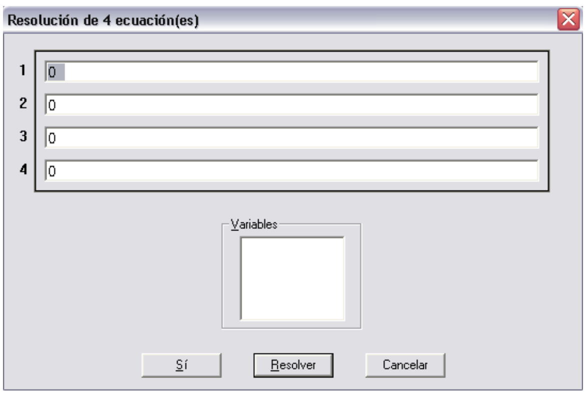


Figura: 9.1.2

Ingrese y para finalizar pulse RESOLVER.

c) El resultado será el siguiente:

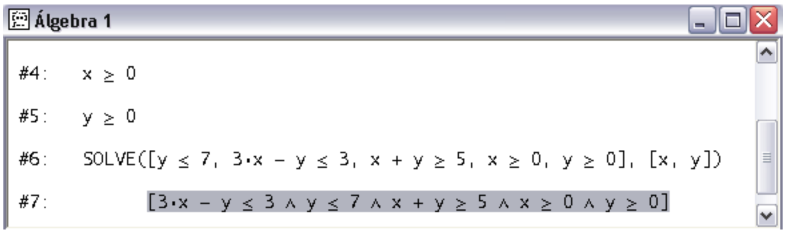


Figura: 9.1.3

En caso de no tener respuesta, indica que no hay intersección.

d) El resultado obtenido, represéntelo en la ventana "Gráfica 2D" con el botón .

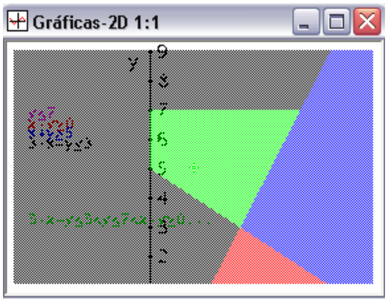


Figura: 9.1.4

Para la siguiente práctica usaremos este ejemplo, se recomienda no cerrarla y que se dirija al menú VENTANA y seleccione MOSAICO VERTICAL para tener una mayor visión.

- **Ejercicio 2.** Maximizar . Ejemplo 3 de la pág. 315.

$y \leq 7 \quad 3x - y \leq 3 \quad x + y \geq 5 \quad x, y \geq 0$

a) Para encontrar las coordenadas del área resultante, hay que reemplazar los operadores "≥, ≤" por "=". Seleccione la desigualdad del #1 y pulse la tecla ENTER, como observará en la barra de introducción de expresiones se encuentra la desigualdad, cambie el operador y pulse el botón . Ahora cambie las 4 desigualdades restantes.

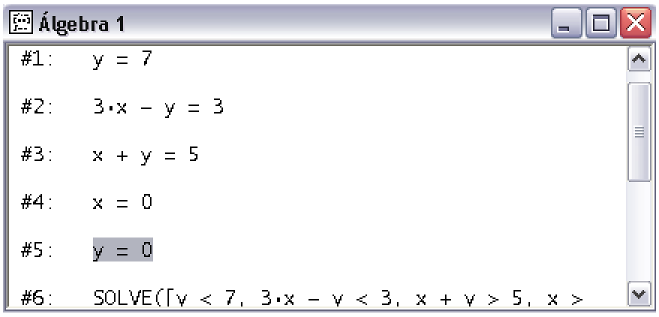


Figura: 9.1.5

b) Terminado el cambio de operadores, para encontrar los cortes repetimos el paso b del ejercicio anterior, con la diferencia de ingresar 2 en el numero de ecuaciones a resolver. Para el primer ejemplo utilizaremos las desigualdades del #1 y #2. Las coordenadas de corte son las siguientes:

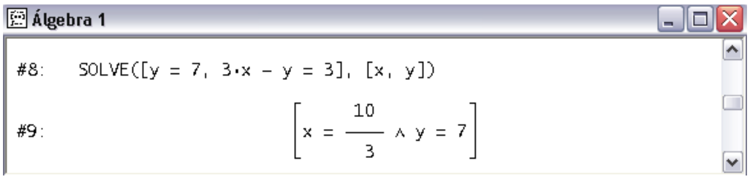


Figura: 9.1.6

Como observa en la grafica, las coordenadas $x = \frac{10}{3}$ $y = 7$ hacen referencia al punto superior-derecha del área resultante.

c) Repita el paso anterior y encuentre los 3 cortes restantes, realice utilizando las siguientes relaciones: #1 con #4, #2 con #3, #3 con #4.

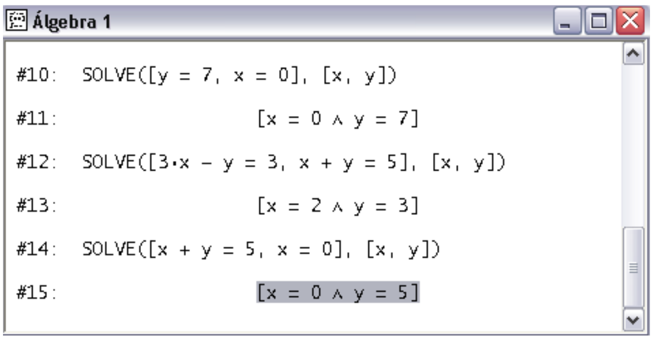


Figura: 9.1.7

d) Ingresamos la ecuación $z = 4x - 6y$, ahora sustituimos "x" e "y" por los valores de coordenadas de corte, para la sustitución utilizaremos el botón SUB para obtener la siguiente ventana:

Figura: 9.1.8

e) Reemplazamos las variables con los valores del #9, “x=10/3” e “y=7”. Para finalizar pulse el botón SIMPLIFICAR.

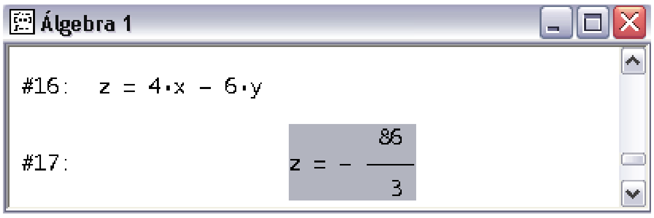


Figura: 9.1.9

f) Con el botón SUB reemplace y simplifique el resto de coordenadas.

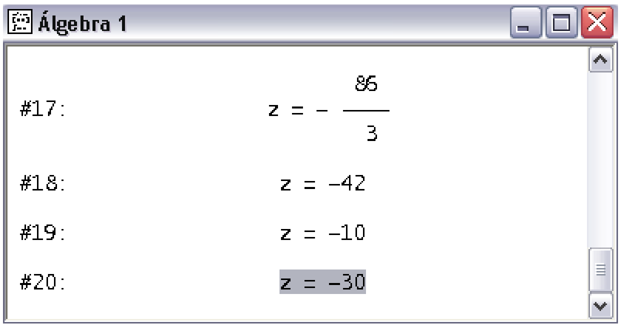


Figura: 9.1.10

Como se observa en la figura anterior, el resultado es z=-10 cuando es x=2, y=3.

- **Ejercicio 3 – Método simplex.** Maximizar. Ejemplo 1 de la pág. 330.

$$Z = x_1 + 2x_2$$

Sujeta a:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Debido a que el siguiente procedimiento no trabaja con variables y , se procedió a cambiar por e respectivamente.

$$\begin{cases} Z = x + 2y \\ 2x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Para poder realizar este tipo de ejercicios, se debe ejecutar un programa llamado "**SimplexMethod.dmo**" ubicado en "**C:\Archivos de programa\TI Education\Derive 6\Users\SimplexMethod\SimplexMethod.dmo**". Para ejecutarlo diríjase al menú ARCHIVO – LEER y seleccione en DEMOS. Busque y ejecute ese archivo, con lo cual se desplegará la siguiente ventana:

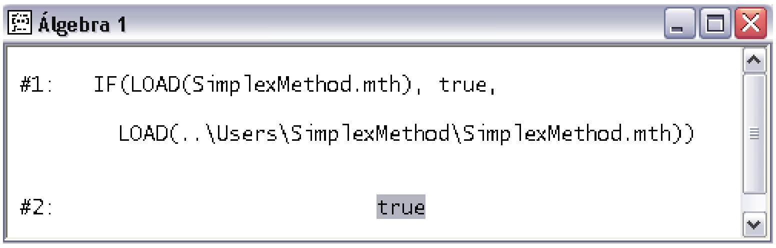


Figura: 9.1.11

b) Si el resultado sale **false,** deberá abrir el archivo **SimplexMethod.mth (ubicado en la misma dirección).** Para poder trabajar pulse la tecla ESC y se activara la barra de introducción de expresiones. Una vez activo ingrese las 5 expresiones pero la función a maximizar sin el carácter "z=".

$$\begin{array}{c} x + 2y \\ 2x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

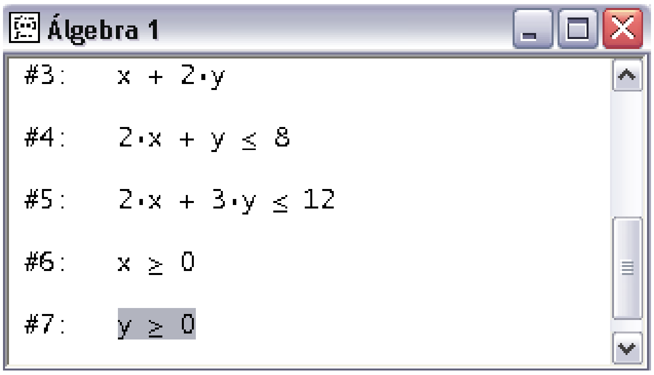


Figura: 9.1.12

c) Vamos a utilizar la función **MAXIMIZE(z, r),** contiene 2 parámetros que son:

1. **z** – es la ecuación, pero no ingrese los caracteres "z=" para su correcto funcionamiento.
2. **r** – son las restricciones pero estas son ingresadas en un vector.

maximize(#3, [#4, #5, #6, #7])

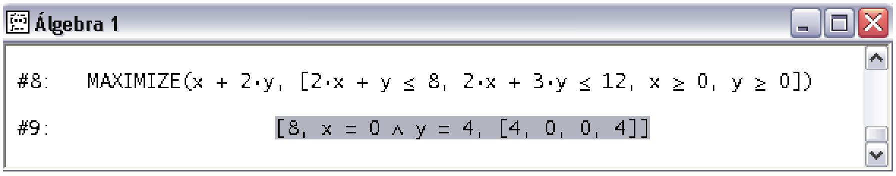


Figura: 9.1.13

Los resultados se interpretan de la siguiente manera: el primer valor indica z=8 obtenido con los valores de x=0 y=4. El resto de valores (4, 0, 0, 4) corresponden a las variables artificiales que son asociadas a cada restricción.

En caso de que el resultado sea INFINITO, indica que las restricciones no pueden ser satisfechas.

9.2 Ejercicios

Para minimizar existe la función **MINIMIZE (z, r),** los parámetros son los mismos expuestos anteriormente.

Unidad 7.1 Realice el bosquejo de las siguientes gráficas

10. $\begin{cases} 2x + 3y > -6 \\ 3x - y < 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 2 < 6 \\ x < 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} y < 2x + 4 \\ x \geq -2 \\ y < 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y > 1 \\ 3x - 5 \leq y \\ y < 2x \end{cases}$

Unidad 7.2 Maximizar

4. $Z = x + y \quad sujeta\ a \begin{cases} x - y \geq 0 \\ 4x + 3y \geq 12 \\ 9x + 11y \leq 99 \\ x \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

7. $Z = 7x + 3y \quad sujeta\ a \begin{cases} 3x - y \geq -2 \\ x + y \leq 9 \\ x - y = -1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

9. $C = 2x + y \quad sujeta\ a \begin{cases} 3x + y \geq 3 \\ 4x + 3y \geq 6 \\ x + 2y \geq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

10. $C = 2x + 2y \quad sujeta\ a \begin{cases} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

12. $Z = x - y \quad sujeta\ a \begin{cases} x \geq 3 \\ x + 3y \geq 6 \\ x - 3y \geq -6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

Unidad 7.4 Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

Maximizar

3. $Z = -x_1 + 3x_2 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

5. $Z = 8x_1 + 2x_2 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

10. $Z = -x_1 + 2x_2 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

12. $W = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \quad sujeta\ a \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

13. $W = x_1 - 12x_2 + 4x_3 \quad sujeta\ a \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

15. $Z = 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_1,\ x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

Unidad 7.7 Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

Minimizar

5. $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_3 \leq -4 \\ x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

7. $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

10. $Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \quad sujeta\ a \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

PRACTICA 10 (MATEMÁTICAS FINANCIERAS):

PROGRESIONES, INTERÉS SIMPLE, INTERÉS COMPUESTO, PAGOS PARCIALES Y ANUALIDADES CIERTAS ORDINARIAS.

10.1 INTRODUCCION

A continuación, mostraremos las formulas para los ejemplos expuestos en esta guía, los mismos que han sido tomados del libro “Matemáticas Financieras de Frank Ayres, Jr”.

Formulas:

- **Progresiones**
  - **Progresión Aritmética**
    - $l = a + (n-1)d$
    - $s = \frac{n}{2}(a+1)$
  - **Progresión Geométrica**
    - $l = ar^{n-1}$
    - $s = \frac{a-ar^n}{1-r}$ cuando r < 1
    - $s = \frac{ar^n-a}{r-1}$ cuando r > 1
- **Interés Simple**
  - $I = Cit$
  - $S = C(1+it)$
- **Pagos Parciales**
  - $i = \frac{2mI}{B(n+1)-I(n-1)}$
  - $i = \frac{2mI}{B(n+1)}$
- **Interés Compuesto**
  - $S = C(1+i)^n$
- **Anualidades Ciertas Ordinarias**
  - $S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$
  - $A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

10.2 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Ejercicio 1 – Interés Simple**. Encontrar el valor presente, al 6% de interés simple, de $1500 con vencimiento en 9 meses. Ejemplo 8 de la pág. 43.

$$S = C(1 + it)$$

a) Para este caso . Reemplazamos los valores en la formula y obtenemos lo siguiente:

b) Para despejar la variable, procedemos a ingresar en la barra de introducción de expresiones lo siguiente y para finalizar pulse el botón :

1500 = C(1 + (0.06)(3/4))

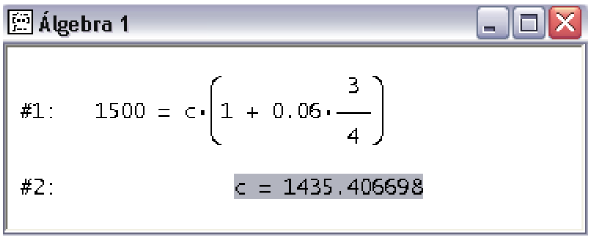


Figura: 10.2.1

- **Ejercicio 2 – Anualidades Ciertas Ordinarias.** En los ultimos 10 años, X ha depositado $500 al final de cada año en una cuenta de ahorro, la cual paga el – efectivo. ¿Cuánto había en la cuenta inmediatamente después de haber hecho el décimo depósito? Ejemplo 2 de la pág. 83.

$$S = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

a) Los valores que tenemos son . Reemplazando los valores tenemos lo siguiente.

b) Para obtener el valor, ingrese la siguiente expresión y para culminar pulse el botón :

S = 500(((1 + 0.035)^10 - 1)/0.035)

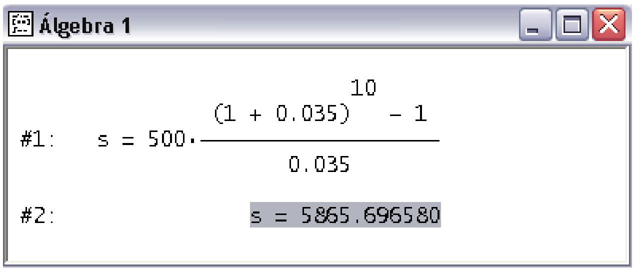


Figura: 10.2.2

- **Ejercicio 3.** Obtener el interés simple y compuesto, donde el monto es $1 al 6% en un tiempo de 10 años, y obtenga la diferencia entre ellos de cada año.

$$S = C(1 + it) \qquad S = C(1 + i)^n$$

a) Tenemos los siguientes valores . Sustituya los valores a excepción de C e i:

b) Presentaremos los valores en una tabla, por esta ocasión vamos a cambiar la variable t por n. Ahora ingrese las expresiones sin los caracteres "S=" y para culminar el pulse el botón ✓.

1(1+0.06n)
1(1+0.06)^n

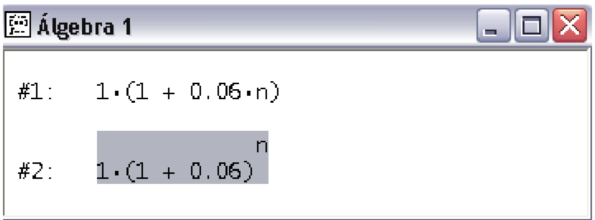


Figura: 10.2.3

c) Para dar la impresión de 2 columnas, debemos ingresar las formulas en un vector de la siguiente manera:

[#1, #2]

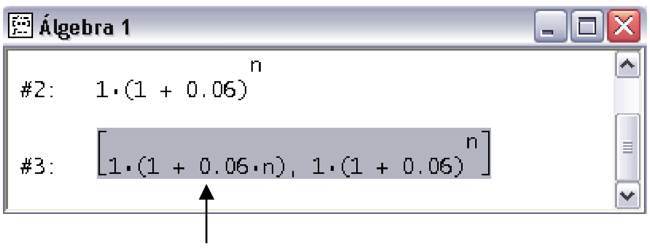


Figura: 10.2.4

Para hacer referencia a esta posición, escribimos #3 (nombre del vector) seguido por la palabra sub juntamente con la posición. Para este ejemplo se escribe "#3 sub 1".

d) Ahora necesitamos una columna extra para realizar la resta y para esto procedemos de la siguiente manera, con el mouse de un click en la expresión del #3 y presione la tecla ENTER, a continuación obtendrá una ventana donde deberá ingresar la dimensión del vector, para este caso digite 3 y finalice pulsando el botón SI. Y conseguirá la siguiente ventana:

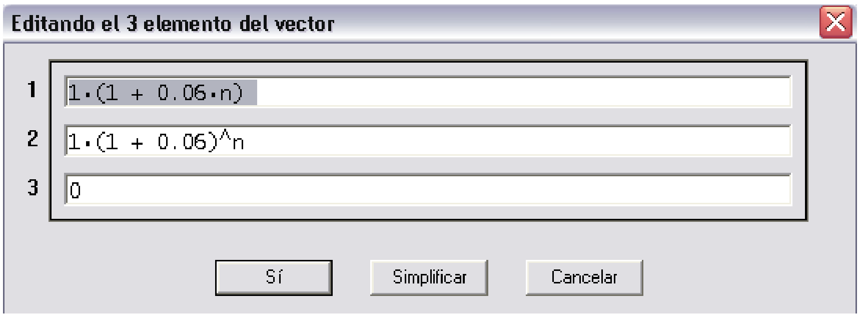


Figura: 10.2.5

En la casilla 3 ingrese "#3 sub 2 - #3 sub 1"y para finalizar pulse el botón SI.

e) En la siguiente figura se visualiza el cambio.

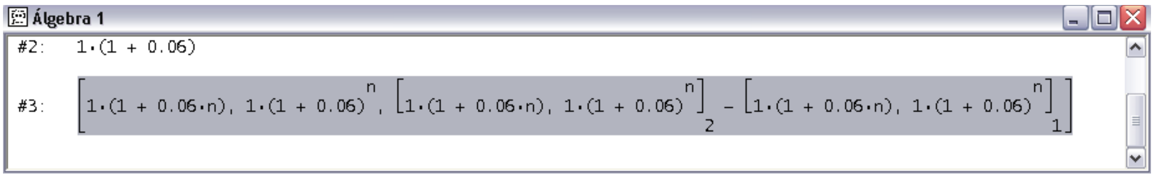


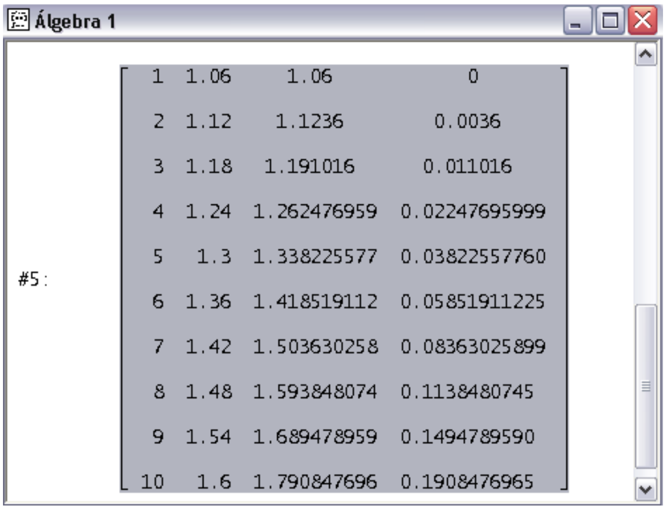
Figura: 10.2.6

f) Agregada la tercera columna, procedemos a desarrollar la tabla siguiendo estas indicaciones, diríjase al menú CALCULO y seleccione TABLA y conseguirá la siguiente ventana:

Figura: 10.2.7

Seleccionada la variable n ingrese $\begin{cases} \text{valor inicial} = 0 \\ \text{valor final} = 10 \\ \text{salto} = 1 \end{cases}$. Como se puede observar solo hay como elegir una variable y es la razón por la cual cambiamos al comienzo la letra t por la n. Para finalizar pulse el botón APROXIMAR.

g) El resultado es el siguiente:



Álgebra 1

#5 :

1	1.06	1.06	0
2	1.12	1.1236	0.0036
3	1.18	1.191016	0.011016
4	1.24	1.262476959	0.02247695999
5	1.3	1.338225577	0.03822557760
6	1.36	1.418519112	0.05851911225
7	1.42	1.503630258	0.08363025899
8	1.48	1.593848074	0.1138480745
9	1.54	1.689478959	0.1494789590
10	1.6	1.790847696	0.1908476965

Figura: 10.2.8

La columnas corresponden a $\begin{cases} \text{primera} = \text{n años} \\ \text{segunda} = \text{interés simple} \\ \text{tercera} = \text{interés compuesto} \\ \text{cuarta} = \text{I. compuesto} - \text{I. simple} \end{cases}$

CAPÍTULO A

A.1 LA APLICACIÓN MATLAB

El nombre MATLAB proviene de la abreviatura “MATrix LABoratory”. Es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices, también puede trabajar con números escalares tanto reales como complejos.

Una de las capacidades de esta aplicación es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. MATLAB también tiene un lenguaje de programación propio y es una magnifica herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas por su fácil manejo.

MATLAB inicia como cualquier otra aplicación de Windows, haciendo doble click en el icono de la aplicación creado en el escritorio o en el menú *INICIO*. Tras la ejecución de la aplicación se visualizará una ventana similar a la figura 1 que cuenta con 3 ventanas principales que son:

- *CURRENT DIRECTORY*
- *WORKSPACE*
- *COMMAND HISTORY*
- *COMMAND WINDOW*

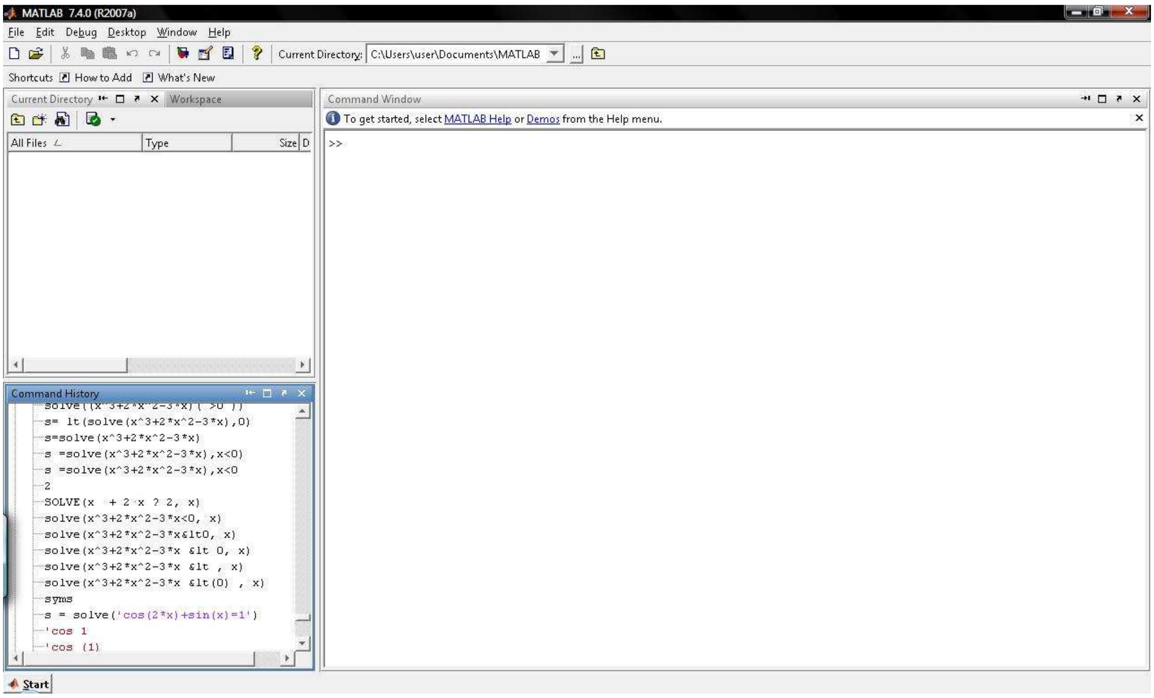


Figura A.1

En la parte superior-izquierda aparecen 2 ventanas: la primera es el *CURRENT DIRECTORY* que se puede alternar con *WORKSPACE* clicando en la ventana correspondiente. En la ventana *CURRENT DIRECTORY* se visualizan los trabajos del directorio actual, mientras que en el *WORKSPACE* contiene la información de las variables utilizadas en una sesión y permite ver y modificar las matrices con las que se esté trabajando.

El *COMMAND HISTORY* está ubicada en la parte inferior-izquierda y expone los comandos utilizados en cada sesión, estos comandos se les puede ejecutar dando doble click sobre ellos.

En la parte derecha se encuentra la ventana *COMMAND WINDOW*, aquí se ejecutan las operaciones matemáticas, funciones, matrices, etc. El indicador “>>” significa que la aplicación está listo para recibir instrucciones.

A.2. Operadores Matemáticos

Durante la siguiente práctica, utilizaremos varios operadores matemáticos, los mismos que lo detallaremos en la siguiente tabla.

OPERADOR	OPERACIÓN
+	Adición o Suma
-	Sustracción o Resta
*	Multiplicación
/	División
^	Potenciación

A continuación mostraremos ejemplos básicos del ingreso de operaciones aritméticas en Matlab.

- La siguiente expresión la demostraremos tal como se ilustra en la figura 2.1

EXPRESION COMÚN	EN LENGUAJE DE MATLAB
$\frac{(2+3)(5-3)}{4-1}$	$((2+3)*(5-3))/(4-1)$

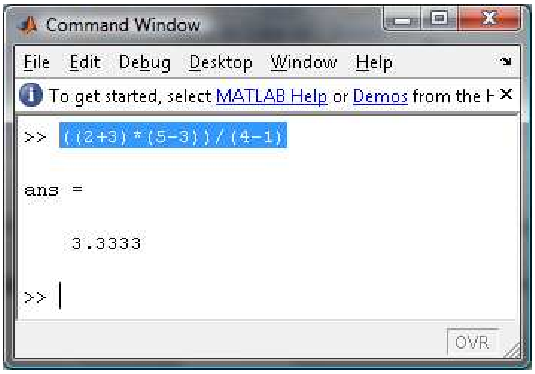


Figura A.2

- La siguiente expresión la demostraremos tal como se ilustra en la figura 2.2

EXPRESION COMUN	EN LENGUAJE DE MATLAB
$3^3+\frac{5}{4}$	(3^3)+(5/4)

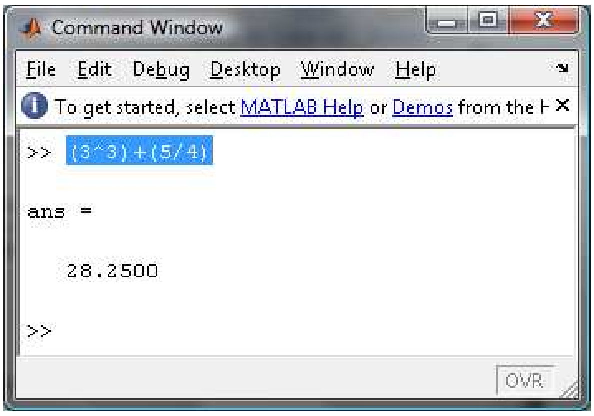


Figura A.3

Nota.- Nótese que la expresión **“tres elevado al cubo”** se representa **“3^3”** donde el signo **“^”** significa que el número que le antecede será elevado al número que le sigue.

Matlab nos ofrece varias funciones prácticas para la resolución de operaciones, para ésta práctica utilizaremos las siguientes funciones:

FUNCIÓN	**OPERACIÓN**
sqrt()	Raíz cuadrada
solve()	Resuelve operación
syms	Define las variables usadas en una ecuación

- En la figura 2.3 mostraremos un ejemplo del ingreso de una función de raíz cuadrada.

EXPRESIÓN COMÚN	**EN LENGUAJE DE MATLAB**
$\sqrt{25} + \sqrt{16}$	sqrt(25) + sqrt(16)

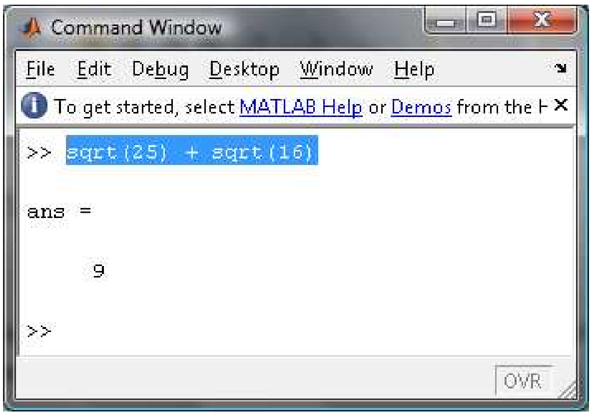


Figura A.4

- Las operaciones de raíces, cúbicas y superiores, se resolverán como una operación de potencia como se observa en la figura 2.4.

$\sqrt[3]{8}$

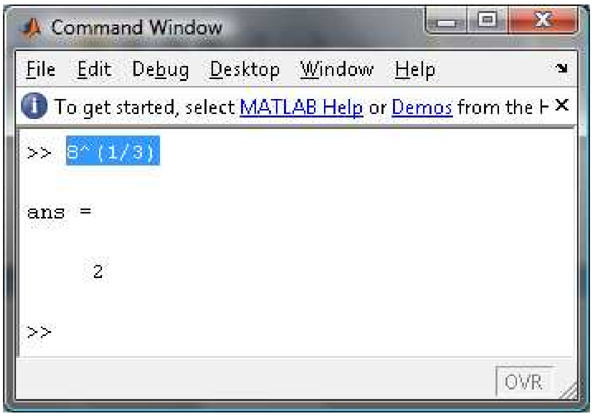


Figura A.5

PRACTICA 11:

ECUACIONES E INECUACIONES

11.1 ECUACIONES:

Los ejercicios que vamos a utilizar pertenecen a los de la unidad 3.1 del libro "Matemáticas para Administración y Economía".

- Ejercicios 28 de la pág. 53.

$$3\,(x^2 + 3x - 10)\,(x-8) = 0$$

Desarrollo:

d) Definimos las variables que usamos en la ecuación; para esto usamos la función **syms.**

syms x

Donde **x** es la variable de nuestra ecuación.

e) Asignamos a una variable la ecuación que ingresaremos al mismo tiempo.

ec = 3*(x^2 + (3*x) - 10) * (x - 8)

No es necesario igualar la ecuación a cero.

f) Llamamos a la función para resolver la ecuación, ésta es la función solve().

solve (ec)

Al final obtendremos el siguiente resultado:

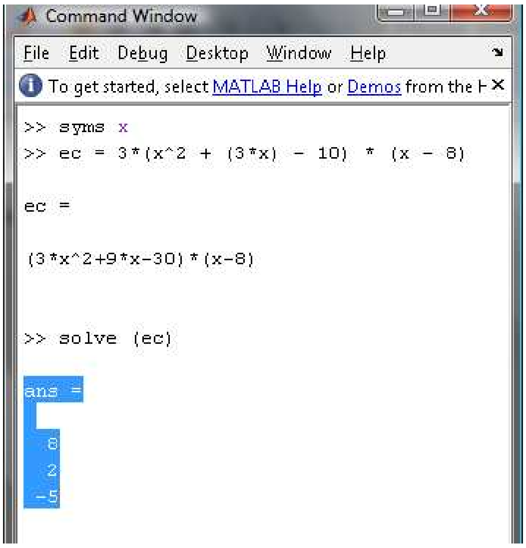


Figura 11.1

Donde la sentencia ans (answer) nos muestra los resultados de la ecuación, es decir los cortes de la función; en este caso serán “8”,”2” y “-5”.

Notas Importantes:

- Al realizar los ingresos en la pantalla de comando, mantener sumo cuidado de ingresar caracteres en mayúsculas, debido a que las funciones que se usan en el Matlab (sqrt, solve) solamente funcionan si se las ingresan en minúsculas como se visualiza en la figura 3.2.

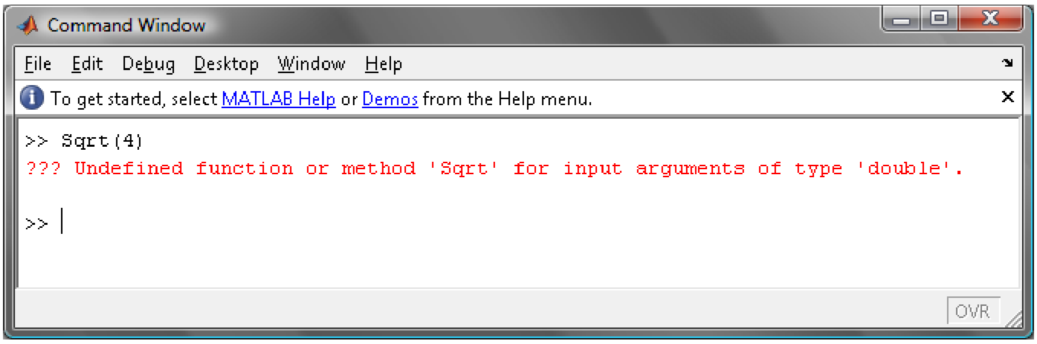


Figura 11.2

11.2 Ejercicios Propuestos

Los siguientes ejemplos que vamos a exponer son extraídos del libro de “Matemáticas para Administración y Economía”

Unidad 1.3

28. $3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0$

42. $0.01x^2 + 0.02x - 0.6 = 0$

48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0$

62. $\frac{2x-3}{2x+5} + \frac{2x}{3x+1} = 1$

73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x-8} - 2 = 0$

Unidad 2.2

18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$

26. $\frac{3(2t-2)}{2} > \frac{6t-3}{5} + \frac{t}{10}$

Unidad 9.5

15. $x^3 + 2x^2 - 3 > 0$

21. $\frac{x^2 - \mathrm{x} - 6}{x^2 + 4\mathrm{x} - 5} \geq 0$

PRACTICA 12:

FUNCIONES Y SUS GRAFICAS

12.1 OPERADORES Y FUNCIONES:

Será necesario que conozcamos las funciones que vamos a utilizar en esta práctica, éstas además de todos los operadores matemáticos y funciones que ya utilizamos en la práctica número 1, es por eso durante la presente práctica detallaremos una vez más los operadores que serán necesarios además de las funciones nuevas.

12.1.1 OPERADORES MATEMÁTICOS

Durante esta práctica además de los aprendidos anteriormente, usaremos los siguientes operadores:

OPERADOR	OPERACIÓN
[ ]	Indica el inicio y fin de una matriz
,	Separador de valores para la matriz
;	Indicador de inicio de otra fila en la matriz

12.1.2 FUNCIONES Y COMANDOS NECESARIAS PARA LA PRÁCTICA

FUNCIÓN	OPERACIÓN
solve()	Resuelve operación
syms	Define las variables usadas en una ecuación
plot(x,y)	Grafica los puntos de “**y**” en función de “**x**”

Ahora procederemos a detallara paso a paso cómo se realiza una gráfica en Matlab.

Como todos sabemos, al realizar una gráfica de una función, es necesario que dicha función se encuentre dentro de un rango de datos o de valores; por ejemplo:

Si queremos obtener la gráfica de la función $f(x)=x^2$, debemos en nuestro caso, asignar un rango de valores de los que queremos que la función extraiga su resultado.

Luego, extraer la función de cada uno de los valores que hemos especificado.

Por último graficaremos la función que hemos calculado.

Esto funcionará de la siguiente manera:

- Creamos un rango de valores asignándolo a una variable cualquiera, en este caso será la variable **“x”** para que luego la función calcule; esto lo haremos ingresando en la Command Window de Matlab la siguiente expresión:

x= -10:0.5:10

Esto quiere decir que queremos valores desde **-10** hasta **10** con intervalos de **0.5.**

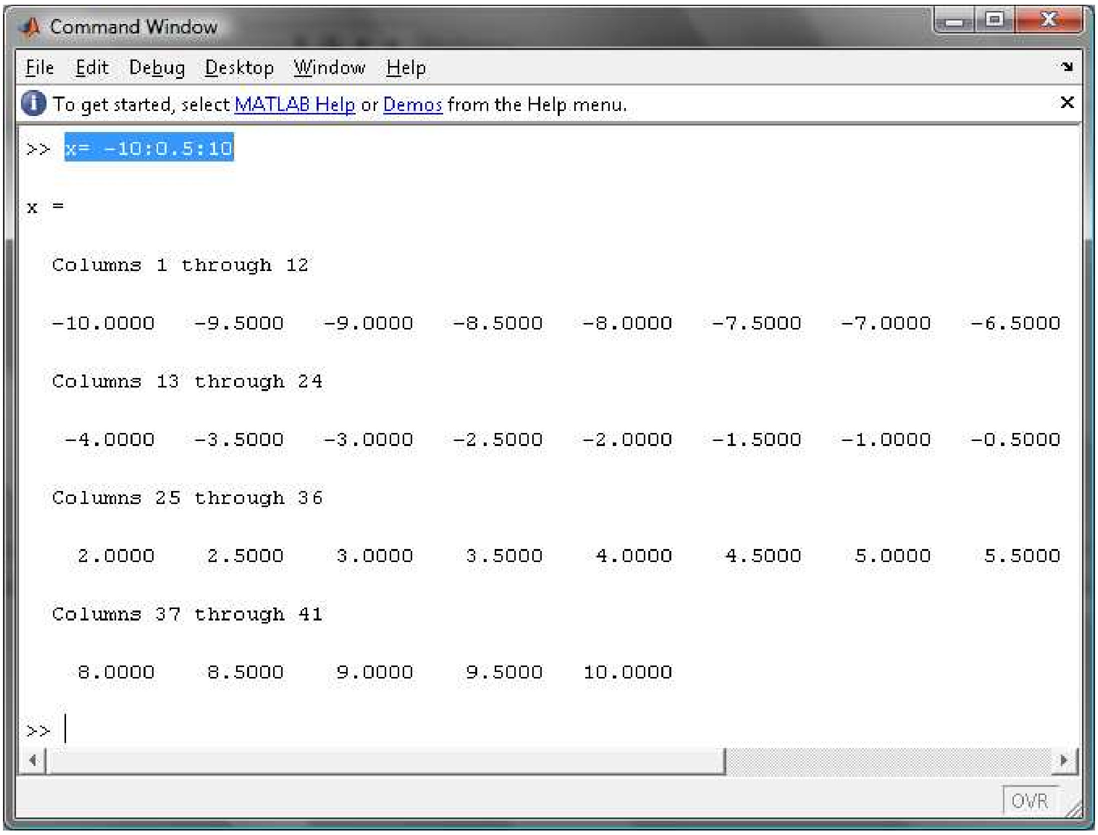


Figura 12.1

Por lo tanto a la variable **“x”** se le han asignado los valores que se detallan en el gráfico anterior.

- Ahora vamos a calcular el cuadrado de cada uno de los valores anteriormente asignado a la variable **“x”**; asi:

y=x.^2

Aquí asignamos a la variable **“y”** todos los valores que corresponden al cuadrado de la variable anterior, es decir, el cuadrado de **“x”.**

Al elevar al cuadrado la variable **“x”**, inmediatamente después de la variable debemos escribir el signo punto **“.”** debido a que si no lo ingresamos no se calcularán los valores, y el lenguaje nos exigirá que ingresemos una matriz y eso es algo que estaremos en capacidad de hacerlo en el futuro**.**

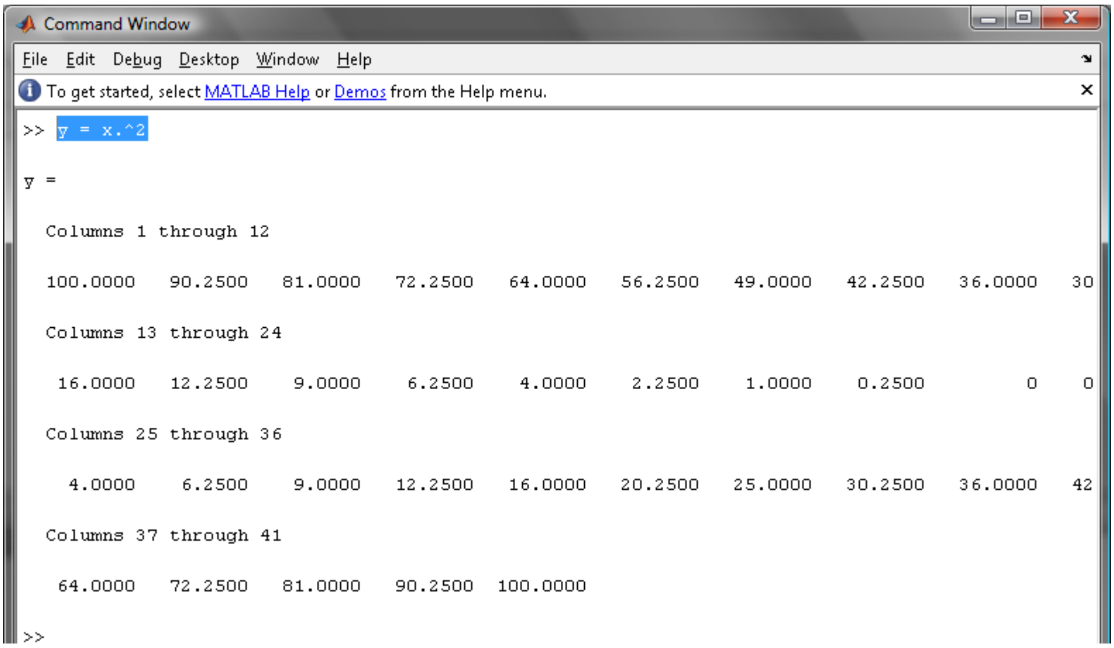


Figura 12.2

Teniendo como resultado los valores que se muestran en esta gráfica.

- Graficaremos todos los resultados de la variable o del vector **"y"** que obtuvimos. Para esto será necesario la intervención de la función "**plot**"; de la siguiente manera:

plot(x,y)

Al invocar la función plot, se abrirá automáticamente una pantalla fuera del entorno de trabajo norma, en ésta pantalla se mostrará el gráfico obtenido de la función calculada.

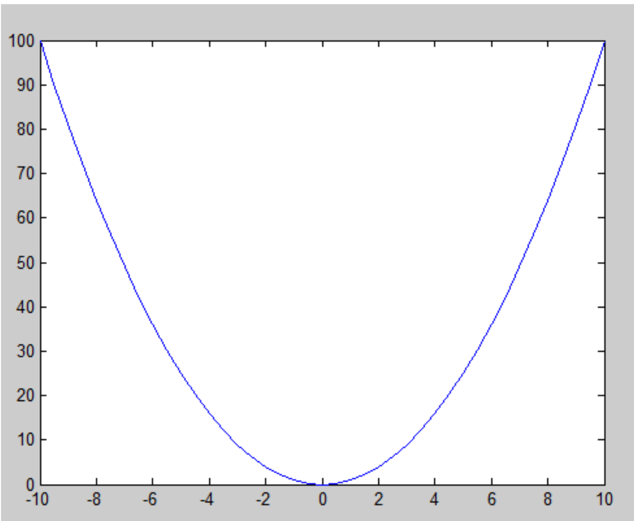


Figura 12.3

De esta manera obtenemos como resultado la gráfica que representa el cuadrado de la variable x que anteriormente asignamos.

Si deseamos mostrar una cuadrícula en la pantalla que nos muestra la gráfica, lo único que debemos hacer es digitar la sentencia **“grid on”** en la command window; asi:

grid on

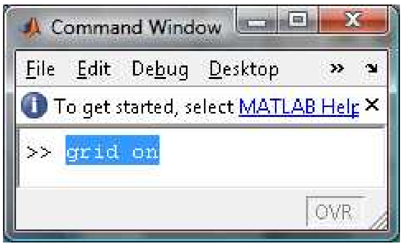


Figura12.4

Y obtendremos la misma gráfica cuadriculada:

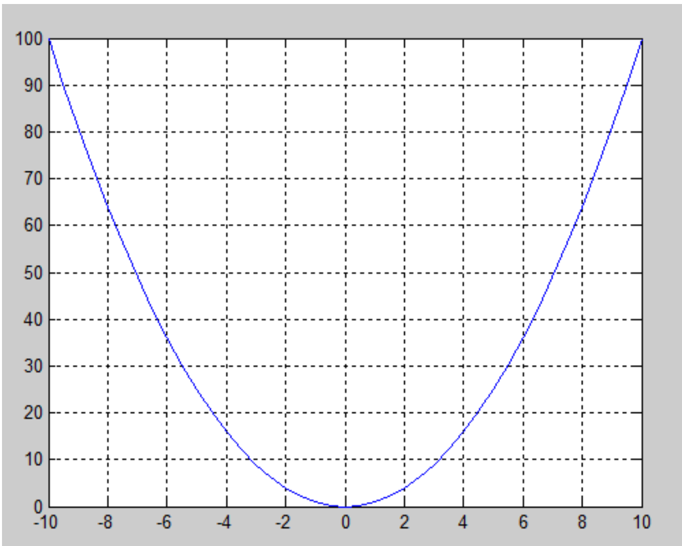


Figura 12.5

12.2 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

Los ejercicios que vamos a utilizar pertenecen al libro “Matemáticas para Administración y Economía” de Ernest F. Haeussler.

- **Practica 1.** Obtener la gráfica de la siguiente ecuación.

a) Lo primero que haremos es definir un rango de valores dentro de los cuales vamos a calcular la función, en nuestro caso, la función será la ecuación citada. El rango de valores será asignado a una variable, y para nuestra función puede ser cualquier rango prudente, en este momento vamos a generar un rango entre **-10** y **10**, con intervalos de 0.5.

Lo haremos digitando en la ***Command Window*** la siguiente sentencia:

x = -10:0.5:10

Nótese que cada parte del rango, incluido el intervalo está separado por ":"

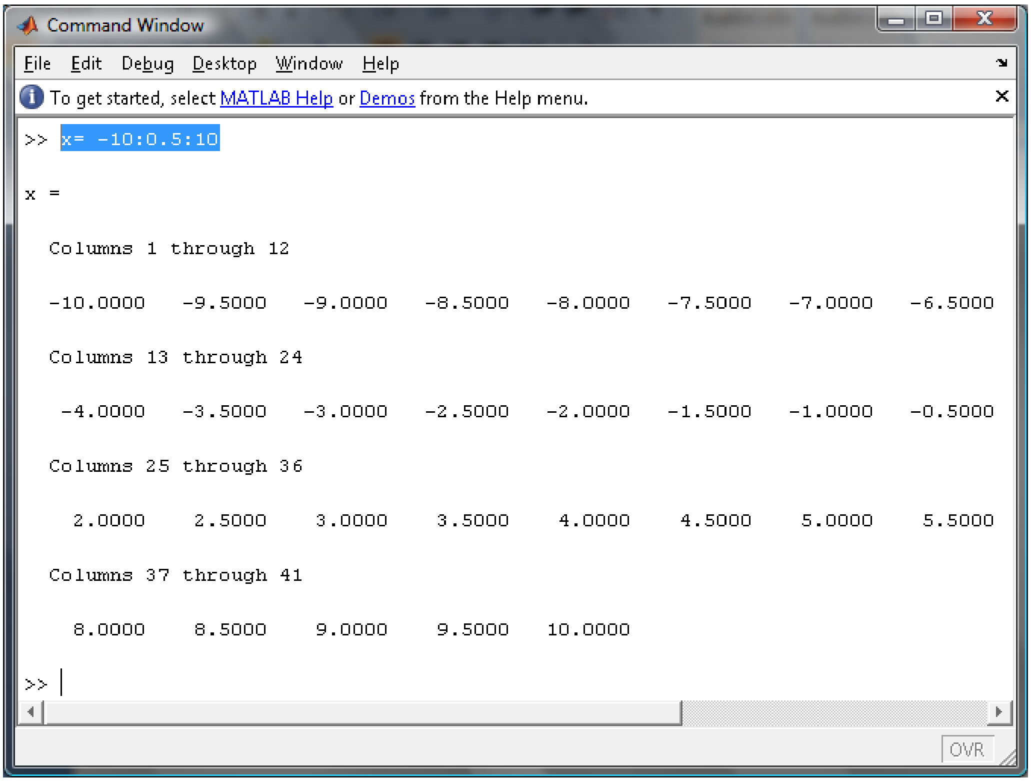


Figura 12.6

b) Ahora calcularemos la ecuación en **función** de los valores del rango que ya definimos

Pero esta vez tenemos que realizar el cálculo con una pequeña diferencia en el ingreso de los datos de la ecuación, es decir, debemos estar atentos a lo que a continuación escribiremos en la ***Command Window:***

$$y = 4 * (x.\hat{}2) - 16$$

Como ya dijimos anteriormente, inmediatamente después de la variable debemos escribir el signo punto **"."** Debemos tener mucho cuidado al hacer este procedimiento, porque nos saldrá una advertencia de error.

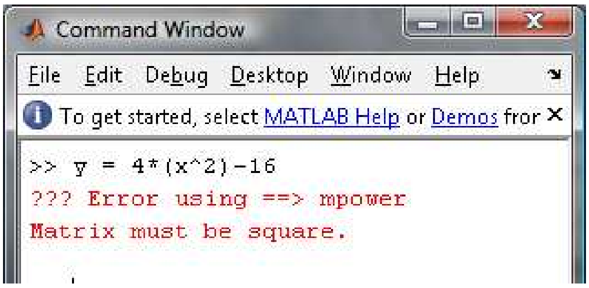


Figura 12.7

Este error lo obtendremos si ingresamos la ecuación sin digitar el punto luego de la variable.

Esto no quiere decir que en el lenguaje Matlab debemos digitar el signo punto cuando queremos elevar a una potencia cualquiera, esto solamente sucederá en la práctica de funciones y gráficas.

y = 4*(x.^2)-16

Cuando ingresemos la ecuación de la manera correcta, obtendremos una pantalla asi:

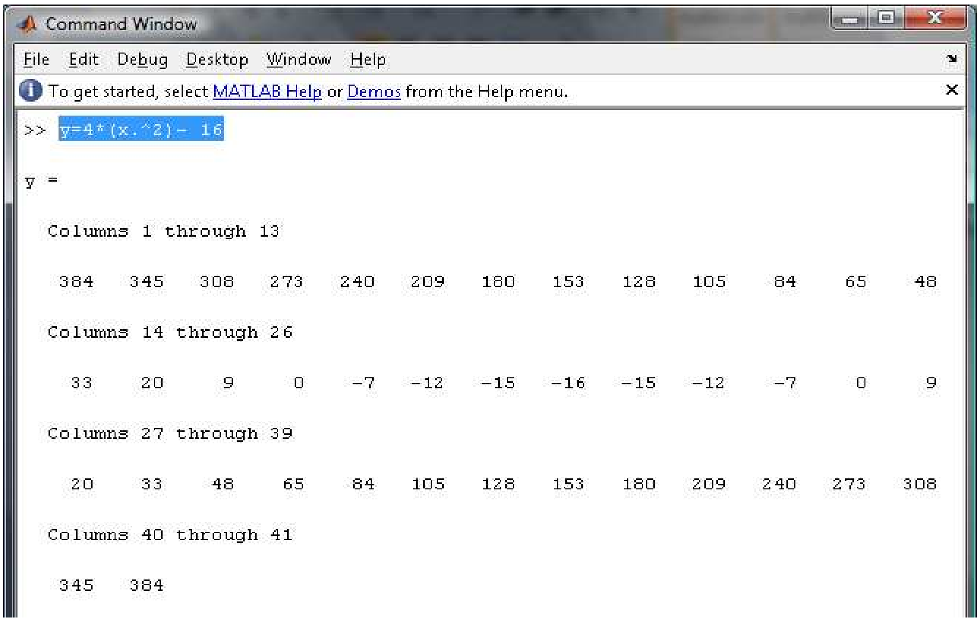


Figura 12.8

El momento que nos sale esta pantalla, es decir que tenemos un rango de valores nuevos para la variable **"y"** en función de **"x"** (valores que se muestran en la pantalla) procederemos a graficar la ecuación.

c) Ahora graficaremos la ecuación calculada en función de los valores de **"x"** ingresando en la misma ***Command Window*** la siguiente sentencia.

plot(x,y)

Como ya hemos explicado, el momento que digitamos la sentencia **“plot”** invocaremos a una ventana nueva en la que nos va a mostrar la gráfica resultante con los valores calculados.

La pantalla resultante con el gráfico correspondiente será la siguiente.

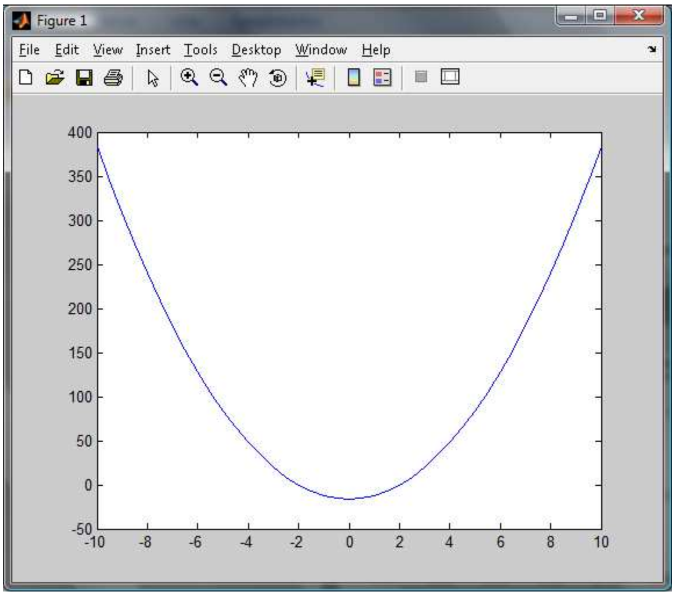


Figura 12.9

Recordemos que para mayor facilidad de visibilidad, podemos usar la sentencia que activa la cuadrícula en la ventana del gráfico

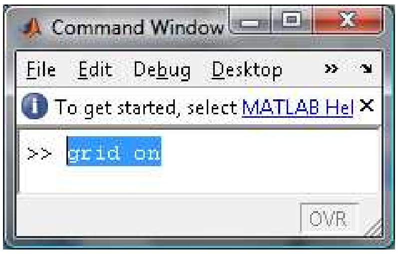


Figura 12.10

Teniendo la misma gráfica con la cuadrícula activada.

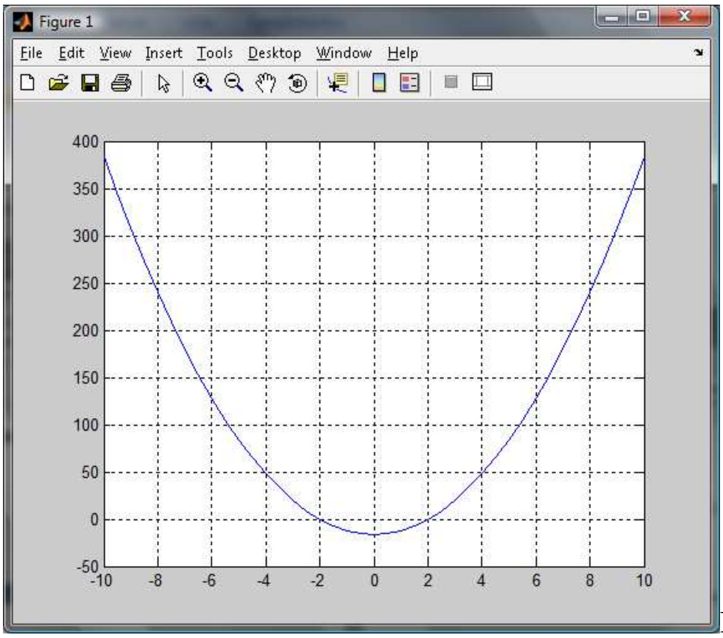


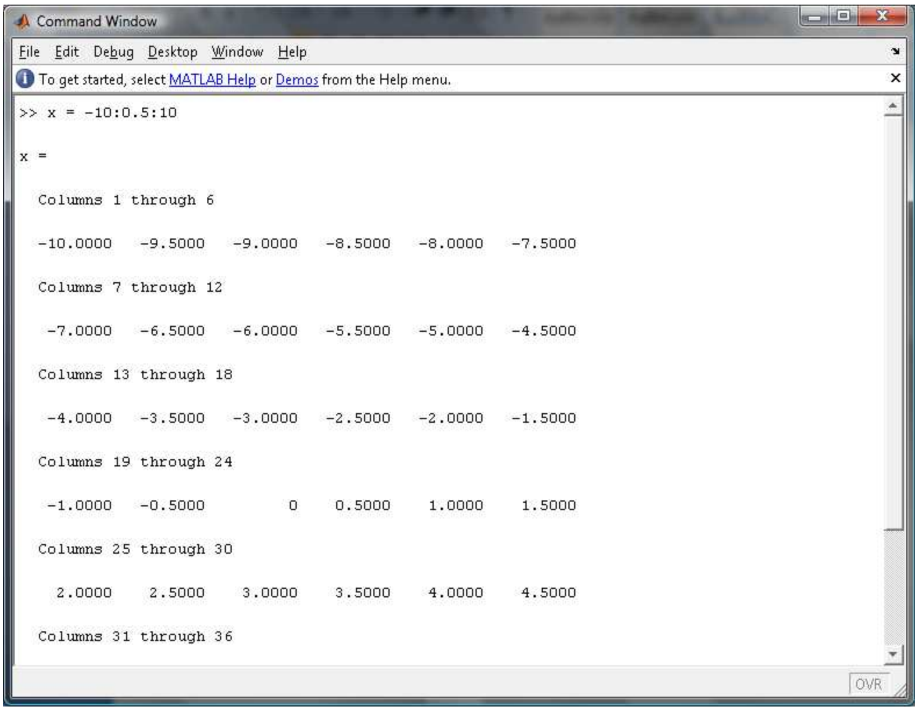
Figura 12.11

- **Práctica 2:** Obtener la gráfica de la siguiente ecuación.

$$y = \sqrt{}(\boldsymbol{x^2} - 25)$$

a) De la misma manera, lo primero que haremos es definir un rango de valores para la variable **"x".**

x=-45:1:45


Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
To get started, select MATLAB Help or Demos from the Help menu.
>> x = -10:0.5:10
x =
Columns 1 through 6
-10.0000 -9.5000 -9.0000 -8.5000 -8.0000 -7.5000
Columns 7 through 12
-7.0000 -6.5000 -6.0000 -5.5000 -5.0000 -4.5000
Columns 13 through 18
-4.0000 -3.5000 -3.0000 -2.5000 -2.0000 -1.5000
Columns 19 through 24
-1.0000 -0.5000 0 0.5000 1.0000 1.5000
Columns 25 through 30
2.0000 2.5000 3.0000 3.5000 4.0000 4.5000
Columns 31 through 36
OVR
Figura 12.12

b) Calcularemos los valores correspondientes de la ecuación en función de los valores del rango.

y=sqrt(x.^2-25)

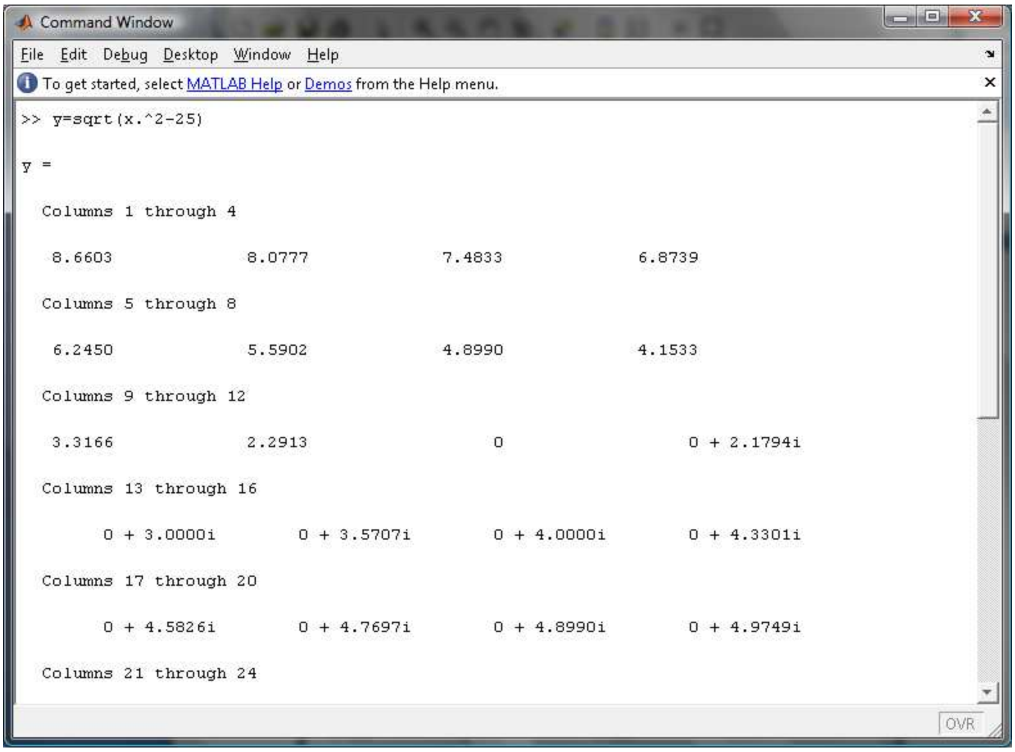


Figura 12.13

Nota: No debemos olvidarnos de poner el signo del punto cuando vayamos a elevar al cuadrado la variable **"x".**

c) Ahora procederemos a graficar la función calculada:

grid on

plot(x,y)

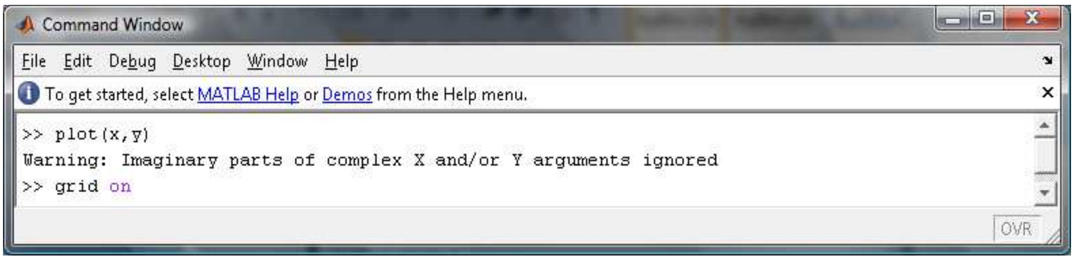


Figura 12.14

Al digitar de la manera en la que la estamos haciendo, queremos decir que vamos a graficar la función **“y”** en función de la variable **“x”.**

Como resultado tendremos la siguiente gráfica:

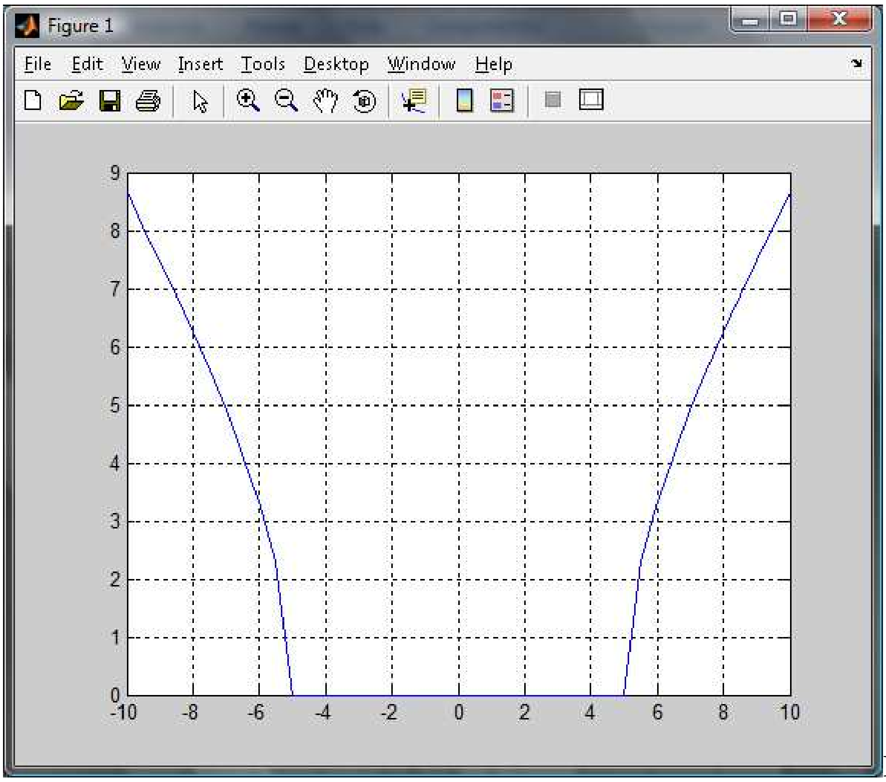


Figura 12.15

12.3 COMPORTAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Observar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas.

12.3.1 SIMETRÍA:

En ésta ocasión examinaremos ecuaciones para determinar so sus gráficas tienen simetría.

Considere la gráfica de $y=x^2$ de la siguiente gráfica, la parte izquierda del eje ***y*** es el reflejo de la parte de la derecha, del eje, y viceversa

EJEMPLO 1:

Simetría con respecto al eje *"y"*.

Con el antecedente anterior, podremos ver que la gráfica de $x=y^2$ (la cual es lo contrario de la ecuación propuesta en el párrafo anterior) tendrá simetría con respecto al eje ***x.***

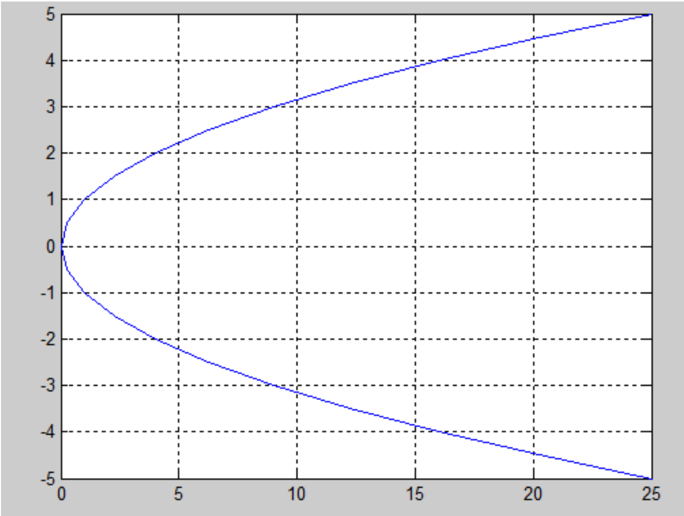


Figura 12.16

Aplicando al lenguaje de Matlab, la sintaxis será la siguiente:

```
y = -5:0.5:5

x=  y.^2

plot(x,y)

grid on
```

Tenemos un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, y se ilustra por la gráfica de $y=x^3$, a la cual la graficaremos de la misma manera que la anterior, obteniendo la siguiente gráfica.

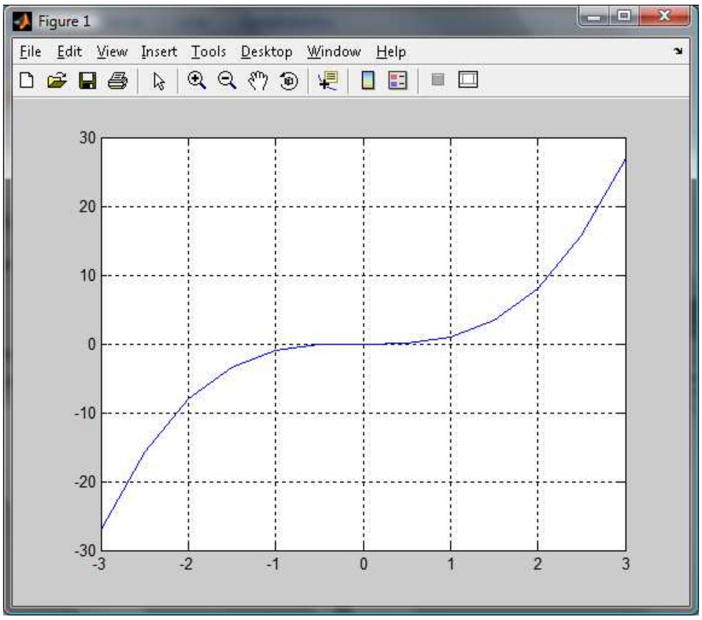


Figura 12.17

12.3.2 TRASLACIONES Y REFLEXIONES:

A veces, al modificar una función mediante una manipulación algebraica, la gráfica de la nueva función puede obtenerse a partir de la gráfica de la función original realizando una manipulación geométrica. Podemos utilizar la gráfica de **f(x)=** x^2 para graficar **y=** x^2+2**.** Obsérvese que **y=f(x)+2.** Por tanto, para cada ***x***, la ordenada correspondiente para la gráfica de **y=** x^2+2 , es dos unidades mayor que la obtenida para la gráfica de **f(x)=** x^2**.** Esto significa que la gráfica de **y=** x^2+2 es la gráfica de **f(x)=** x^2**,** desplazada o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba, tal como nos muestra la figura.

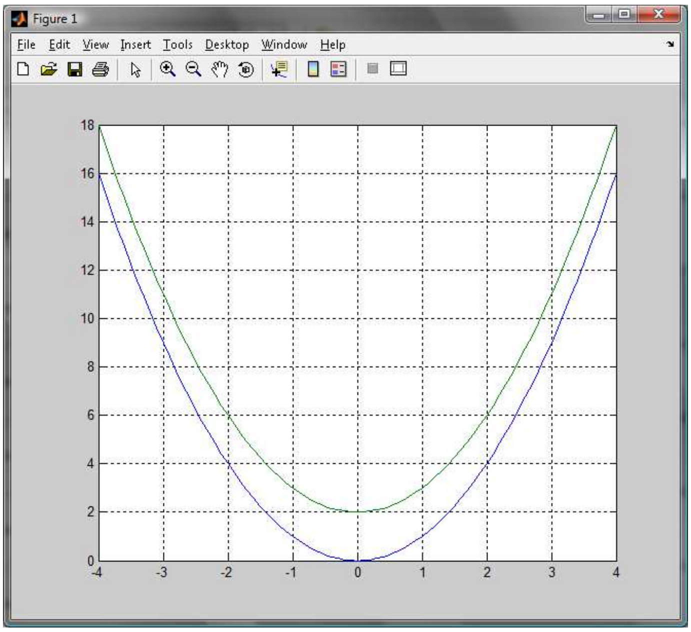


Figura 12.18

Para nuestro ejemplo, digitaremos lo siguiente en el command window de Matlab.

- x=-4:0.1:4
- y1=x.^2
- y2=x.^2+2
- plot(x,y1,x,y2)
- grid on

En este caso pedimos que **y1, y2** se grafiquen en función de la variable **x,** aclarando que **y1, y2** representan las variables **"f(x)"**, e **"y"** respectivamente.

Si aplicamos esta misma teoría a otra función, por ejemplo, **f(x)=x^3,** sumándole a esta una constante cualquiera, para este caso, le sumaremos **5** a la variable, obtendremos que la nueva gráfica se desplazará 5 unidades hacia arriba, tal como nos muestra la figura.

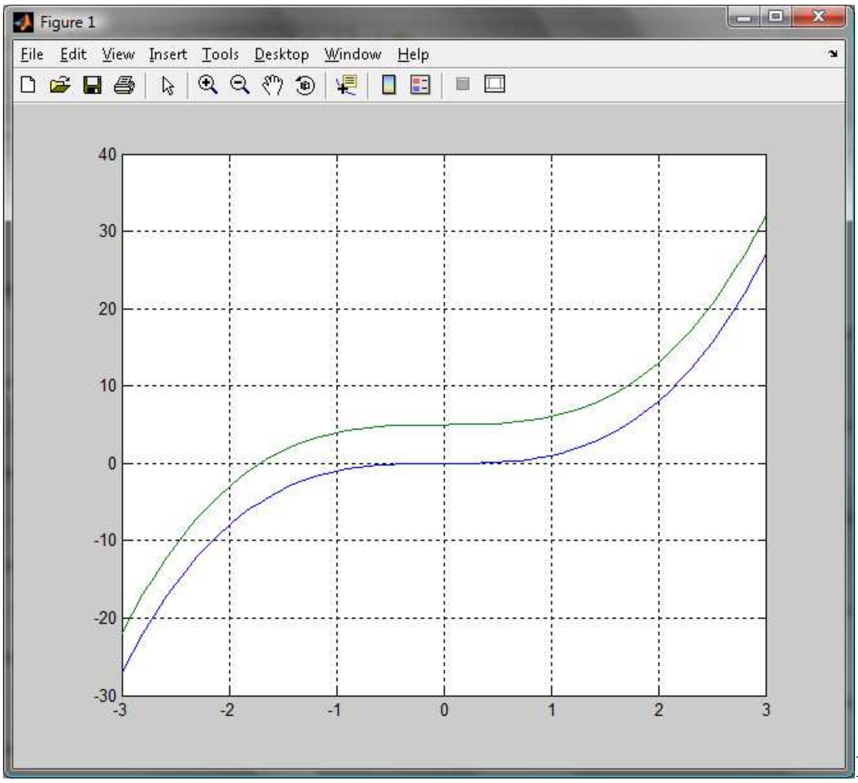


Figura 12.19

- x=-3:0.1:3
- y1=x.^3
- y2=x.^3+5
- plot(x,y1,x,y2)

12.4 OTRA FORMA DE GRAFICAR FUNCIONES

Hemos desarrollado los ejercicios, dándoles un valor fijo a ***x***, sin embargo, algunas veces, no sería muy útil si esto se realiza para todos las prácticas, debido a que no siempre sabremos un valor preciso para dicha variable, es por eso, que ahora presentaremos otra forma, más rápida de resolver los mismos ejercicios.

Por ejemplo, si deseamos resolver el ejercicio:

$$y = \sqrt{(\boldsymbol{x}^2 - 25)}$$

Escribiremos las siguientes líneas de código en el Command Window:

- Declaramos las variables que vamos a usar, usando la sentencia o función ***syms***.

syms x y

Con este paso, omitimos el dar un rango de valores a ***x.*** no debemos olvidarnos de dar por lo menos un espacio luego de cada variable, porque de lo contrario la variable que definiríamos sería “xy”, ya no “x”, “y”.

- Asignamos a la variable ***y*** la función propuesta.

y = sqrt(x^2-25)

Si nos fijamos, en este paso, cuando escribimos “x^2” a diferencia de lo desarrollado anteriormente, no usamos el punto antes del símbolo “^”, esto es gracias a que “***x***” no es un vector de valores.

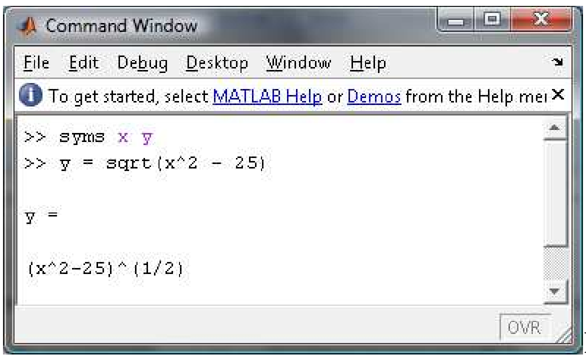


Figura 12.20

- Graficamos la función obtenida. Para esto usaremos la sentencia “**ezplot**”.

ezplot(y)

grid on

Obteniendo el siguiente resultado.

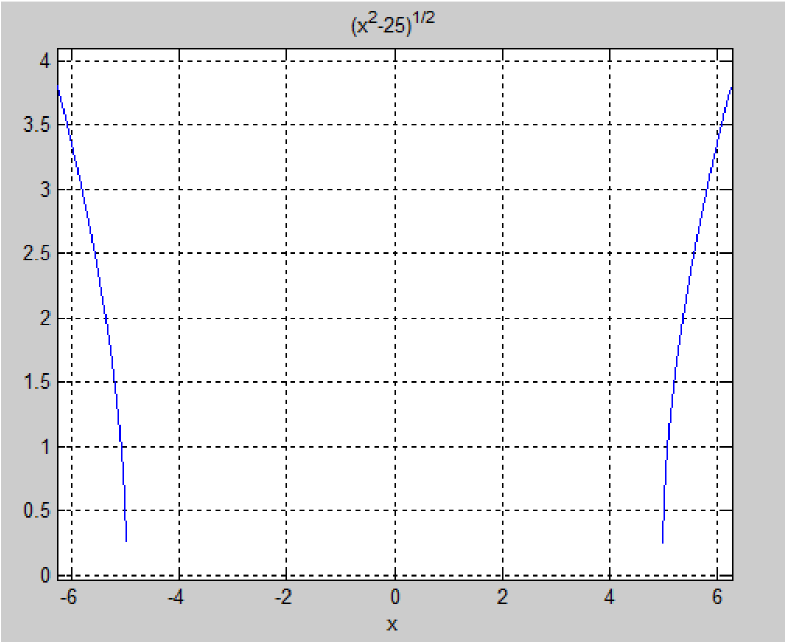


Figura 12.21

De la misma forma, si deseamos graficar esta función, procederemos de la siguiente manera:

$$y = 4 * (x.\,\hat{}\,2) - 16$$

Escribiremos en el command window las siguientes sentencias:

- syms x y
- y = 4 * (x^2) -16
- ezplot(y)
- grid on

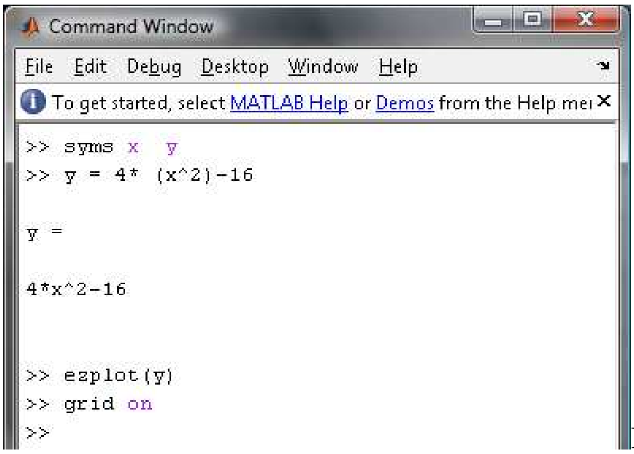


Figura 12.22

Luego obtendremos la siguiente gráfica:

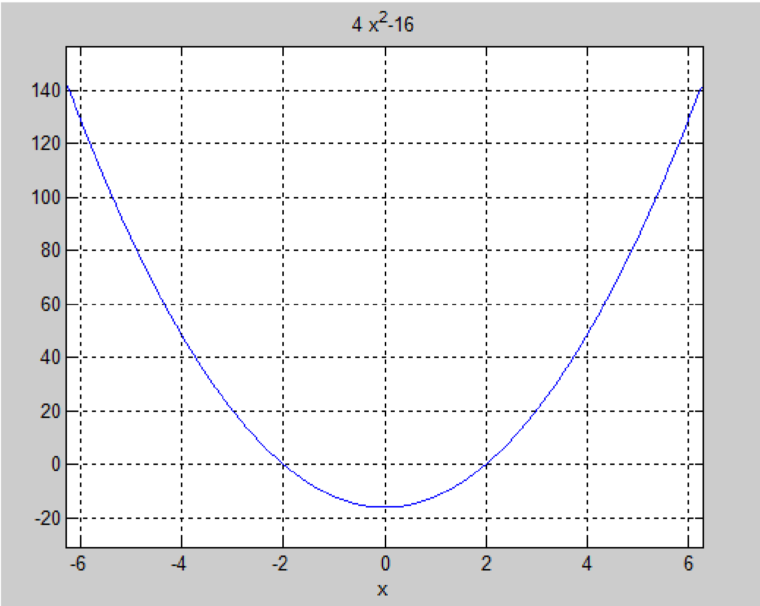


Figura 12.23

PRACTICA 13

RECTAS, PARABOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

13.1 RECTAS:

Definición:
Sean (x1, y1) y (x2, y2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical, la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Teniendo así que, una recta vertical no tiene pendiente, debido a que por dos puntos cualesquiera sobre ella, deben tener **x1=x2,** lo que da un denominador igual a cero. En cambio, en una recta horizontal, dos puntos cualesquiera deben tener **y1=y2**, lo que da un numerador igual a cero, por lo tanto en este tipo de recta la pendiente será igual a cero.

Resumiendo, podemos caracterizar la orientación de una recta por su pendiente.

- Pendiente cero: recta horizontal.
- Pendiente indefinida: recta vertical.
- Pendiente positiva: recta que sube de izquierda a derecha.
- Pendiente negativa: recta que desciende de izquierda a derecha.

13.1.1 Ecuaciones de rectas:

Después de realizar el análisis respectivo, podemos demostrar que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma ***Ax + By + C = 0***, donde A, B y C son constantes y A y B no son ambas cero. Llamamos a ésta la *ecuación lineal general* (o *ecuación de primer grado*) en las variables "**x**" y "**y**" se dice que están **relacionadas linealmente.**

Por ejemplo, una ecuación lineal general para *y=7x*, es (-7) x + (1) y + (2) = 0

Obteniendo la siguiente gráfica de dicha ecuación.

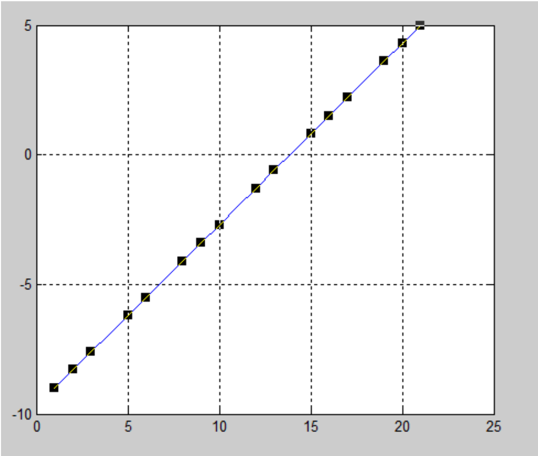


Figura 13.1

Partiendo de los ejercicios del libro, podemos realizar las gráficas de las siguientes ecuaciones como refuerzo de la práctica.

Nota: Para realizar las gráficas en el lenguaje Matlab, es necesario igualar a "**y**" a todas las ecuaciones que se nos proponen, de lo contrario no será posible graficar la ecuación.

Grafique:

y = 1.3x + 7

a) Asignamos un rango de valores a la variable "x".

x = -10:10

b) Asignamos el rango de valores a la ecuación.

y = 1.3*x + 7

c) Llamamos al comando para graficar la ecuación.

plot(x,y)

grid on

Luego obtendremos la siguiente gráfica resultante:

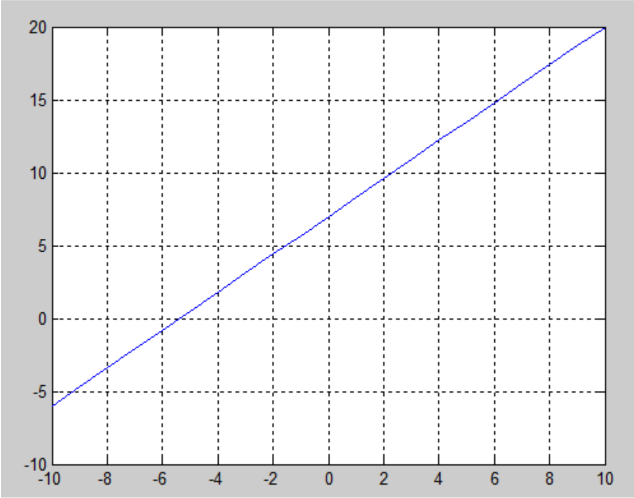


Figura 13.2

Grafique las rectas, cuyas ecuaciones son:

- y = 1.5x + 1
- y = 1.5x – 1
- y = 1.5x + 2.5

Para la ocasión, explicaremos en detalle el desarrollo de una de las ecuaciones, las otras, propondremos que la hagan en la práctica en clases:

Grafique:

y = 1.5x + 1

a) Asignamos un rango de valores a la variable “x”.

x = -10:10

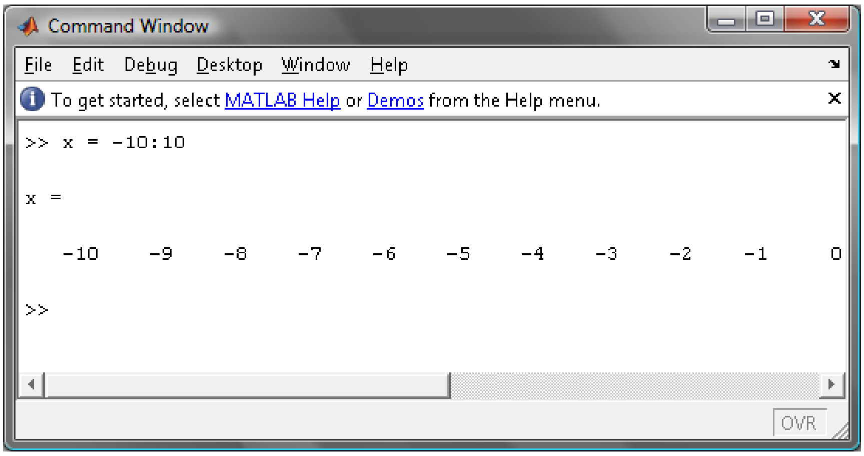


Figura 13.3

b) Asignamos el rango de valores a la ecuación.

y = 1.5*x + 1

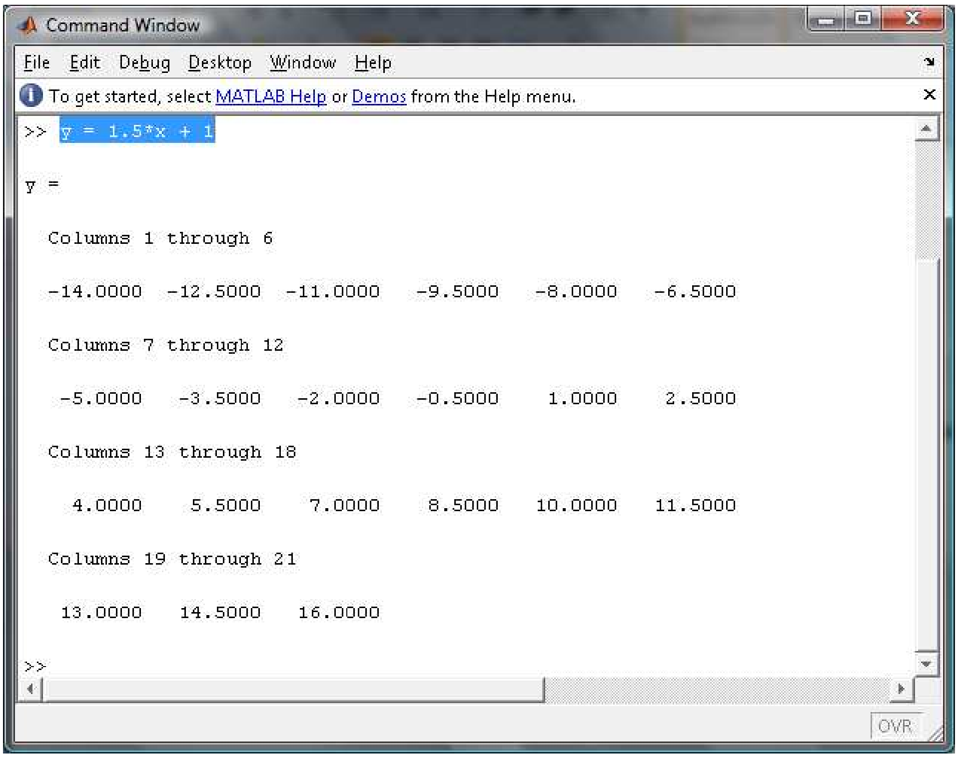


Figura 13.4

c) Llamamos al comando para graficar la ecuación.

plot(x,y)

grid on

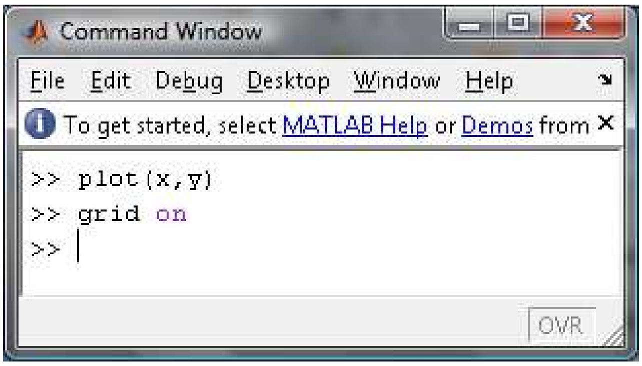


Figura 13.5

Teniendo la siguiente gráfica resultante:

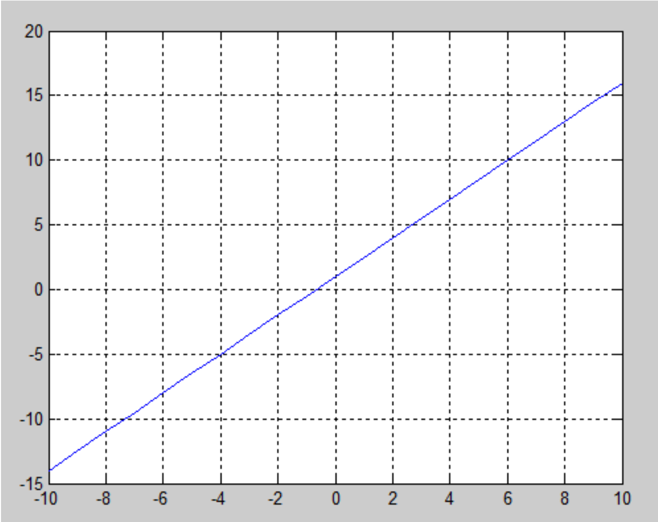


Figura 13.6

Para las otras ecuaciones, solamente re-calcularemos los valores de la ecuación, debido a que el rango de valores de la variable **"x"** se mantendrá igual, salvo que se sugieran cambios.

13.1.3 Curvas de Demanda y de Oferta:

Por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta, asciende de izquierda a derecha. Sin embargo, existen excepciones.

Ahora analizaremos algunas ecuaciones propuestas, para ver como se representan las gráficas de la oferta y de la demanda.

Estas curvas tienen ecuaciones en las que *p y q* están relacionadas de manera lineal.

Ejemplos:

Gráfica de la función de la demanda.

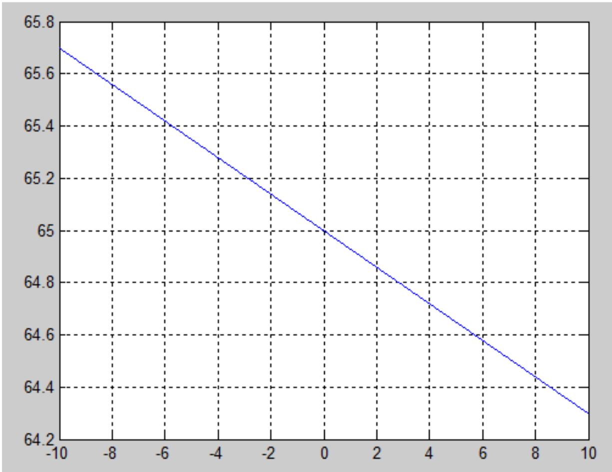


Figura 13.7

Para obtener ésta gráfica, en el Command Window de Matlab, digitamos las siguientes sentencias:

- q = -10:0.01:10
- p= -(7/100)*q + 65
- plot(q,p)
- grid on

13.2 FUNCIONES CUADRÁTICAS (PARABOLAS)

Una función *f* es una ***función cuadrática*** si y solo si *f(x)* puede escribirse en la forma:

$f(x) = ax^2+bx+c$, donde a, b y c son constantes y a<>0.

13.2.1 Gráfica de una función cuadrática:

La gráfica de la función cuadrática $\boldsymbol{y = ax^2+bx+c}$ es una parábola:

1. Si a > 0, la parábola abre hacia arriba, si a < 0, abre hacia abajo.
2. El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
3. La intersección ***y*** es c.

Graficar la función cuadrática y = $f(x) = -x^2 - 4x + 12$

Para graficar esta función, nos basaremos en el procedimiento de la gráfica de las funciones anteriormente estudiadas. Todas estas instrucciones

a) Definimos un rango de valores para la variable de **x**

x = -15:10

b) Calculamos la función *f(x)*, que en nuestro caso será la variable ***y***, con los valores del rango calculado en el paso anterior.

y = - x.^2 – 4*x + 12

c) Llamamos a la función para graficar.

plot(x,y)

Activando al mismo tiempo la cuadrícula en la pantalla de la gráfica.

grid on

Teniendo como resultado la siguiente parábola:

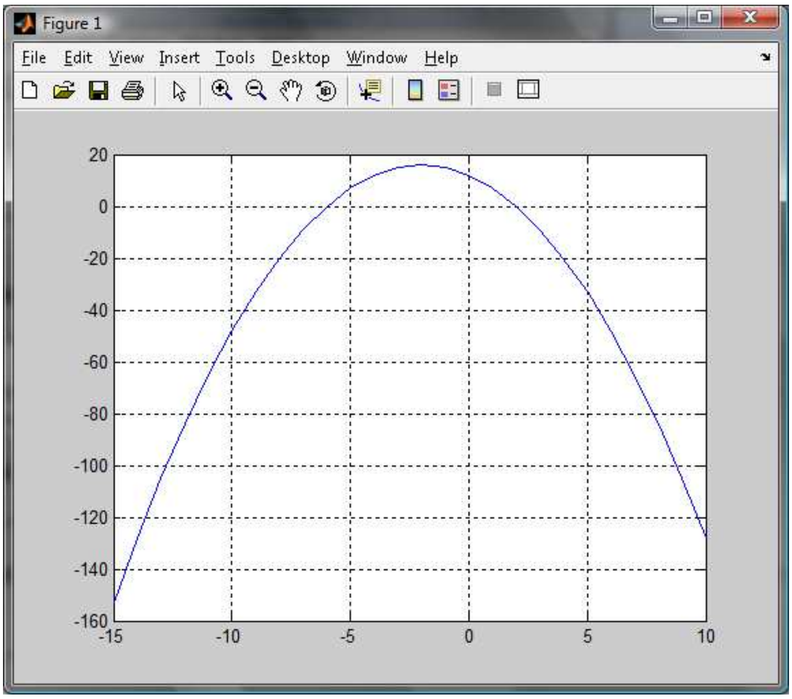


Figura 13.8

Ejercicios:

- Graficar $g(x) = x^2 - 6x + 7$

Esta es una función cuadrática, donde a = 1, b = -6 y c = 7. La parábola se abrirá hacia arriba, ya que a > 0.

a) Definimos un rango de valores para la variable de **x**

x = -5:0.1:10

b) Calculamos la función *g(x)*, que en nuestro caso será la variable ***y***, con los valores del rango calculado en el paso anterior.

y = x.^2 -6*x + 7

c) Llamamos a la función para graficar.

plot(x,y)

Activando al mismo tiempo la cuadrícula en la pantalla de la gráfica.

grid on

Lo cual nos dará como resultado lo siguiente:

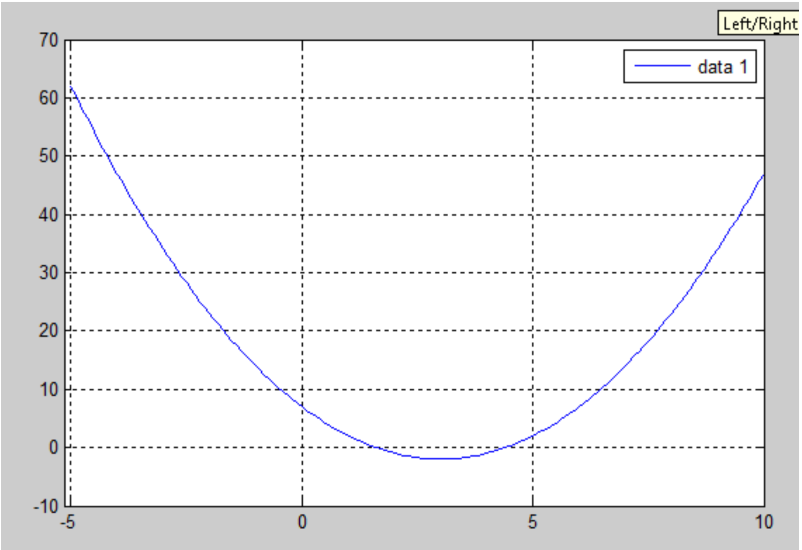


Figura 13.9

13.3 OTRO MÉTODO PARA RESOLVER RECTAS Y PARÁBOLAS:

De la misma manera que en la práctica de "**funciones y sus gráficas**", cuando resolvemos rectas y parábolas, es necesario ingresar un rango de valores dentro de una variable sobre la cual vamos a realizar el cálculo, normalmente esa es la variable ***x***.

Hay otro método más sencillo y rápido, y es el mismo que usamos en la práctica anterior, en el cual **no es necesario ingresar** un rango de valores para la variable ***x.***

Por ejemplo, si deseamos obtener la gráfica de la siguiente ecuación:

$$y = 1.5x - 1$$

Procederemos de la siguiente manera.

- Declaramos las variables que vamos a usar.

syms x   y

No debemos olvidarnos de poner por lo menos un espacio entre las dos variables.

- Calculamos la ecuación.

y = 1.5 * x - 1

- Graficamos la ecuación usando el comanda “**ezplot()**”

ezplot(y)

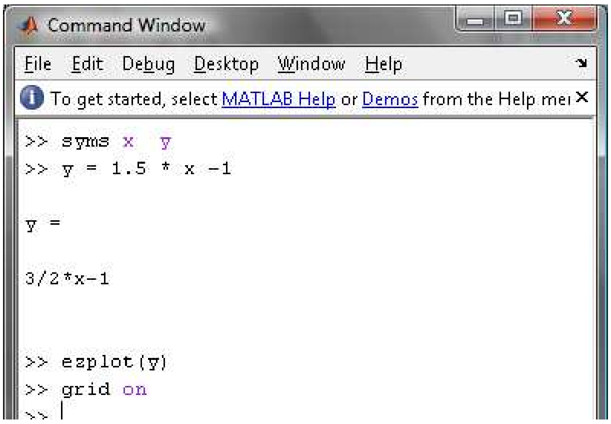


Figura 13.10

Donde obtendremos como resultado la siguiente recta.

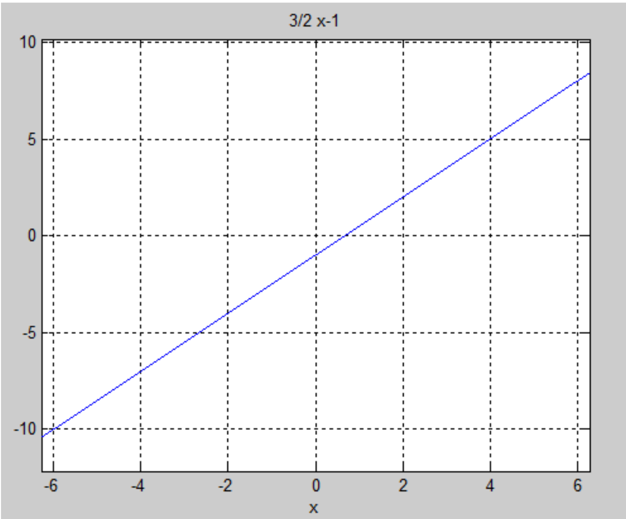


Figura 13.11

De igual forma, si queremos obtener la gráfica de la siguiente ecuación:

$$g(x) = x^2 - 6x + 7$$

Escribiremos lo siguiente:

- Declaramos las variables que vamos a utilizar.

syms x   y

En este caso, la variable ***y***, será igual a $g(x)$.

- Asignamos a la variable ***y*** la ecuación propuesta.

y = x^2 – 6 * x + 7

En este paso, vemos que no es necesario colocar el signo “**.**”, cuando realizamos la operación de potenciación, esto se debe a que no calculamos sobre un valor constante, sino sobre una variable.

- Graficamos la función obtenida.

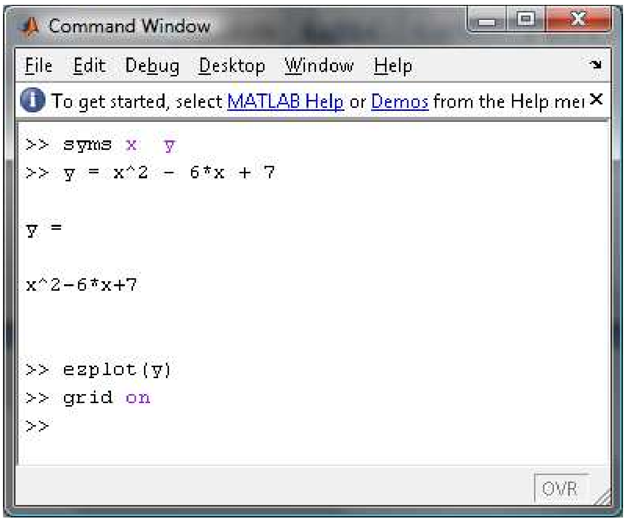


Figura 13.12

Para esto, usamos el comando “**ezplot()”**.

Obtendremos la siguiente parábola.

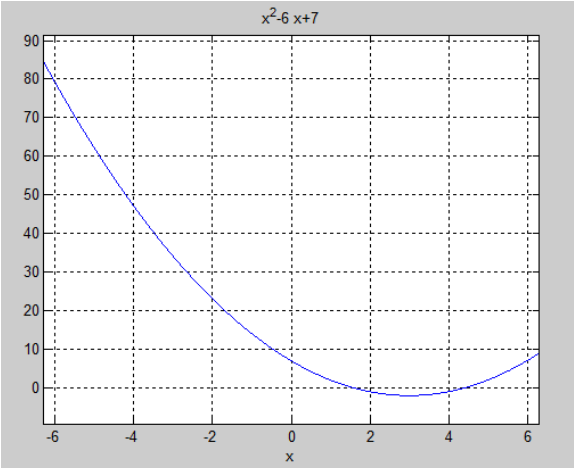


Figura 13.13

13.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Cuando hablamos de resolver un sistema de ecuaciones lineales en Matlab, podremos ver que no existe diferencia alguna si es que queremos resolver un sistema con dos, tres o más variables; ejemplo:

Cuando tenemos un sistema de dos variables:

O si tenemos el siguiente sistema de tres variables:

Debemos considerar a todo el sistema como dos matrices de valores, donde:

La una matriz estará conformada por los coeficientes de las variables, es decir, los coeficientes de la parte izquierda del igual, y la segunda matriz serán los valores constantes de las ecuaciones, o sea, los valores de la parte derecha del igual.

Es así que tenemos para el primer caso de nuestro ejemplo las siguientes dos matrices:

Matriz A: Matriz de los coeficientes (valores de la izquierda del igual).

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz B: Matriz de los valores constantes (valores de la derecha del igual).

$$\begin{pmatrix} 335 \\ 850 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, en el segundo caso de nuestro ejemplo, tenemos las siguientes dos matrices

Matriz A: Matriz de los coeficientes (valores de la izquierda del igual).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz B: Matriz de los valores constantes (valores de la derecha del igual).

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

13.4.1 Ingreso de Matrices en Matlab:

Ahora explicaremos de una manera muy rápida como se realiza el ingreso de una matriz en Matlab, debido a que este es un tema que lo revisaremos mas a profundidad más adelante.

Para ingresar una matriz cualquiera, debemos definir en primer lugar cual será el separador que utilizaremos para definir filas y columnas, es por eso que para la práctica, utilizaremos el signo **“;”** como separador de filas, y lo utilizaremos de la siguiente manera.

Para ingresar la siguiente matriz:

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Escribiremos en el Command Window de Matlab la siguiente sentencia:

a=[4   5; 9   14]

Es necesario utilizar siempre los corchetes para definir las matrices, y como podemos observar, la segunda fila de la matriz, está separada por el signo **“;”** siendo al mismo tiempo el separador de los elementos de cada fila (separador entre el 4 y el 5) uno o varios espacios**.**

Obteniendo el siguiente resultado:

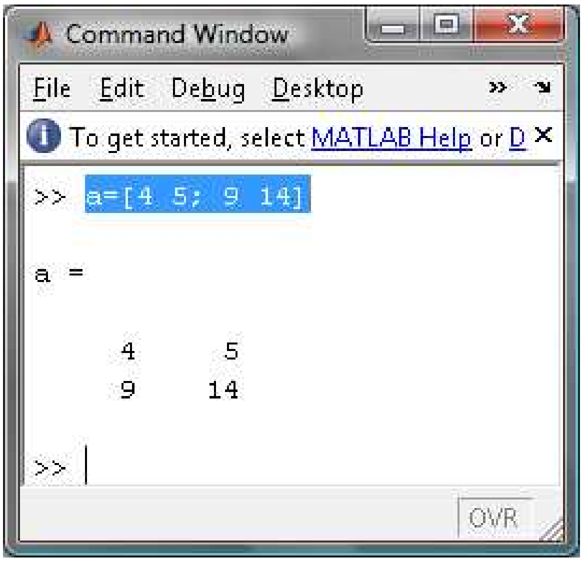


Figura 13.14

De la misma manera realizaremos el ingreso de la matriz de los valores constantes.

b= [335;850]

Nótese que lo que queremos es tener una matriz de una columna con dos filas, es por eso que después de cada término ponemos el signo **“;”.**

Obtendremos el siguiente resultado:

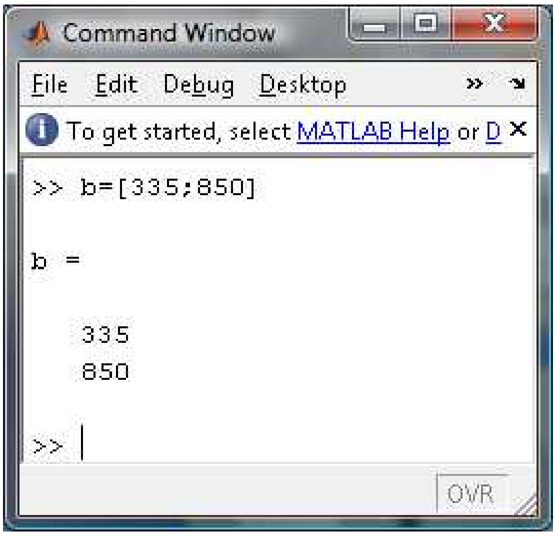


Figura 13.15

Ahora, si queremos ingresar una matriz de tres columnas, lo que equivale a un sistema de tres variables, lo haremos de la siguiente manera.

Para ingresar una matriz como esta, que es la que equivale a la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones (valores de la izquierda):

$$a= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ingresaremos en el Command Window del Matlab la siguiente sentencia:

a= [2 1 6;1 -1 4; 3 2 -2]

Obteniendo el siguiente resultado:

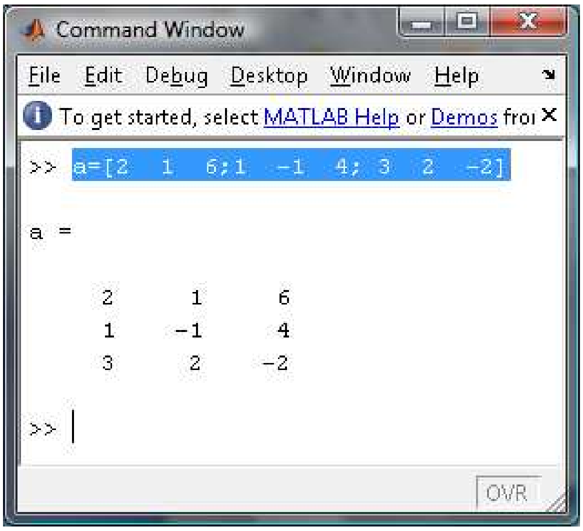


Figura 13.16

De la misma manera, tendremos que ingresar la matriz que equivale a los valores constantes del sistema de ecuaciones (los valores de la derecha), ingresaremos la siguiente sentencia.

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b= [3;1;2]

Obtendremos el siguiente resultado:

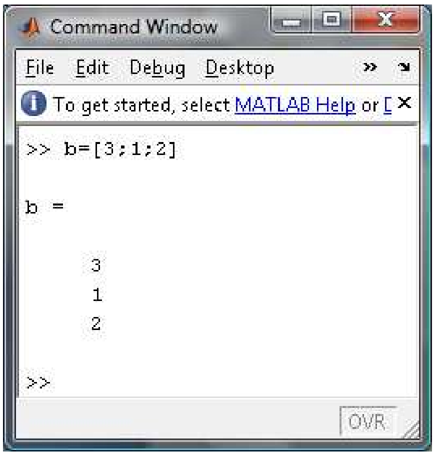


Figura 13.17

Ejercicios:

A continuación resolveremos los siguientes sistemas de ecuaciones:

1)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$$

- Ingresamos la matriz correspondiente a los coeficientes de las variables, asi:

a=[3 -2 1; 2 1 1; 1 3 -1]

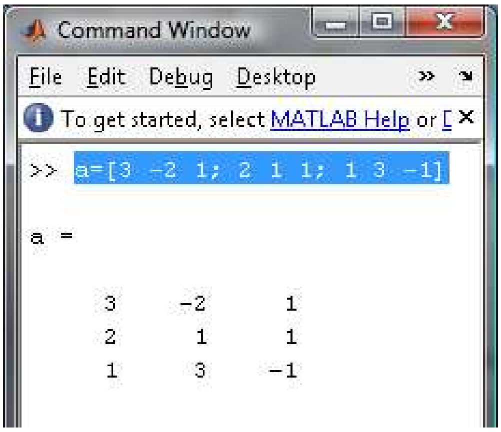


Figura 13.18

- Ingresamos la matriz de los valores constantes:

b = [-2; 1; 3]

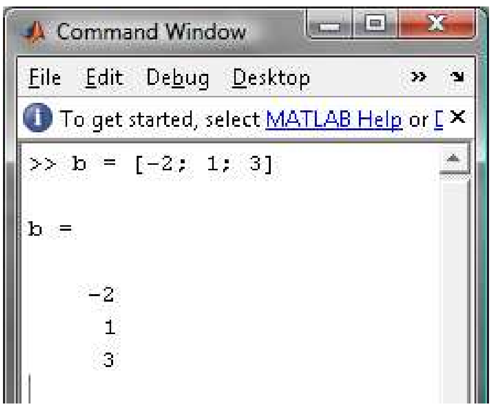


Figura 13.19

- Para obtener el resultado del sistema, haremos la siguiente operación:

a\b

Donde aquí estamos dividiendo la matriz de los coeficientes de las variables para la matriz de las constantes, es decir, dividimos la parte izquierda del signo ***igual*** para la parte derecha del signo, con la particularidad que usamos el símbolo operador **“\”**.

Obtendremos el siguiente resultado.

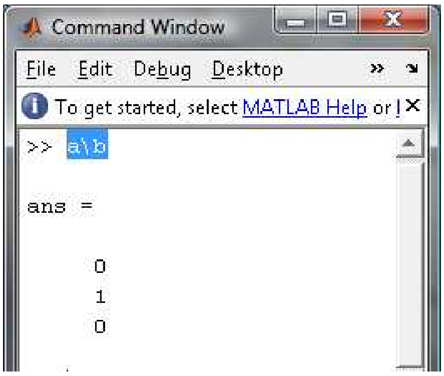


Figura 13.20

En este resultado, los valores: **0, 1** y **0** corresponden a las variables **x, y, z** respectivamente.

2)

- Ingresamos la matriz de los coeficientes de la siguiente manera:

a = [(1/4) -(3/2); (3/4) (1/2)]

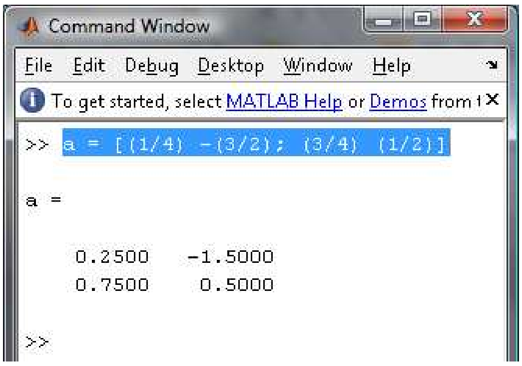


Figura 13.21

- De la misma manera, ingresamos la matriz de los valores constantes:

b = [-4; 8]

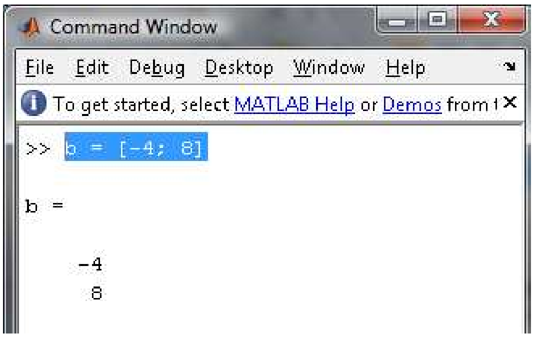


Figura 13.22

- Ahora resolvemos el sistema, tal como explicamos anteriormente:

a\b

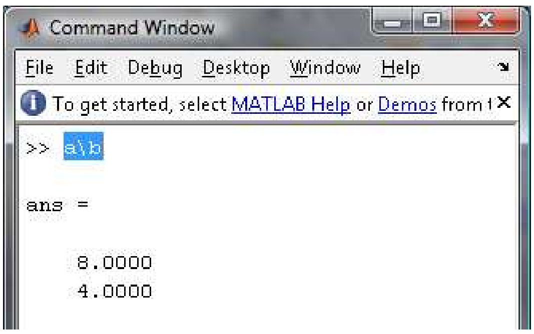


Figura 13.23

13.5 Ejercicios Propuestos

Los ejercicios son tomados del libro de "Matemáticas para Administración y Economía".

Unidad 3.5 Determine las intersecciones con el eje *x* y con el eje *y*. También pruebe la simetría con respecto al eje *x*, al eje *y*, y al origen. Después realice el bosquejo de las gráficas.

2. $y = x^2 - 4$

5. $9x^2 - 4y^2 = 36$

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$

13. $y = \frac{x^3}{x^2 + 5}$

15. $y = \frac{3}{x^3 + 8}$

19. $y = x^3 - 4x$

Unidad 4.2

15. **Ecuación de demanda.** Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de $18 cada una. Halle la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieren 30 unidades.

Unidad 4.3

29. **Ingreso.** La función de la demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2400 - 6q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (semanales). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

31. **Utilidad.** La utilidad diaria de la venta de árboles para el departamento de jardinería de un almacén está dada por $P(x) = -x^2 + 18x + 144$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga la gráfica de la función.

Unidad 4.5 Resuelva el sistema no lineal.

3. $\begin{cases} p^2 = 5 - q \\ p = q + 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13 \\ y = x^2 - 15 \end{cases}$

Unidad 4.6

6. Determine el punto de equilibrio si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo.

Oferta: $p = (q + 10)^2$

Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$

13. Y_{TR} representa el ingreso total en dólares y Y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas. Encuentre la cantidad de equilibrio.

$$Y_{TR} = 100 - \frac{1000}{q+5}$$

$$Y_{TC} = q + 35$$

PRACTICA 14

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

14.1 Funciones Exponenciales:

Existe una función que desempeña una labor importante no sólo en matemáticas, sino también en finanzas, economía y otras áreas de estudio. Incluye una constante elevada a una variable, como: $f(x) = 2^x$. A tales funciones las llamamos funciones exponenciales.

14.1.1 Gráficas de funciones exponenciales:

Graficar las funciones exponenciales:

$f(x) = 2^x$,y $f(x) = 5^x$

Para graficar dichas funciones procederemos de la siguiente manera:

1. $f(x) = 2^x$

- Ingresamos un rango de valores prudente para la variable **"x".**

x = -3:0.1:3

- Calculamos los valores correspondientes de la función, para este caso, a la función ***f(x)*** la igualaremos a "***y***", teniendo:

y = 2.^x

- Llamaremos a la función que grafica los valores obtenidos, activando también la cuadrícula o grilla:

plot(x,y)

grid on

Luego de esto, obtendremos el siguiente resultado:

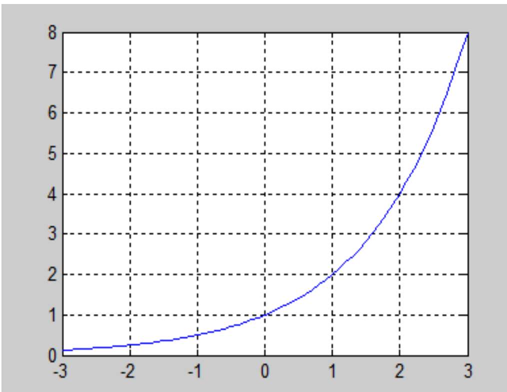


Figura 14.1

2. f(x) = 5^{x}

De la misma manera:

- Ingresamos un rango de valores prudente para la variable **"x".**

x = -2:0.1:2

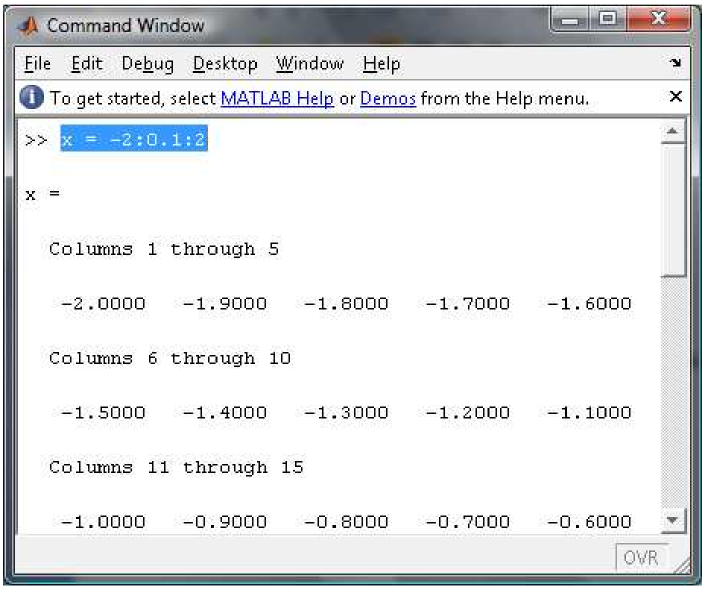


Figura 14.2

- Calculamos los valores correspondientes de la función, para este caso, a la función ***f(x)*** la igualaremos a "***y***", teniendo:

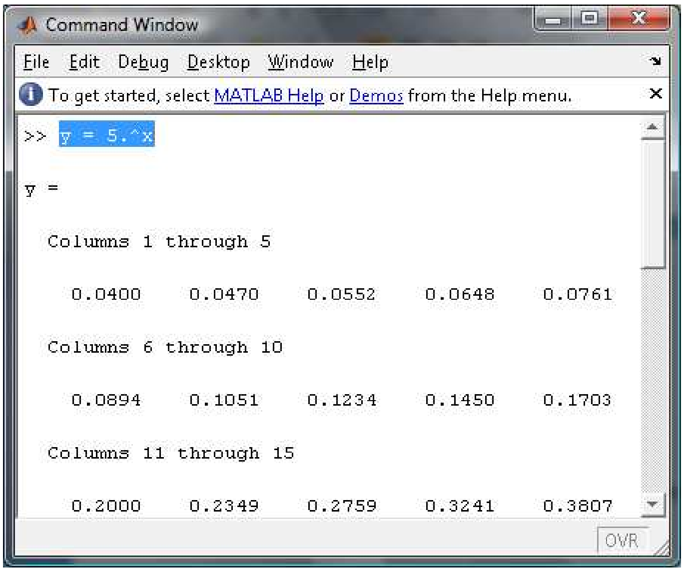


Figura 14.3

- Llamamos a la función para graficar los resultados obtenidos, activando al mismo tiempo la cuadrícula.

plot(x,y)

grid on

Obtendremos el siguiente resultado.

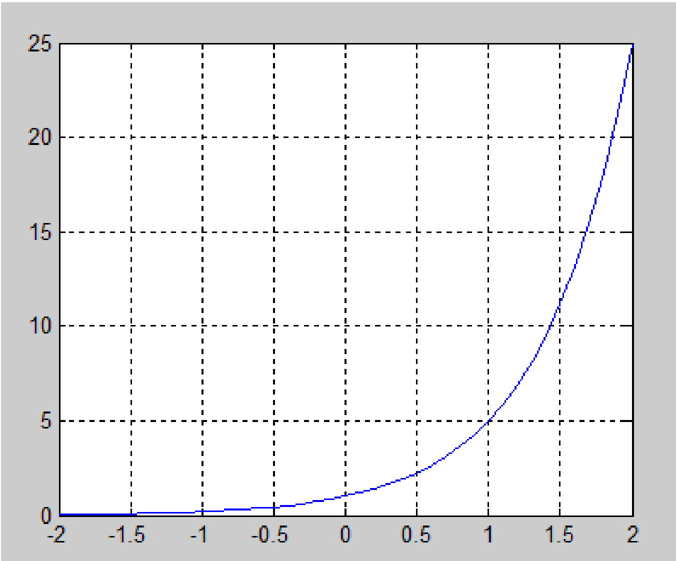


Figura 14.4

Estas dos gráficas que hemos realizado, corresponden a las de la página 183 del libro.

14.2 Función exponencial con base *e*

La función exponencial con base *e* se conoce como **función exponencial natural**, y siempre tiene el valor igual a:

***e* = 2.71828……**

Para representar en Matlab una función exponencial con base ***e***, utilizamos la función "exp"; de la siguiente manera:

exp(x)

Donde ***x*** puede ser un valor o un rango de valores; por ejemplo, si queremos obtener el exponencial de un rango de valores ingresado, lo haremos de la siguiente manera.

x = -2:0.1:2

exp(x)

Tendremos el siguiente resultado:

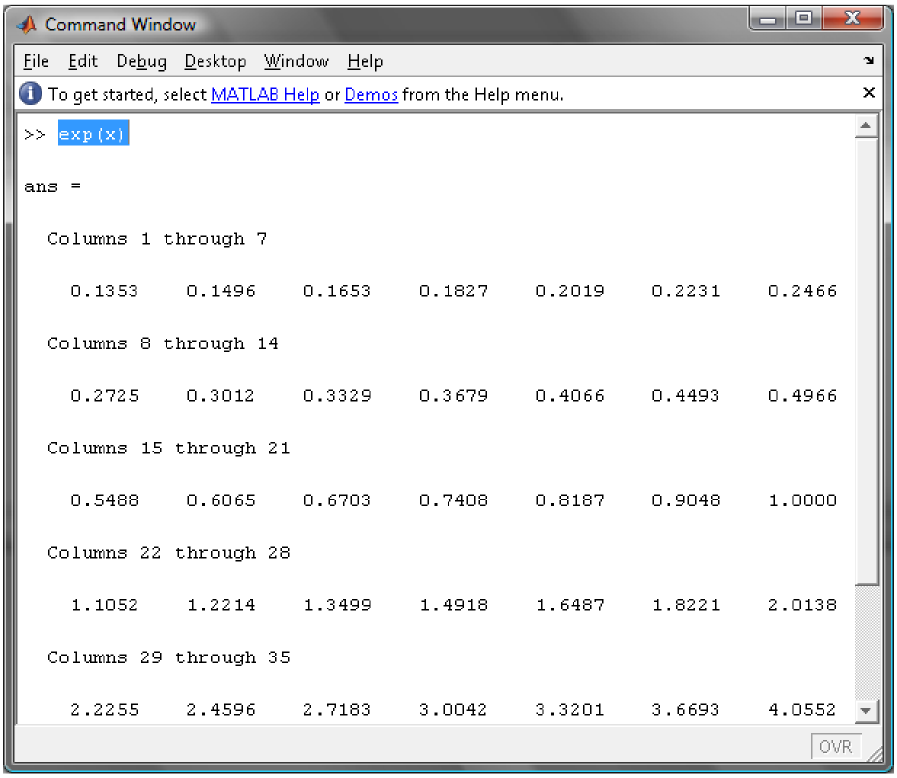


Figura 14.5

Es así, que para obtener el valor constante de la base ***e*** (2.71828), tenemos que extraer la función exp del valor 1; de la siguiente manera:

exp(1)

Lo cual nos dará como resultado el siguiente valor:

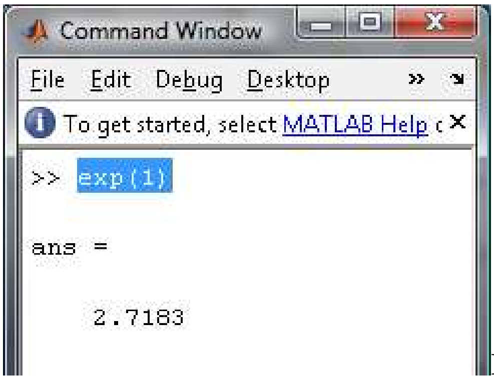


Figura 14.6

En cambio, si queremos despejar una incógnita de una función logarítmica, usamos como en las prácticas anteriores la función solve, por ejemplo:

Para graficar una función exponencial con base ***e***, lo haremos de la siguiente manera:

Graficar la siguiente función exponencial:

$$y = e^{-x}$$

- Ingresamos un rango de valores a una variable:

x = -2:0.1:2

- Calculamos la función correspondiente:

y = exp(-x)

- Llamamos a la función para realizar la gráfica respectiva, activando al mismo tiempo la cuadrícula:

plot(x,y)

grid on

Luego de todos los procedimientos, tendremos el siguiente resultado.

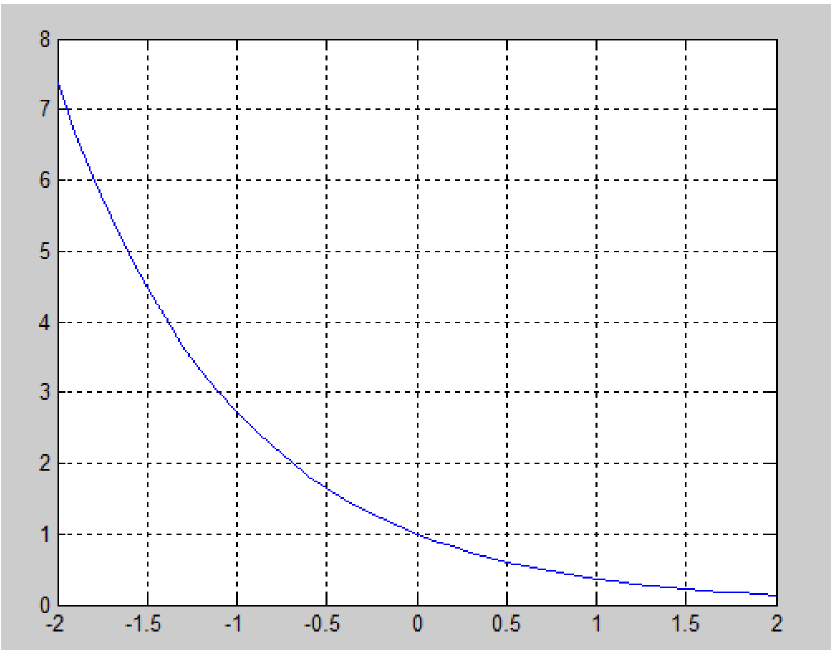


Figura 14.7

Ejercicios:

Graficar cada función:

1. $y = f(x) = 2(1/4)^x$

- Para graficar la función citada, ingresamos las siguientes sentencias en el command window.

x = -2:0.1:2

y = 2*(1/4).^x

plot(x,y)

grid on

Para obtener el siguiente resultado:

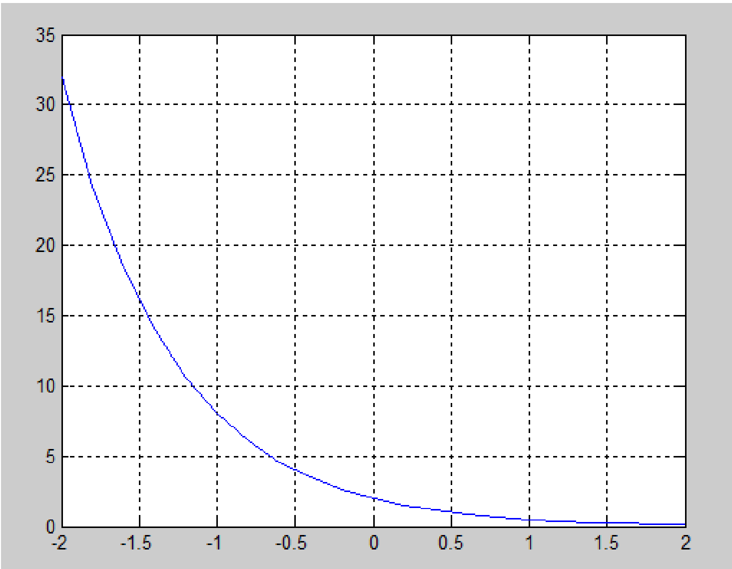


Figura 14.8

2. Graficar las siguientes funciones:

a. $y = -e^x$

b. $y = 2e^x$

- Ingresaremos las siguientes sentencias en el command window:

x = -2:0.1:2

y = -exp(x)

plot(x,y)

grid on

Teniendo el siguiente resultado para la función **a:**

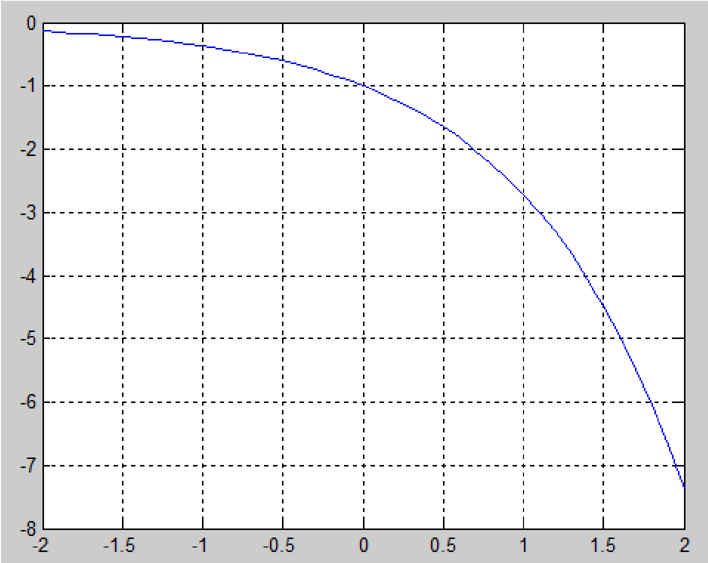


Figura 14.9

De la misma manera, para la función **b** ingresaremos las siguientes sentencias:

```
x = -2:0.1:2
y = 2*exp(x)
plot(x,y)
grid on
```

Lo cual nos mostrará lo siguiente:

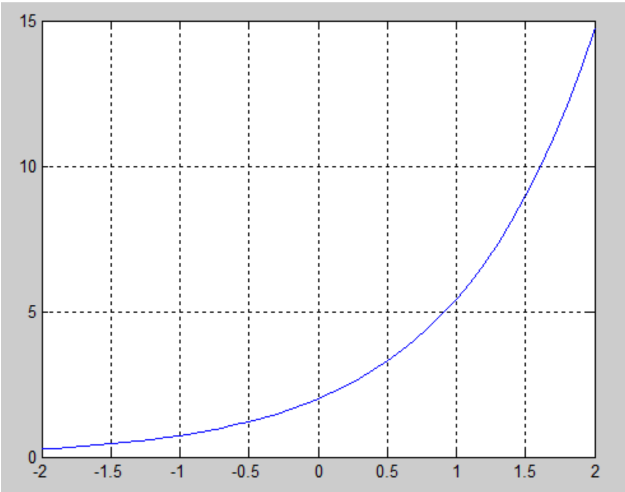


Figura 14.10

14.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS:

Conversión de forma logarítmica a forma exponencial.

Forma Logarítmica		Forma exponencial
$\log_{10} 1000=3$	significa	$10^3 = 1000$
$\log_{64} 8 = ½$	significa	$64^{½} = 8$
$\log_2 1/16 = -4$	significa	$2^{-4} = 1/16$

Ejercicios:

Ecuación de Demanda:

La ecuación de demanda de un producto $p = 12^{1-0.1q}$. Utilizar logaritmos comunes para expresar q en términos de p.

Si revisamos en el texto, obtenemos la siguiente ecuación correspondiente al ejercicio:

$$q = 10(1 - \frac{\log p}{\log 12})$$

Y para obtener la gráfica de dicha ecuación, debemos seguir el siguiente procedimiento:

- Asignamos un rango de valores a la variable ***p***.

p = 0:0.5:8

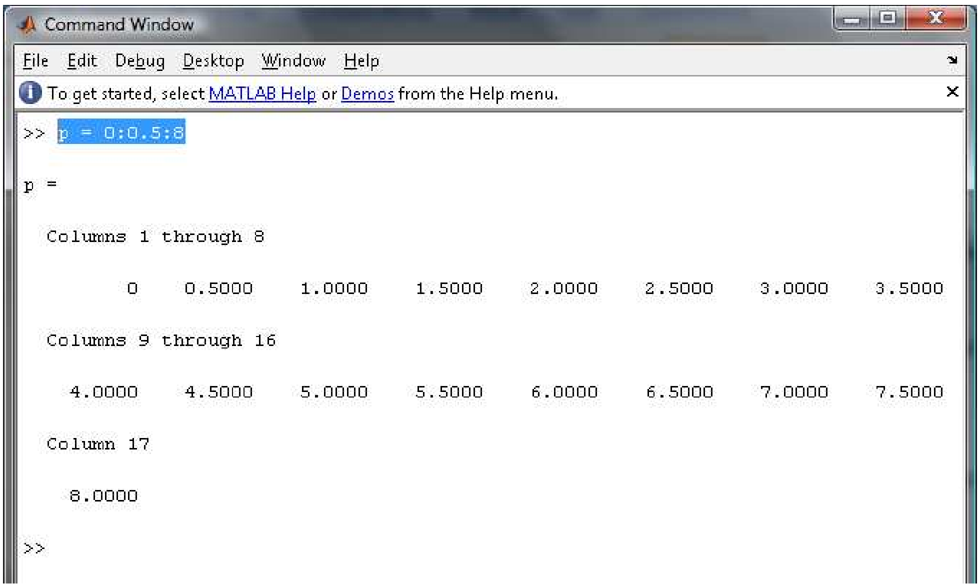


Figura 14.11

- Calculamos el valor de la ecuación antes ya citada, de la siguiente manera.

q = 10*(1-(log(p))/(log(12)))

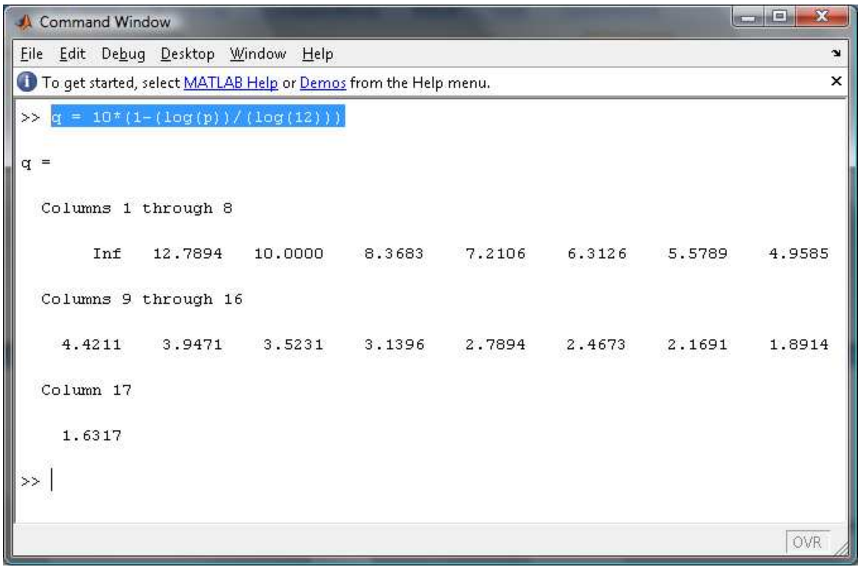


Figura 14.12

- Llamamos a la función para graficar los valores obtenidos:

plot(p,q)

grid on

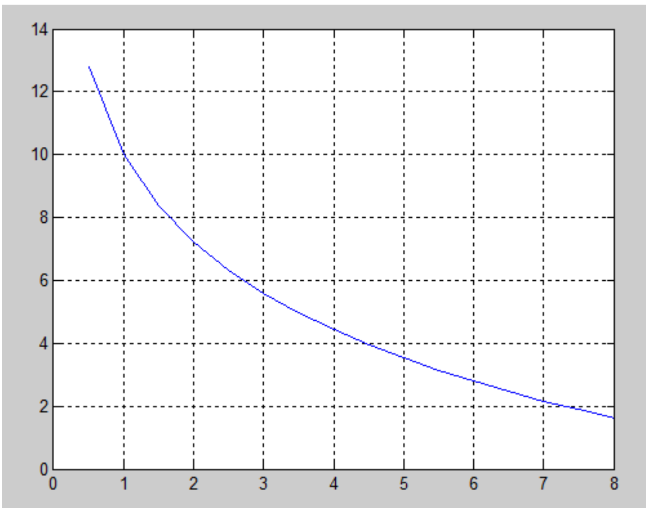


Figura 14.13

A éste ejercicio, como a todos los presentados, se lo puede resolver también de la siguiente manera.

- Declaramos las variables que usaremos.

syms p q

- Calculamos el valor correspondiente a la ecuación.

q = 10*(1-(log(p))/(log(12)))

- Graficamos la función usando el comanda “ezplot()”.

ezplot(q)

grid on

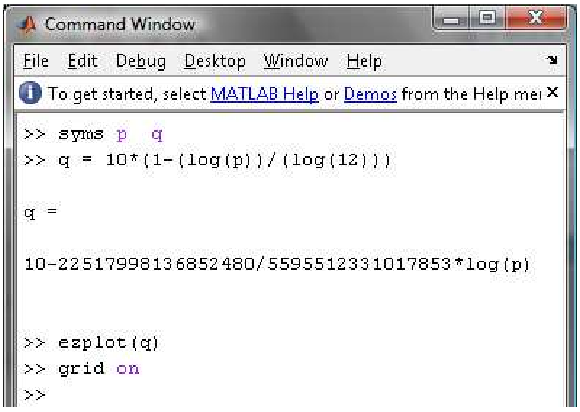


Figura 14.14

Obteniendo la siguiente gráfica.

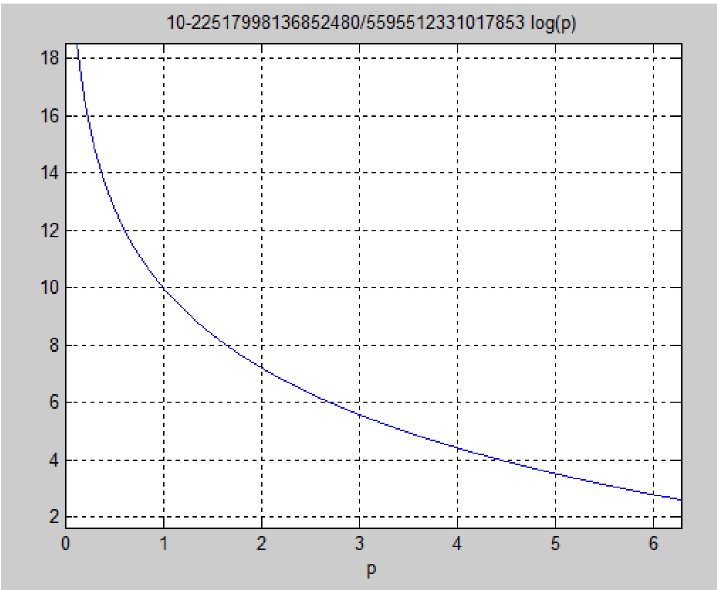


Figura 14.15

14.4 Ejercicios Propuestos

Los siguientes ejemplos son del libro "Matemáticas para Administración y Economía".

Unidad 5.2 Encuentre el valor de x

36. $\log_x 100 = 2$

39. $\log_x \frac{1}{6} = -1$

45. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$

47. $\log_x(2x + 8) = 2$

48. $\log_x(30 - 4x - x^2) = 2$

Unidad 5.3 Encuentre el valor de x

45. $e^{\ln(2x)} = 5$

47. $10^{\log x^2} = 4$

48. $e^{3\ln(x)} = 8$

Unidad 5.4 Encuentre el valor de x

5. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 6)$

9. $16^{3x} = 2$

21. $5^{2x-5} = 9$

24. $5(3^x - 6) = 10$

PRACTICA 15

ALGEBRA DE MATRICES

Las matrices y su álgebra respectiva tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.

Una gran aplicación, son las gráficas con computador, en un sistema de coordenadas, un objeto puede representarse con una matriz que contenga las coordenadas de cada vértice o esquina, como nos muestra en la figura:

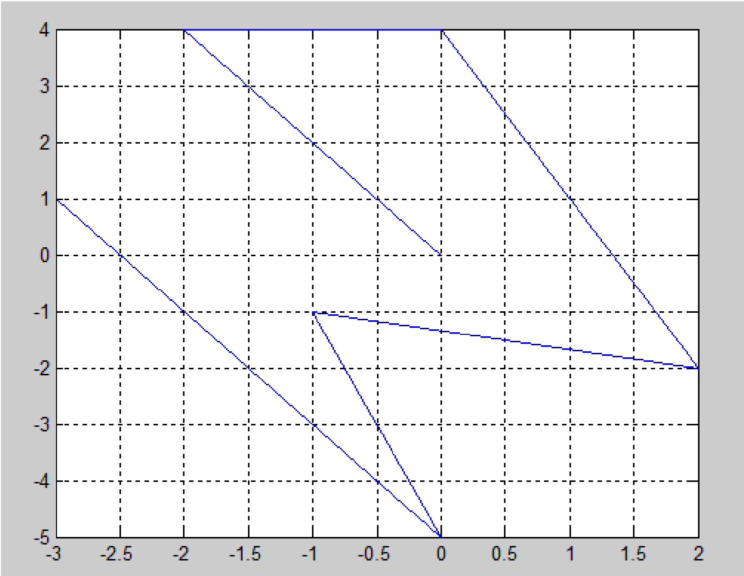


Figura 15.1

15.1 Ingreso de Matrices en Matlab

Matlab nos ofrece una tremenda facilidad en el tratamiento de matrices; entonces, si queremos ingresar por ejemplo la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

En el command window debemos ingresar la siguiente sentencia:

- **[1; -2; 15; 9; 16]**

Lo cual nos mostrará el siguiente resultado.

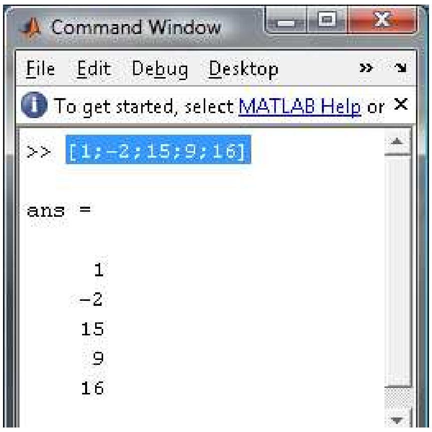


Figura 15.2

Si observamos, el separador de filas siempre será el signo **“;”**, ya que no es lo mismo si ingresamos la siguiente sentencia:

- **[1 -2 15 9 16]**

Teniendo una matriz de 1x5 y no una de 5x1 que es lo que planteamos al principio

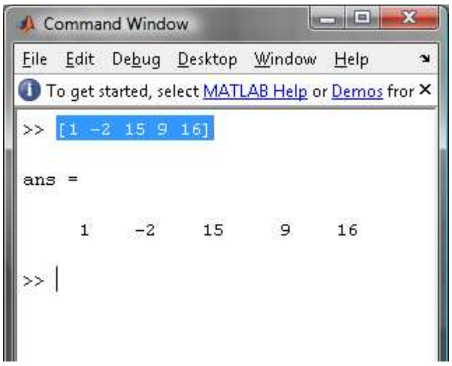


Figura 15.3

Nota: Notemos que el identificador de las matrices en Matlab siempre serán los corchetes **“[ ]”**.

De la misma manera, si deseamos ingresar la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ingresaremos en el command window de Matlab la siguiente sentencia. Aquí observaremos la separación de las filas y de las columnas.

- [2 3 4 5; 3 4 5 6; 4 5 6 7]

Y obtendremos el siguiente resultado:

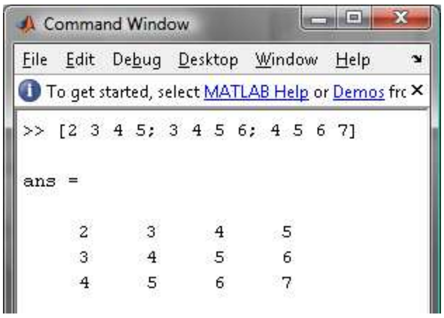


Figura 15.4

Aquí podemos observar que la separación de las filas es el signo **“;”** y la separación de los elementos es el ***espacio.***

15.2 Transpuesta de una Matriz:

Para obtener la transpuesta de una matriz, primero debemos asignar a una matriz dentro de una variable, de la siguiente forma:

- a = [2 3 4 5; 3 4 5 6; 4 5 6 7]

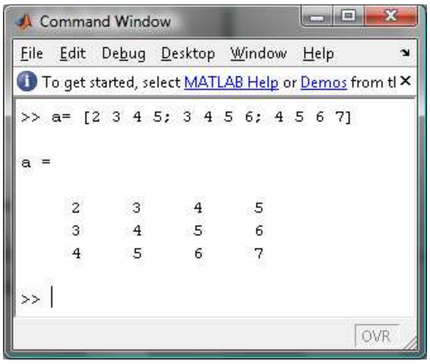


Figura 15.5

Y la transpuesta de esta variable se la obtiene de la siguiente manera:

- a'

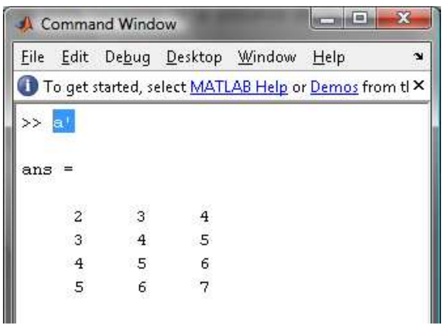


Figura 15.6

Es decir que una matriz a, su transpuesta a^t, en Matlab equivale con ***a'*.**

15.3 Inversa de una Matriz

Para obtener la inversa de una matriz dada, por ejemplo la matriz:

- a = [1 2;3 7]

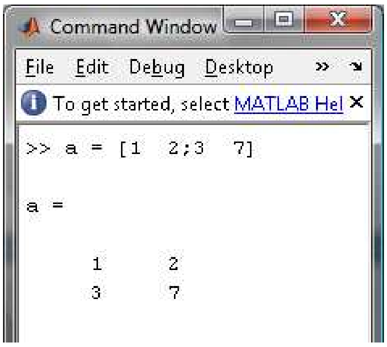


Figura 15.7

Nos bastará con ingresar lo siguiente:

- a^-1

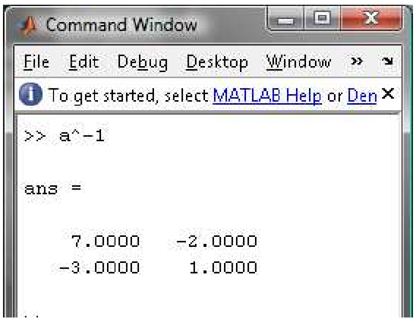


Figura 15.8

Si deseamos que la variable ***a***, que en nuestro caso es la matriz, tenga el valor de la inversa, tendremos que hacer lo siguiente.

- a = a^-1

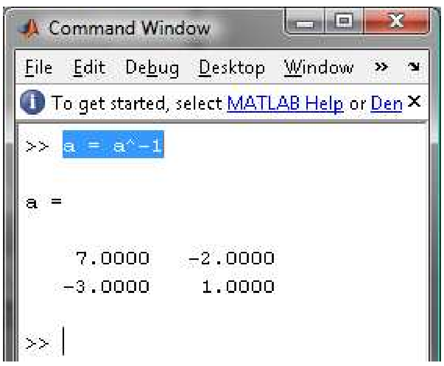


Figura 15.9

Con esto sustituiremos el valor de la matriz o variable ***a*****,** por lo que ahora ingresamos.

15.4 OPERACIONES DE MATRICES

15.4.1 Suma de Matrices:

Para realizar esta operación, debemos en primer lugar, ingresar las dos matrices dentro de dos variables, de la siguiente manera:

- a = [3 0 -2; 2 -1 4]
- b = [5 3 6; 1 2 -5]

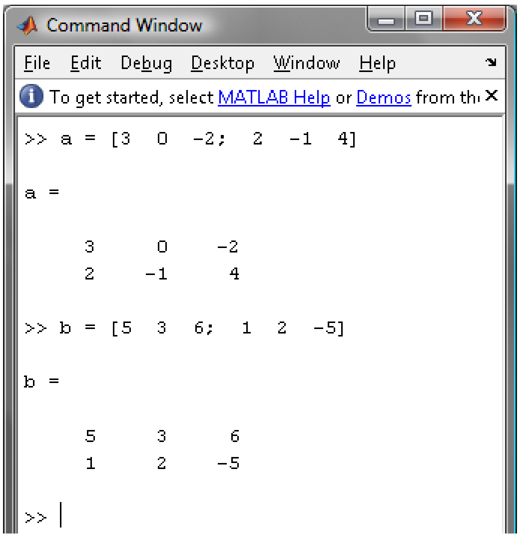


Figura 15.10

Y para sumar las matrices, únicamente bastará con ingresar en una nueva variable la suma de las matrices ingresadas, de la siguiente manera:

- c = a + b

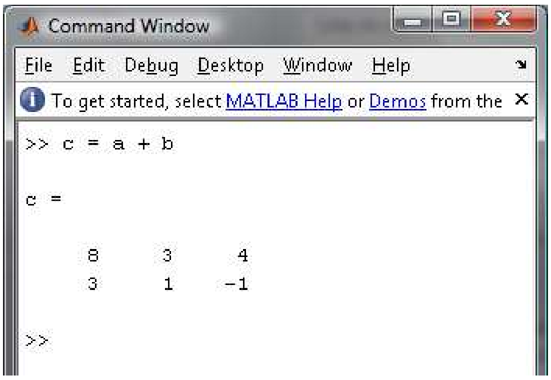


Figura 15.11

Por ejemplo si queremos realizar la suma de las siguientes matrices:

a=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ + b=$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Lo haremos de la siguiente manera:

Ingresaremos en el command window las siguientes sentencias:

- a = [1 2; 3 4; 5 6]
- b = [7 -2; -6 4; 3 0]
- c = a + b

Obteniendo el siguiente resultado:

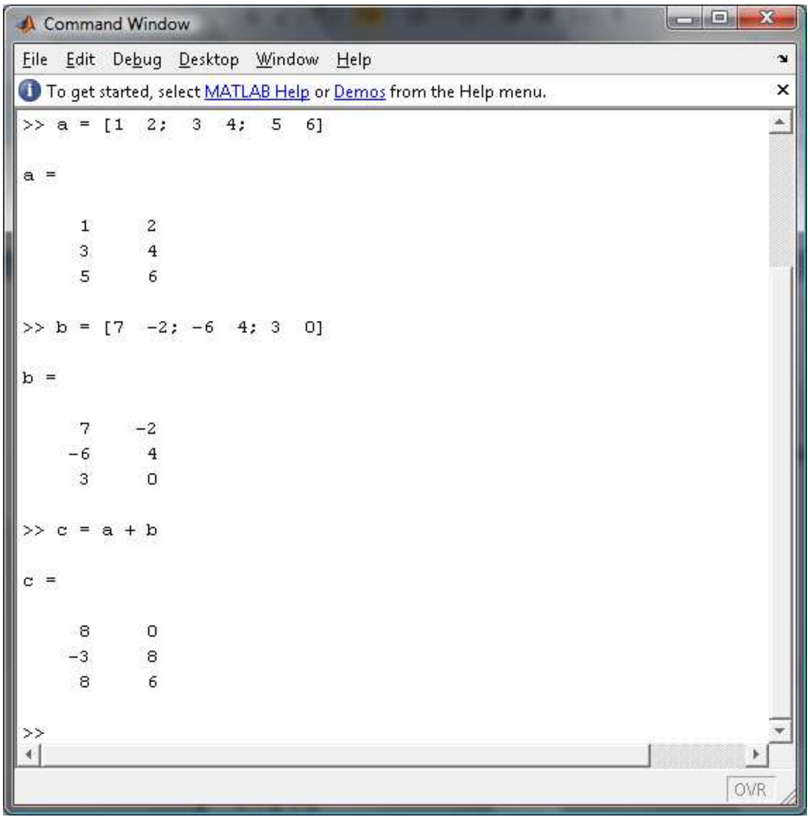


Figura 15.12

Observación: Podemos realizar la suma de varias matrices, es decir, en este mismo ejemplo podemos sumar: **a + b + c**, con la restricción que solo podemos hacer sumas de matrices del mismo tamaño.

15.4.2 Multiplicación por un escalar:

Para multiplicar una matriz, por un escalar o un *número real*, seguiremos un procedimiento muy similar al de la suma de matrices.

Es decir que primero debemos ingresar una matriz:

- a = [1 2; 4 -2]

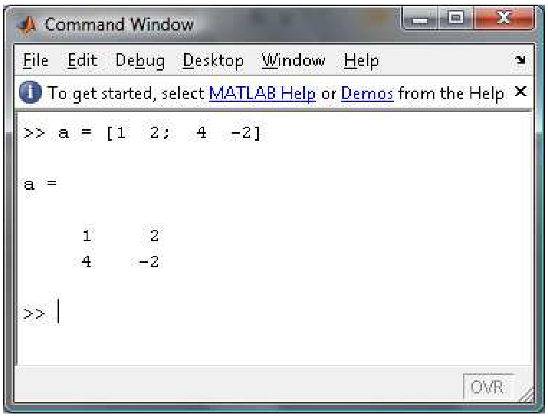


Figura 15.13

Luego lo multiplicaremos por el escalar que deseamos:

- 5 * a

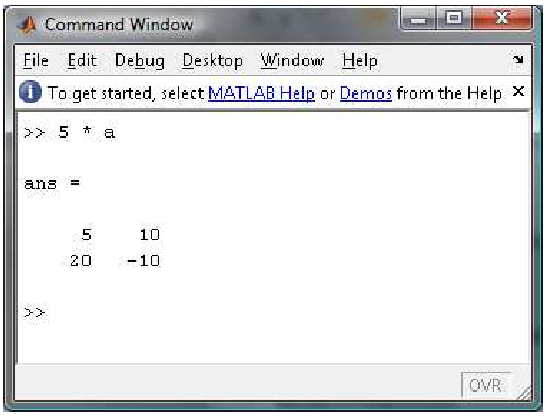


Figura 15.14

15.4.3 Sustracción de Matrices:

Al igual que en la suma, la resta de matrices, considerando que ambas deben ser de la misma dimensión, se la hace solamente restando las variables que corresponden a las matrices; así:

Primero ingresamos dos matrices que tengan las mismas dimensiones.

- a = [2 6; -4 1; 3 2]
- b = [6 -2; 4 1; 0 3]

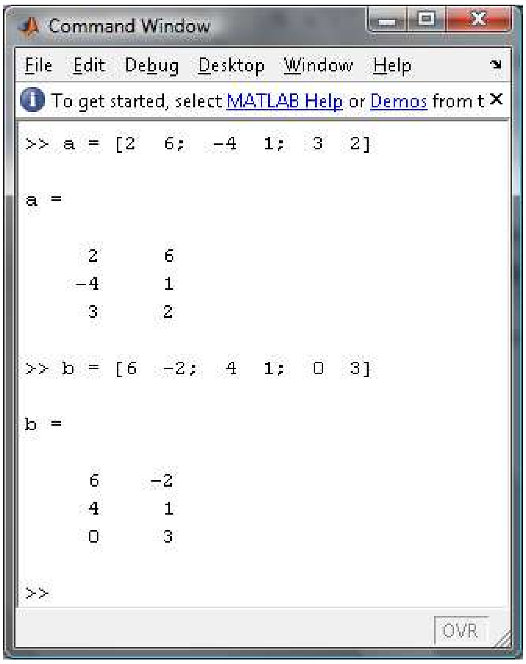


Figura 15.15

Ahora únicamente nos corresponde realizar una resta de las dos matrices (a y b), incluyendo el resultado en una matriz nueva; de la siguiente manera:

- c = a – b

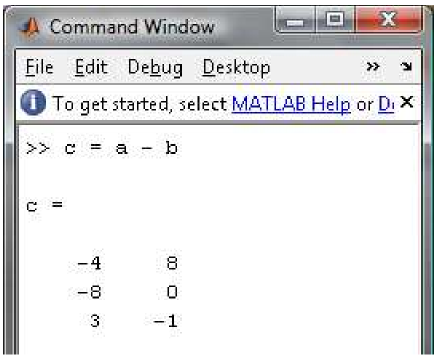


Figura 15.16

15.4.4 Multiplicación de Matrices:

Cuando vayamos a calcular una multiplicación de dos matrices (a y b), debemos tener cuidado el momento de ingresarlas, ya que el numero de columnas de la matriz **a** debe ser igual al número de filas de la matriz **b** y si no se las ingresa de la manera correcta, el lenguaje no podrá realizar la operación.

Es por eso que para el ejemplo tomaremos las siguientes matrices:

$$a=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso, si tenemos una matriz **a**, de tres columnas, y una matriz **b** de tres filas, el número de columnas de la matriz **b** no será importante, lo mismo pasará con el número de filas de la matriz **a**.

Este ejercicio lo obtendremos de la siguiente forma:

Ingresamos en el command window las dos matrices propuestas: **(a y b)**.

- a = [2 1 -6; 1 -3 2]
- b = [1 0 -3; 0 4 2; -2 1 1]

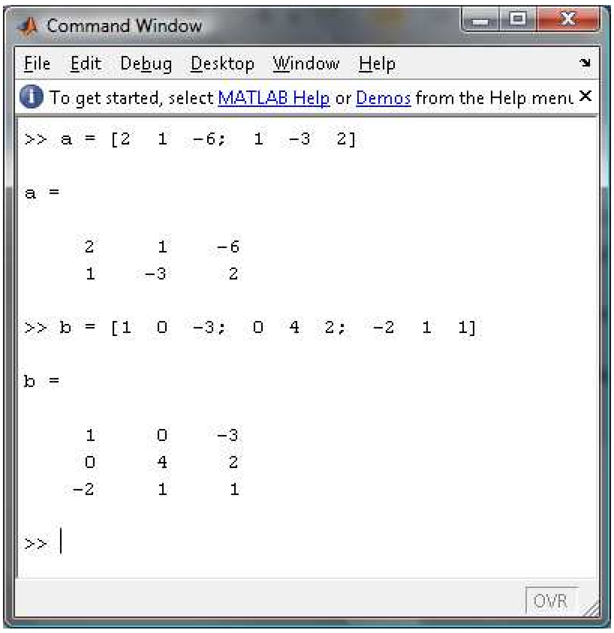


Figura 15.17

Luego, solamente realizaremos la multiplicación respectiva, incluyendo el resultado en una nueva matriz:

- c = a * b

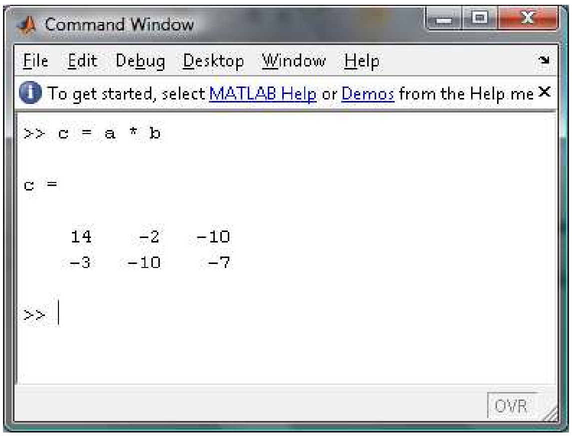


Figura 15.18

Ejercicios:

Calcular ab y ba con las siguientes matrices:

a=$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y b=$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Lo realizaremos insertando las siguientes sentencias:

- a = [2 -1; 3 1]
- b = [-2 1; 1 4]
- c = a * b
- d = b * a

Obtendremos el siguiente resultado, donde podremos ver que los dos productos son completamente diferentes.

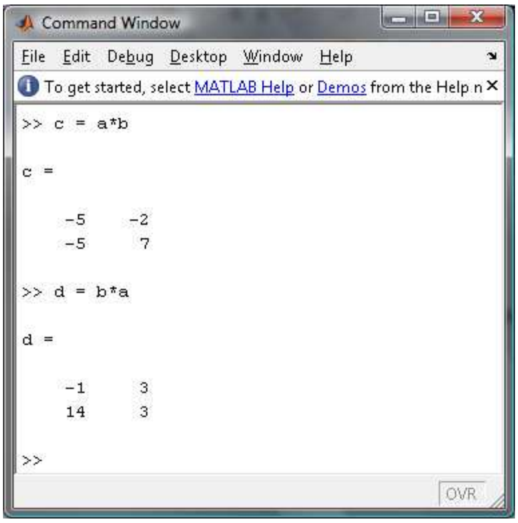


Figura 15.19

Si queremos resolver el sistema de ecuaciones:

Lo haremos por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes; de la siguiente manera:

Aquí tendremos dos matrices diferentes, la de los coeficientes y la de los valores constantes:

a = y b =

La solución está dada por:

Es decir que multiplicaremos la matriz inversa de ***a***, por la matriz ***b***; de la siguiente manera:

Y para eso ingresaremos las siguientes sentencias en el lenguaje:

- a = [1 0 -2; 4 -2 1; 1 2 -10]
- b = [1; 2; -1]
- x = a^(-1) * b

Obtendremos el siguiente resultado

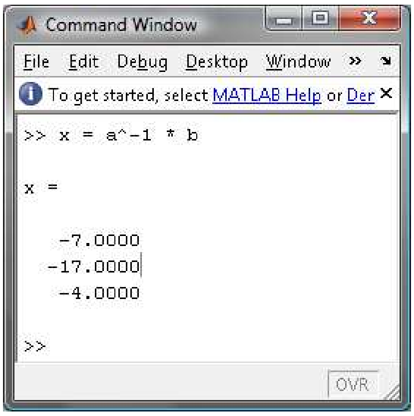


Figura 15.20

Como ya explicamos en la práctica de resolución de sistemas de ecuaciones, existe otra operación para resolver el sistema:

x = a \ b

Esta forma es equivalente a decir que $x = a^{-1}b$, siempre obtendremos el mismo resultado:

15.5 DETERMINANTES:

Para hallar el determinante de una matriz, usaremos únicamente la función ***"det()"***, donde dentro de los paréntesis colocaremos la matriz de la cual queremos obtener el determinante; de la siguiente manera:

det (a)

En este ejemplo, ***a*** equivale a la siguiente matriz:

$$a = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y luego de realizar el cálculo correspondiente, obtendremos que la respuesta será ***-3***, como nos muestra la siguiente figura:

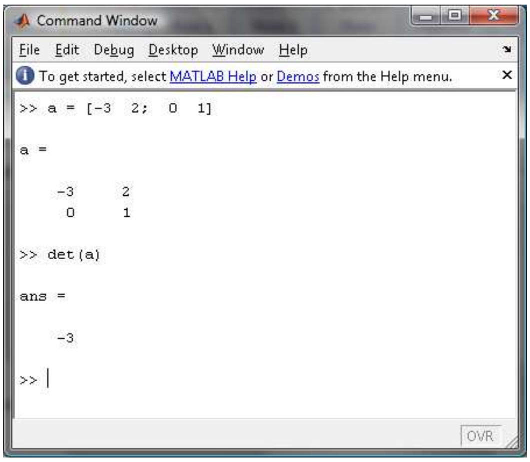


Figura 15.21

Ahora, si queremos obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Lo haremos ingresando las siguientes sentencias en el lenguaje:

- a = [2 -1 3; 3 0 -5; 2 1 1]
- det(a)

Obteniendo el siguiente resultado:

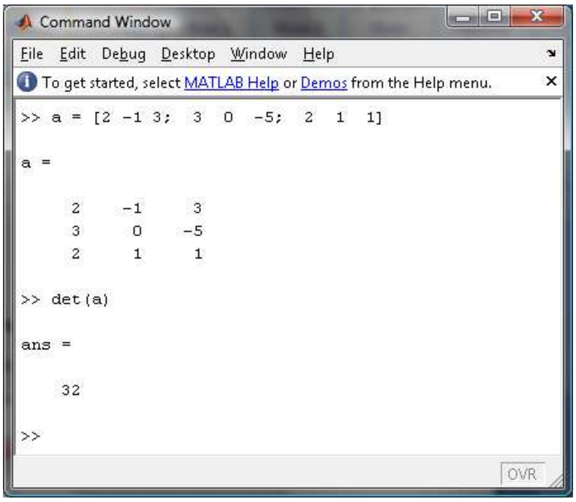


Figura 15.21

15.6 Ejercicios Propuestos

Los siguientes ejemplos son del libro “Matemáticas para Administración y Economía”.

Unidad 6.1 Encontrar la transpuesta de la matriz

18. $a = [2, 4, 6, 8]$

19. $b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Unidad 6.2 Realice las operaciones requeridas.

2. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calcule las matrices requeridas si

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $-(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$

15. $2\boldsymbol{O}$

17. $2(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B})$

19. $3(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) + 6$

20. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B})$

22. $3\boldsymbol{C} - 2\boldsymbol{B}$

23. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A} - 2(\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{C})$

Unidad 6.3 Realice las operaciones indicadas.

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolver el sistema por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes

Unidad 6.4

13. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x - 4y + 6z = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

Unidad 6.5

1. $\begin{cases} w - x - y + 4z = 5 \\ 2w - 3x - 4y + 9z = 13 \\ 2w + x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3w - x + 12y + 18z = -4 \\ w - 2x + 4y + 11z = -13 \\ w + x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$

Unidad 6.6

21. $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 4x + 3y = 37 \end{cases}$

Unidad 6.8

3. $\begin{cases} -2x = 4 - 3y \\ y = 6x - 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}z = 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0.6x - 0.7y = 0.33 \\ 2.1x - 0.9y = 0.69 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3r - t = 7 \\ 4r - s + 3t = 9 \\ 3s + 2t = 15 \end{cases}$

Resolver el sistema por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

Una compañía produce 3 tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones deben fabricar?

	Madera	**Plástico**	**Aluminio**
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

PRACTICA 16

LÍMITES Y DERIVADAS POR FORMULA

Los ejercicios han sido tomados del libro "Matemáticas para Administración y Economía".

16.1 LÍMITES

- **Practica 1.** Encontrar el límite del ejercicio 43 de la pág. 417.

a) Previamente se debe definir la variable x, utilizaremos la función *limit()* y se debe ingresar de la siguiente forma:

limit ('(x^2 + 1) / (sqrt(x^2 - 49))', x , -7)

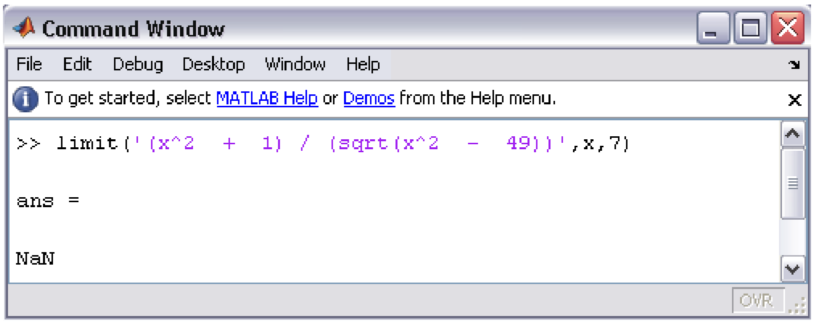


Figura 16.1

En la figura se obtiene el resultado "NaN", esto indica que no tiene límite.

Practica 2. Costo Promedio, ejercicio 59 de la pág. 418.

Si *c* es el costo total en dólares para producir *q* unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de *q* unidades está dada por .
Así si la ecuación de costo total es , entonces

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de , demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

b) Después de crear la variable q, ingresamos la siguiente cadena donde utilizamos la palabra “inf” para representar el infinito.

limit (‘5000 / q + 6’ , q , inf)

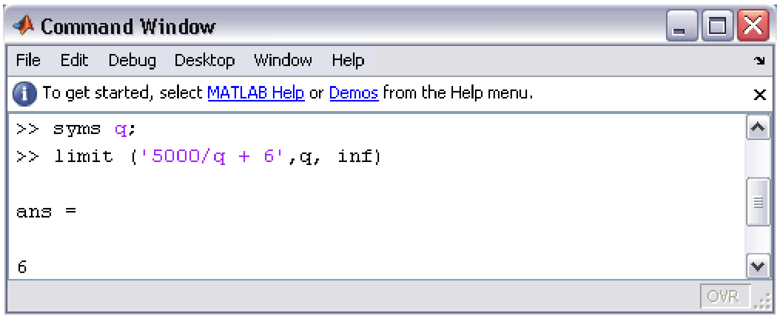


Figura 16.2

Tenemos un 6 como valor limite del costo promedio.

c) Ahora utilizamos la ecuación inicial .

c = 5000 / q + 6

d) Para obtener la gráfica utilizaremos la función ez*plot()*.

ezplot (c)

Si desea cuadriculada la gráfica, digite *grid on.*

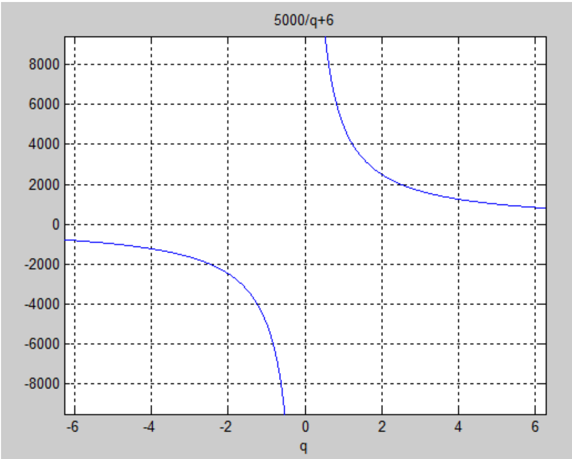


Figura 16.3

- **Practica 3.** Encontrar el límite del ejemplo 1 de la pág. 410.

a) Se debe ingresar de la siguiente manera, previamente creada la variable:

limit('2 / (x+1)' , x , -1 , 'right')

b) La siguiente figura tiene como respuesta INF.

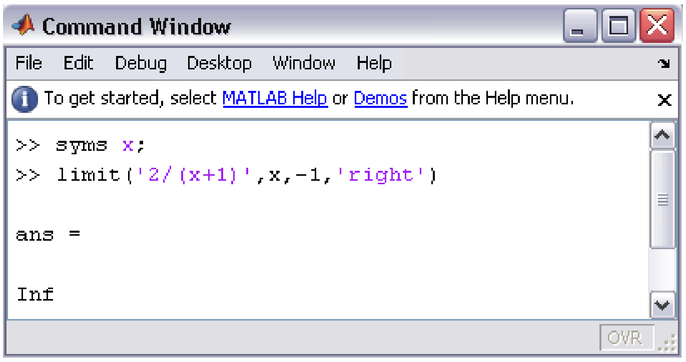


Figura 16.4

16.2 DERIVADAS

- **Practica 4.** Resolver la siguiente derivada y obtener la segunda derivada.

h) Matlab provee una función llamada *diff()*, y se debe ingresar de la siguiente forma.

a = diff(‘6*x^3 - 2*x^2 + 7*x - 8’)

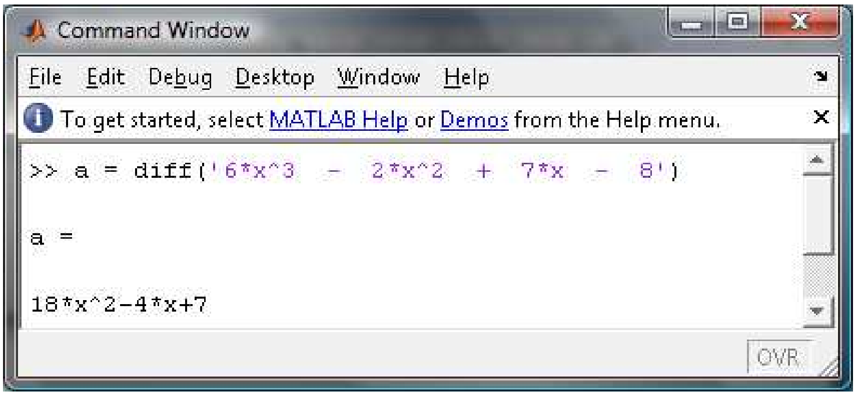


Figura 16.5

Para obtener la segunda derivada, se debe ingresar el 2 en la función de la siguiente manera.

diff(‘6*x^3 - 2*x^2 + 7*x - 8’ , 2)

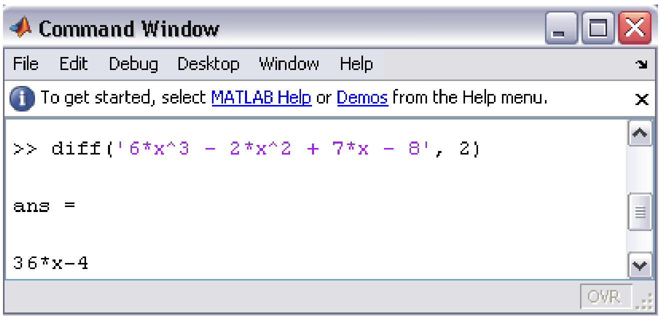


Figura 16.6

Esto equivale a decir que queremos extraer la derivada del resultado, es decir de **“a”.**

diff(a)

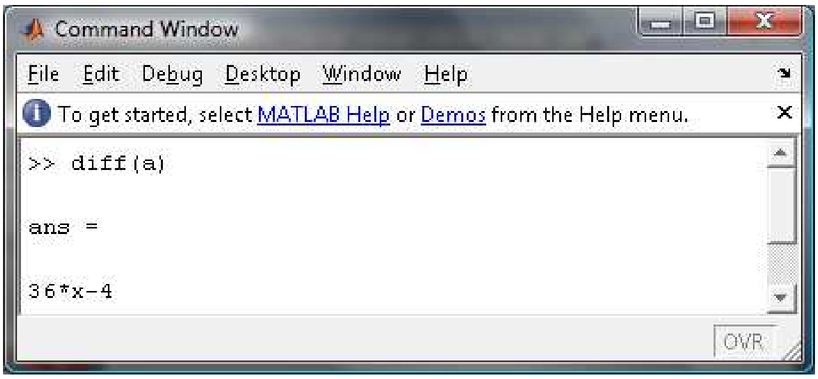


Figura 16.7

- **Practica 5.** Derivada implícita. Ejemplo 2 de la pág. 514.

a) Para este tipo de ejercicios, no existe una función específica. Utilizamos la misma función con un ligero cambio. No olvide de crear las variables.

diff('x^3 + 4*x*y^2 - 27 = y^4', x)

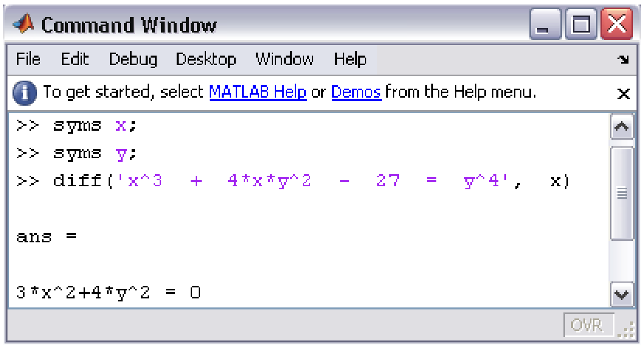


Figura 16.8

b) Ahora reemplazamos la variable *x* por la *y*.

diff('x^3 + 4*x*y^2 - 27 = y^4', y)

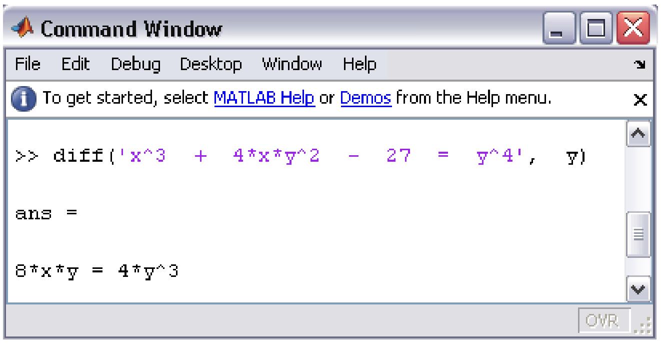


Figura 16.9

La respuesta se la interpreta de la siguiente manera: la respuesta de la figura 1.7 es el numerador y de la figura 1.8 es el denominador — ———.

16.3 Ejercicios Propuestos

Los siguientes ejemplos son del libro “Matemáticas para Administración y Economía”.

Unidad 9.1 Encuentre los limites

24. $\lim_{t\to 0} \frac{t^2+2t}{t^2-2t}$

29. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$

45. **Planta de Energía.** La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por $E = \frac{T_h - T_c}{T_h}$, donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a) $\lim_{T_c\to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c\to T_h} E$.

Unidad 9.2 Encuentre los limites. Si no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

20. $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{2x\sqrt{x}}$

41. $\lim_{x\to 1^+} \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]$

44. $\lim_{x\to -3^+} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

48. $\lim_{x\to 1/2} \frac{1}{2x-1}$

49. $\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{3}{x}\right)$

53. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x}$

54. $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2-1}\right]$

57. $g(x) = \begin{cases} x, si\ x < 0 \\ -x, si\ x > 0 \end{cases}$

$(a) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ $(b) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$ $(c) = \lim_{x\to 0} g(x)$

$(d) = \lim_{x\to\infty} g(x)$ $(e) = \lim_{x\to -\infty} g(x)$

61. **Población**. La población de cierta ciudad pequeña *t* años a partir de ahora se pronostica que será $N = 20000 + \frac{10000}{(t+2)^2}$. Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\lim_{x\to\infty} N$.

Unidad 10.2 Diferencie las funciones

64. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$

66. $f(x) = \sqrt{x}(5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$

67. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$

74. $f(x) = \frac{7x^3+x}{12\sqrt{x}}$

Unidad 10.5 Diferencie las funciones

44. $f(s) = \frac{17}{s(5s^2-10s+4)}$

45. $y = 3x - \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1}}{x-2}$

46. $y = 7 - 10x^2 + \frac{1 - \frac{7}{x^2+3}}{x+2}$

Unidad 10.6 Encuentre *y*'

44. $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2 - 3}{x^2+2}}$

51. $y = 8t + \frac{t-1}{t+4} - (\frac{8t-7}{4})^2$

53. $y = \frac{(2x+1)(3x-5)^2}{(x^2-7)^4}$

54. $y = \frac{\sqrt{x+2}(4x^2-1)^2}{9x-3}$

Unidad 11.1 Diferencie las funciones

29. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

33. $y = 5 \ln (x\sqrt{2x+1})$

34. $y = 6 \ln \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

44. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

Unidad 11.2 Diferencie las funciones

7. $f(r) = e^{3r^2+4r+4}$

26. $y = e^{-x} \ln x$

27. $y = e^{x \ln x}$

Unidad 11.3 Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por medio de diferenciación implícita

7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5$

13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0$

15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$

16. $x^3y^3 + x = 9$

20. $\ln(xy) + x = 4$

24. $y^2 = \ln(x + y)$

PRACTICA 17

MAXIMOS Y MINIMOS:

17.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

- **Practica 1.** Encontrar el límite del ejercicio 43 de la pág. 417.

a) Para realizar el bosquejo de la gráfica, primero debemos asignar valores para el eje *x*. Damos un intervalos de 0.01 para que en la gráfica nos dé respuesta con 2 decimales.

x = -4: 0.01 : 4

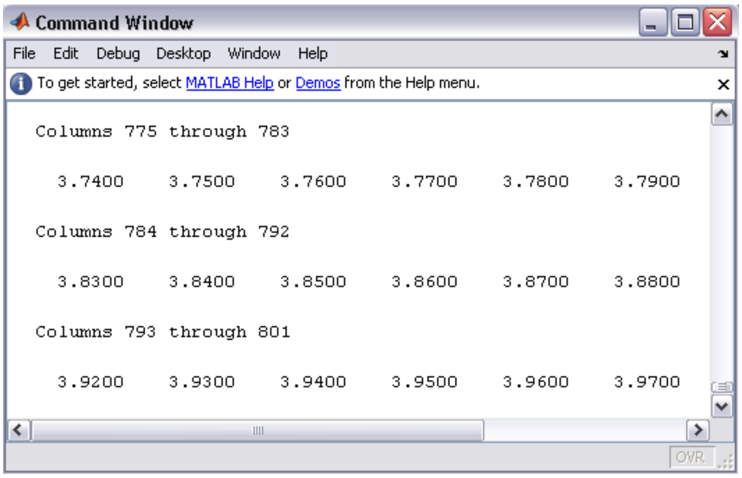


Figura 17.1

b) Ahora debemos ingresar la ecuación de la siguiente manera. Deben cambiar el operador de potenciación (^) por (.^), debido a que los valores están dentro de un vector.

y = (x.^3 + x.^2 - 5*x -5)

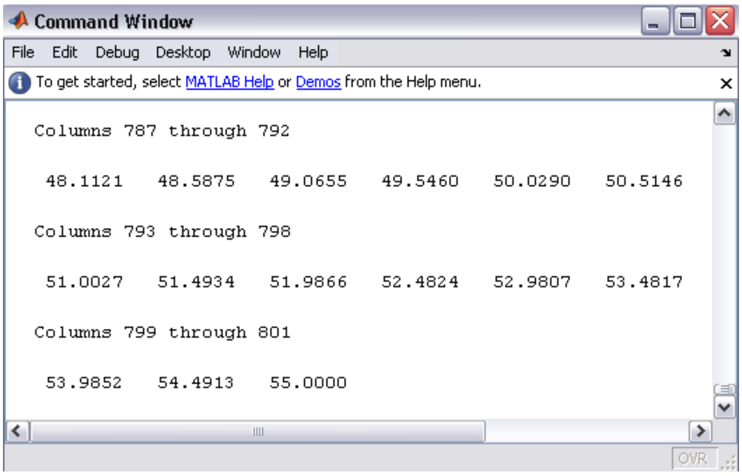


Figura 17.2

c) Realice la gráfica utilizando la función *plot()*.

plot(x,y)

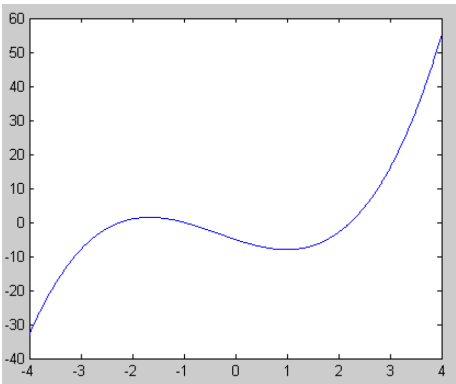


Figura 17.3

d) Como vemos en la gráfica, obtenemos un máximo y un mínimo respectivamente. Pulse  de la barra de botones, con el mouse de un clic en la parte más alta de la primera curva.

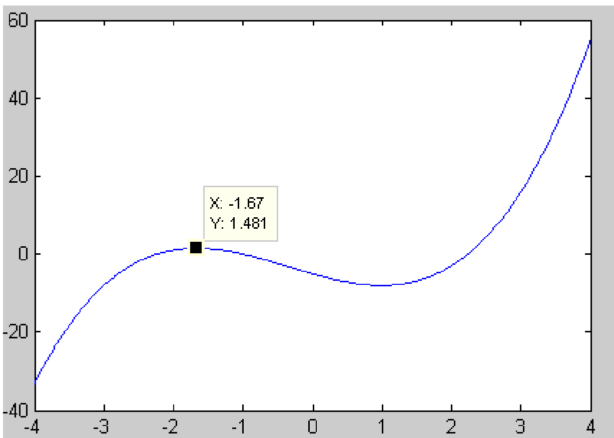


Figura 17.4

Para encontrar la parte más alta de la curva, se puede guiar con las coordenadas de *y*, para este ejemplo en *y* se tiene un valor de 1.481 que se repiten 3 veces, la respuesta es el segundo punto que es -1.67.

e) Realice el paso anterior para la otra curva y encuentre el valor.

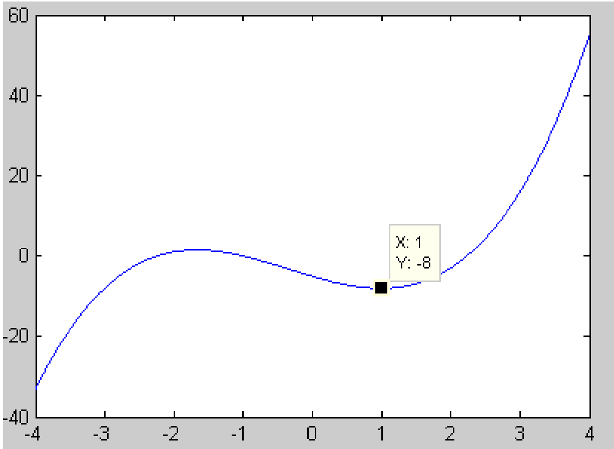


Figura 17.5

Los puntos críticos son: x = 1 y x = -1.67.

f) Para confirmar las respuestas anteriores, regrese a la ventana de comandos y realice la derivada y despejar la variable.

y = diff (‘x^3 + x^2 - 5*x -5’)

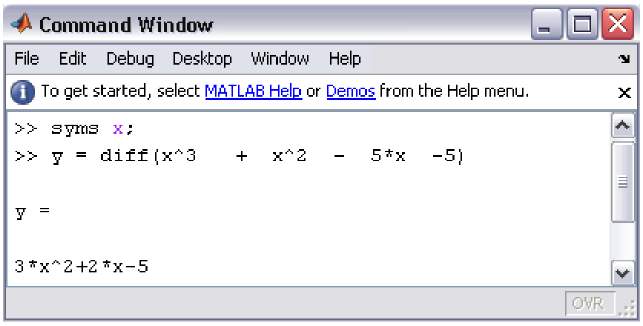


Figura 17.6

g) Para hallar el valor de *x*, utilizaremos la función *solve().* Se debe hacer referencia a *y* debido a que en el paso anterior la respuesta se le asigno a una variable.

solve (y)

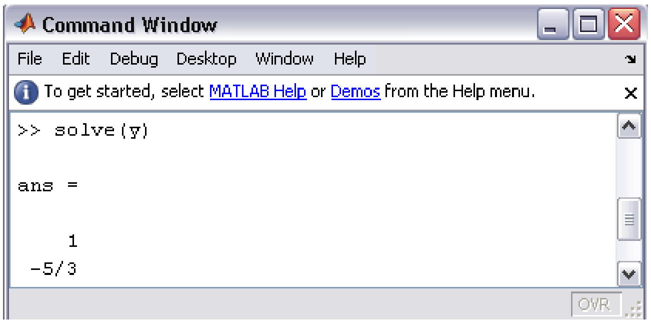


Figura 17.7

- **Practica 2.** Encontrar el límite del ejercicio 43 de la pág. 417.

a) Primero asignamos valores para el eje *x*.

x = -3: 0.01 : 3

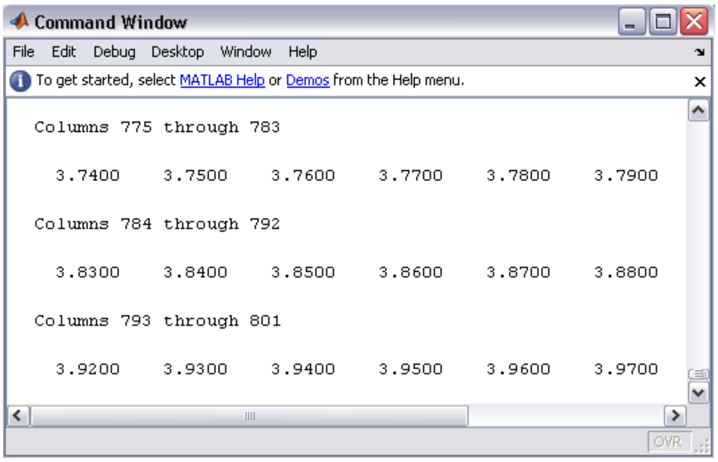


Figura17.8

b) Ingresamos la ecuación de la siguiente manera. Cambie el operador de potenciación (^) por (.^).

y = (x.^5 - 5* x.^3)

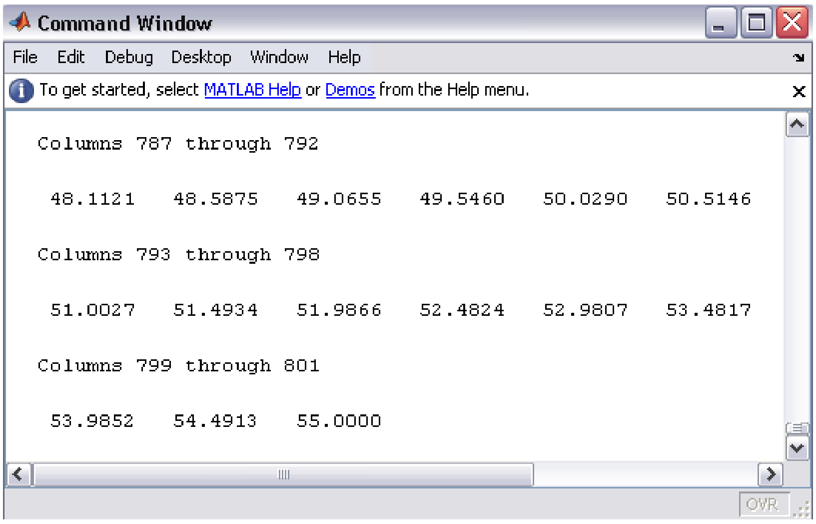


Figura 17.9

c) Realice el bosquejo de la gráfica mediante la función *plot()*, en caso de que la gráfica no se distinga del todo? Utilice las propiedades de Editor.

plot(x,y)

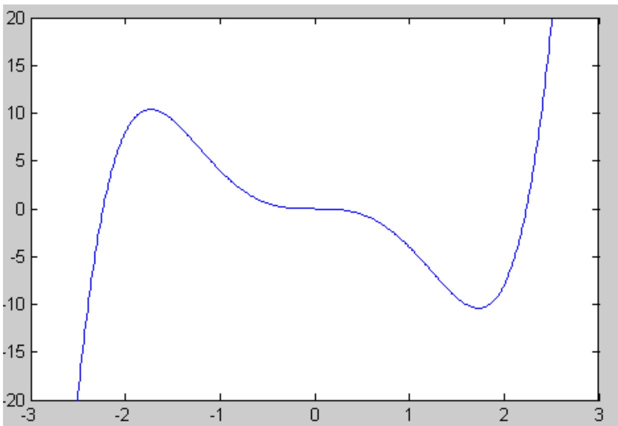


Figura 17.10

d) Se obtuvo un máximo, un mínimo y un punto de inflexión. Pulse  y con el mouse de un clic en la parte más alta de la primera curva.

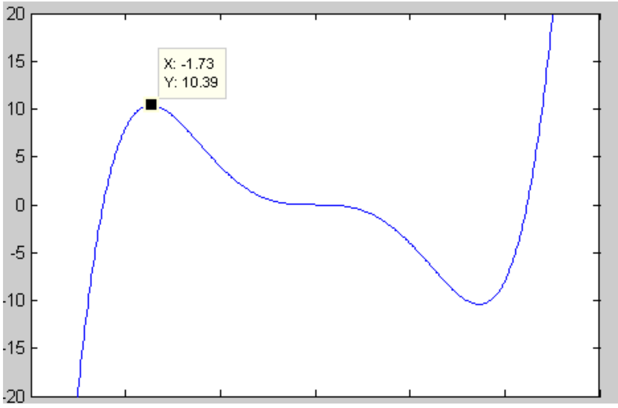


Figura 17.11

Guíese en las coordenadas de *y*, para este ejemplo, *y* tiene un valor de 10.39 que se repiten 3 veces, la respuesta es el segundo punto que es -1.73.

e) Encuentre los otros puntos para la otra curva y el punto de inflexión.

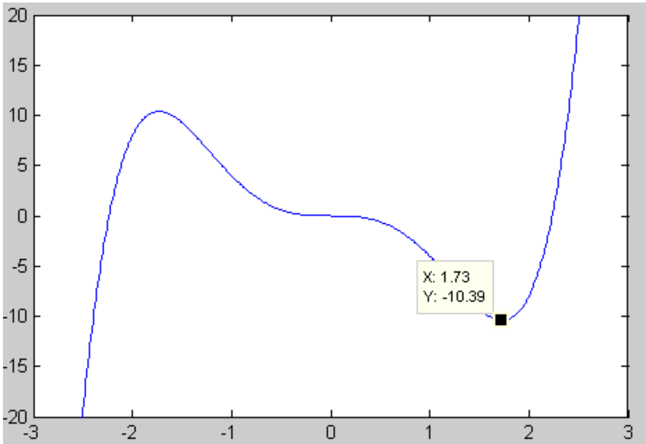


Figura 17.12

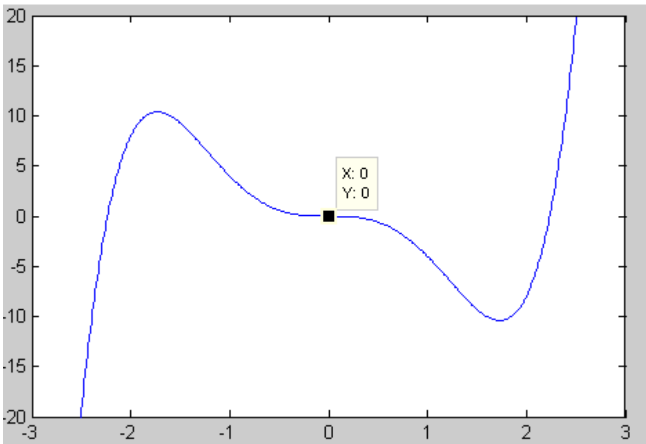


Figura 17.13

Los puntos críticos son: x = 0 y x = ±1.73.

f) Regrese a la ventana de comandos y realice la derivada.

y = diff (‘x^5 - 5*x^3’)

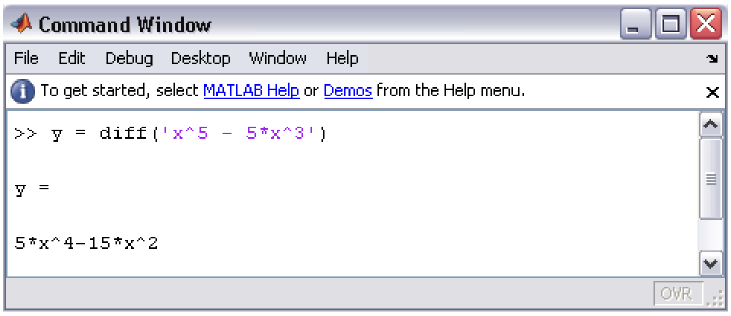


Figura 17.14

g) Utilizaremos la función *solve()* para encontrar el valor de *x*.

solve (y)

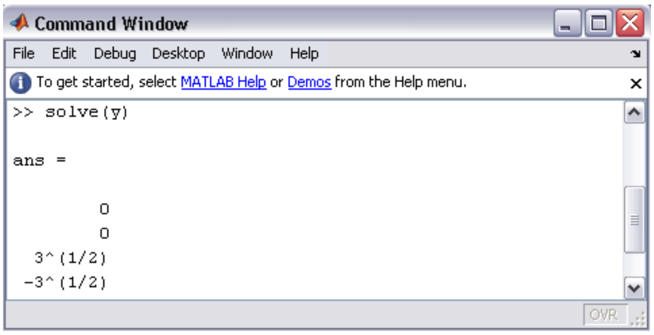


Figura 17.15

17.2 Ejercicios

Unidad 12.3 Para cada una de las siguientes funciones realizar el procedimiento completo, desarrollado en los ejemplos anteriores.

8. $y = 3x^2 - 6x + 5$

11. $y = 4x^3 - 21x^2 + 5x$

14. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x$

17. $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5$

20. $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 10x - 2$

Unidad 12.5 Para cada una de las siguientes funciones realizar el procedimiento completo, desarrollado en los ejemplos anteriores.

4. $y = \frac{2x+1}{2x+1}$

8. $y = \frac{x}{x^2-4}$

10. $y = \frac{x^3}{x^2-9}$

16. $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-9x+4}$

18. $y = \frac{x^2+x}{11x}$

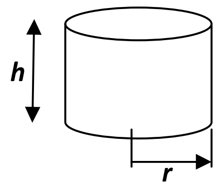
Unidad 13.1 Resolver los siguientes problemas.

19. **Ingreso.** Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno \$18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

25. **Diseño de recipiente.** Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen K. Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a $\sqrt[3]{K/\pi}$.

Volumen = $\pi r^2 h$

Área de la superficie = $2\pi rh + \pi r^2$



27. **Utilidad.** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$p = 600 - 2q$, y la función de costo total es $c = 0.2q^2 + 28q + 200$. Encuentre la producción y el precio que aumentarán al máximo la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿Cuáles serían entonces la producción y el precio que aumentarían al máximo la utilidad? Ahora, ¿Cuál es la utilidad?

33. **Costo de transporte**. El costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es $0.165 + {}^{s}/_{200}$ dólares por milla,

donde s es la velocidad (uniforme) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de \$18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?

38. **Tasa de rendimiento**. Para construir un edificio de oficinas, los costos son de \$2.5 millones e incluyen el precio del terreno, los honorarios del arquitecto, la cimentación, la estructura, etc. Si se construyen x pisos, el costo (excluyendo los costos fijos) es $c = 5x[100000 + 5000(x - 1)]$. El ingreso por mes es de \$50000 por piso. ¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión? (tasa de rendimiento = ingreso total/costo total.)

PRACTICA 18

INTEGRACIÓN

18.1 La Integral Indefinida:

Conocemos como una integral indefinida a aquella donde no se especifican límites o un rango donde aplicar la derivada; por ejemplo:

$\int 5\, dx = 5x + C$

$\int 2x\, dx = x^2 + C$

18.1.1 Ingreso de las Integrales en Matlab

Para realizar operaciones de integración con Matlab, usaremos la función "**int()"** donde en el interior de los paréntesis escribiremos la función respectiva que se desea integrar.

Pero, para poder utilizar la función con las variables que normalmente se nos presentan, volveremos a usar una función que ya la utilizamos en prácticas anteriores, dicha función es la función **"syms",** la misma que nos sirve para declarar las variables que usaremos.

Ejemplos:

A continuación mostraremos el procedimiento que se usa para obtener el resultado de una integral propuesta:

Resolver por integración:

$\int x^5\, dx$

A esta integral la resolveremos de la siguiente manera.

- Declaramos las variables que vamos a utilizar en nuestro ejercicio, para este caso será **"x"**

syms x

- Con la función **"int()"** resolveremos la integral dada; asi:

int(x^5)

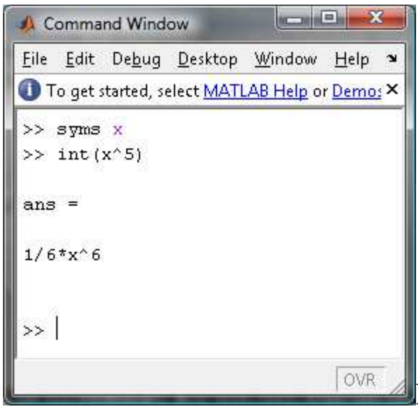


Figura 18.1

Donde naturalmente, podemos ver que la respuesta es

$$\frac{x^6}{6}$$

Y aquí podemos observar que no nos presenta en la respuesta la constante de integración, esto es cuestión propia del lenguaje.

Cuando trabajamos con integrales, no debemos olvidarnos de las constantes “C”, ya que para cada caso, sería incorrecto escribir las respuestas:

$\int 5\ dx = 5x$

$\int 2x\ dx = x^2$

Cuando resolvamos manualmente, nunca debemos olvidarnos de la constante de integración, sin embargo, cuando resolvemos con el lenguaje (Matlab), nos presenta una manera un tanto diferente, debido a que el resultado no lo presenta con la constante de integración, de la siguiente manera.

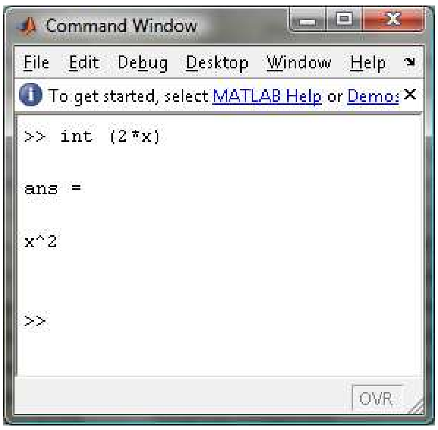


Figura 18.2

Si estamos integrando ∫2x dx, como nos muestra la pantalla la respuesta será x^2, y como hemos indicado, el lenguaje no nos mostrará el resultado impreso con la constante de integración.

Resolver la siguiente integral:

$$\int (x^2 + 2x)\ dx$$

Procederemos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a utilizar en nuestra integral:

syms x

- Llamamos a la función de integración **"int()"** para resolver nuestro ejercicio:

int(x^2+2*x)

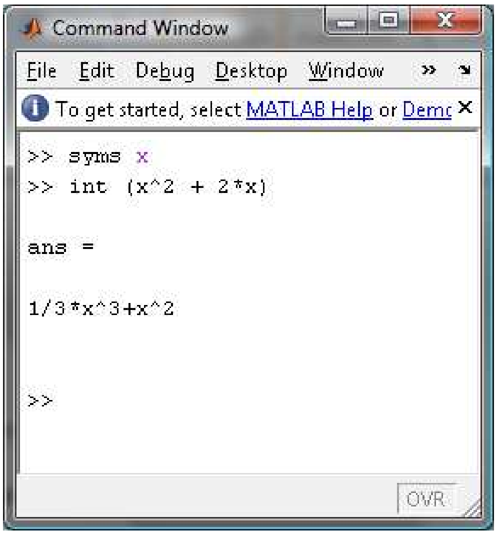


Figura 18.3

Aquí la respuesta se la interpreta así:

$$\frac{x^3}{3} + x^2$$

También, si queremos resolver una integral donde manualmente será necesario realizar algunas operaciones algebraicas, lo haremos de la misma sencilla manera:

Resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}\,dx$$

- Declaramos las variables que usaremos:

syms x

- Introducimos la integral propuesta con la función respectiva:

int(((2*x-1)*(x+3))/6)

Obtendremos el siguiente resultado

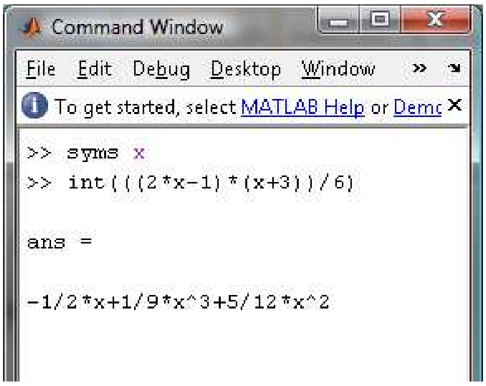


Figura 18.4

Donde la respuesta se la puede interpretar de la siguiente manera:

$$-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{12}$$

18.2 La integral Definida:

Para resolver una integral definida, o que en nuestro caso, la llamaremos una integral con límites, utilizaremos la misma función **"int()"**, solo que con una pequeña variación, luego de definir la integral dentro de los paréntesis, declararemos también los límites por donde calcularemos la integral, de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)$$

Para resolver este tipo de integral, en el lenguaje lo ingresaremos de la siguiente manera:

int(f(x),a,b)

Donde claramente podemos ver los límites donde podemos movernos con la integral.

Nota: Este ejemplo no se lo podrá resolver en el lenguaje.

Ejemplos:

Si queremos resolver la siguiente matriz:

$$\int_0^3 (x-5)$$

Ingresaremos en el command window lo siguiente:

- Declaramos las variables que vamos a usar:

syms x

- Resolvemos la integral, ingresando al mismo tiempo los límites de ésta, de la siguiente manera.

int((x-5),0,3)

Obteniendo el siguiente resultado:

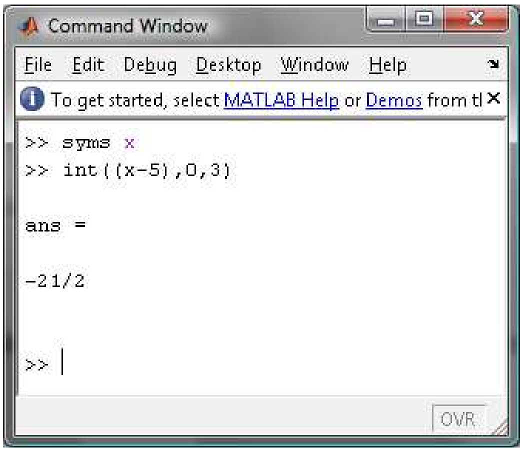


Figura 18.5

Resolver el siguiente ejercicio:

$$\int_0^6 \sqrt{2x+4}\,dx$$

Ingresaremos en el command window las siguientes sentencias:

- syms x
- int((sqrt(2*x+4)),0,6)

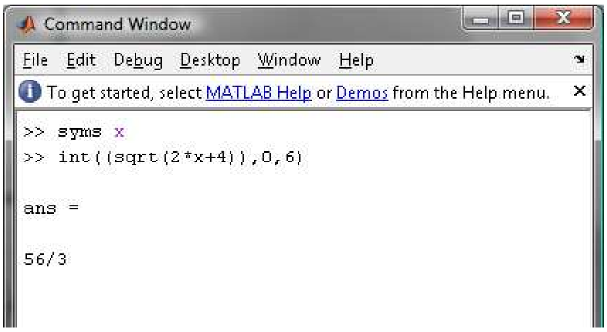


Figura 18.6

La respuesta es **18.66.**

18.3 CALCULO DE AREAS:

Cuando queremos calcular el área que se encuentra entre dos curvas, por ejemplo si tenemos las ecuaciones:

$y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$

Y queremos encontrar el área que se encuentra entre estas dos curvas, el procedimiento que desarrollaremos es más o menos parecido al manual, al que normalmente realizamos en clases.

Como nos muestra en el libro, el área que se encuentra entre estas dos ecuaciones es: 41.66; y esto con el lenguaje lo obtendremos de la siguiente manera:

- Declaramos la variable que usaremos en las ecuaciones, en este caso es ***"x"***.

syms x

- Encontraremos los puntos donde se cortan ambas ecuaciones, los mismos que serán los puntos de límite de nuestra futura integral, de la siguiente manera:

[x,y] = solve ('4*x - x^2 + 8 - y = 0','x^2 - 2*x -y =0')

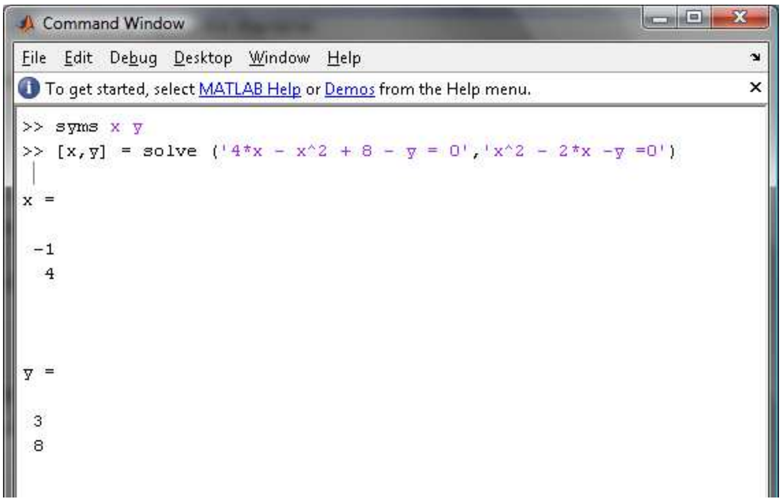


Figura 18.7

- Al mismo tiempo, ingresamos las dos ecuaciones en dos variables diferentes, esto con el propósito que sea más sencillo realizar el ejercicio de integración más adelante.

y1 = 4*x^2 – x^2 +8

y2 = x^2 – 2*x

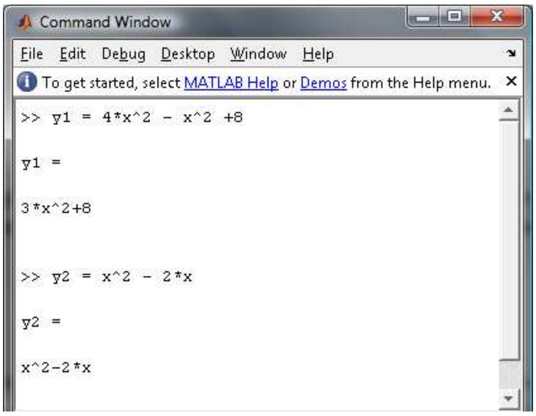


Figura 18.8

Tenemos dos puntos correspondientes a ***x***, 4 y -1, son a los límites ***a*** y ***b*** de nuestra integral, estos puntos serán los límites de nuestra integral definida con la cual calcularemos el área que necesitamos.

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

En nuestro caso, para el ejercicio, equivale a:

$$\int_{-1}^{4} (y2 - y1)\, dx$$

Resolviendo esta integral, obtendremos el área que necesitamos; y esto lo haremos escribiendo lo siguiente:

int((y2-y1),-1,4)

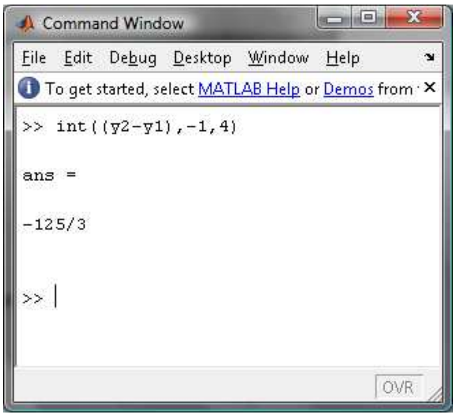


Figura 18.9

Donde el resultado es el que justamente esperábamos (41.66).

La gráfica correspondiente es la siguiente:

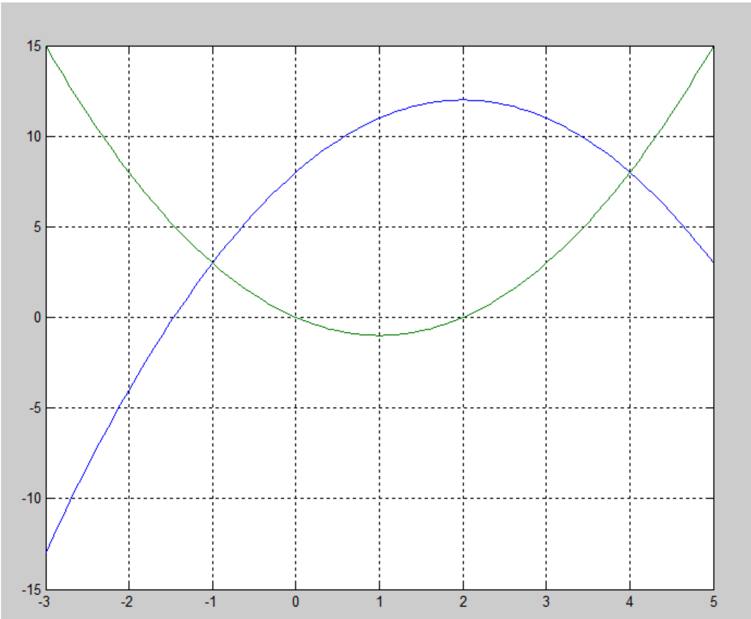


Figura 18.10

Ejemplo:

Resolver el siguiente ejercicio:

Encontrar el área limitada por la curva $y^2 = 4x$ y las líneas $y = 3$,y $x = 0(el\ eje\ y)$.

Procederemos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que usaremos en las ecuaciones:

syms x

- Asignamos la primera ecuación a una variable, de la siguiente manera:

y1 = sqrt(4*x)

Esto equivale a decir $y^2 = 4x$; con la diferencia que en lugar de ser ***y*** es: ***y1***

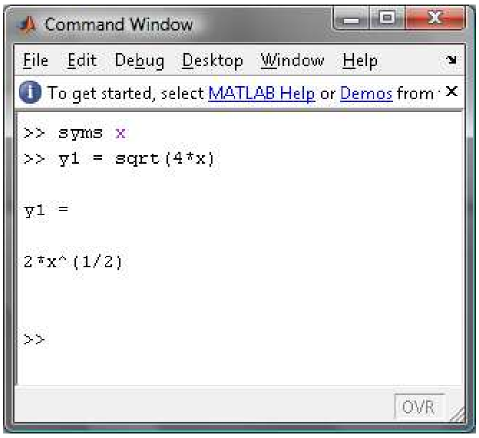


Figura 18.11

- Hacemos lo mismo con la segunda ecuación.

y2 = 3

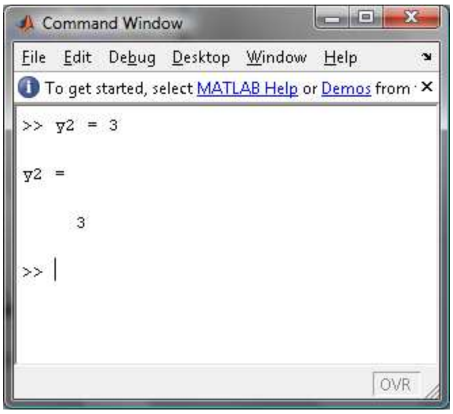


Figura 18.12

- Hallamos la intersección entre las dos ecuaciones, al mismo tiempo le asignamos a una variable.

[cortex1,cortey1]= solve('((4*x)^(1/2) = y)','y=3')

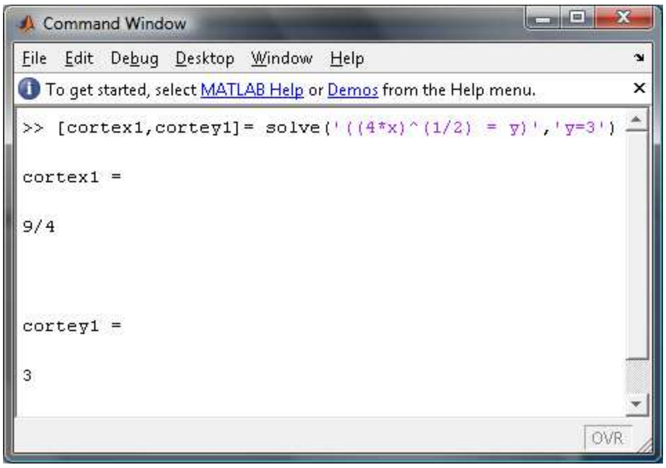


Figura 18.13

- Hallamos la intersección entre la parábola y el punto de corte que propone el ejercicio.

[corte2x] = solve('((4*x)^(1/2))',0)

Solamente nos devolverá un valor, es por eso que solamente lo igualamos con una variable.

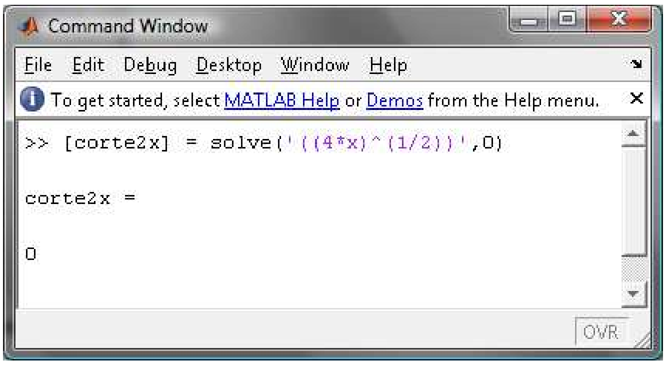


Figura 18.14

- Calculamos el área con los puntos obtenidos, que serán los límites de nuestra integral

$$\int_{0}^{9/4} [f(x) - g(x)]$$

Esto lo resolveremos escribiendo lo siguiente:

int ((y2-y1),0,(9/4))

Dándonos como resultado:

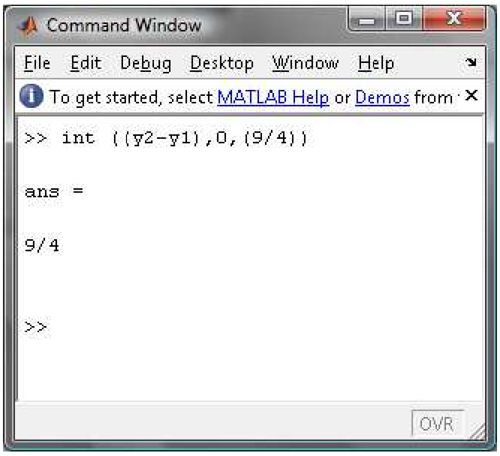


Figura 18.15

18.4 Ejercicios propuestos

Unidad 14.1 Encuentre las integrales indefinidas

39. $\int\left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5}-\frac{7}{2\sqrt{x}}+6x\right)dx$

48. $\int[6e^u-\ u^3(\sqrt{u}+1)]du$

51. $\int\frac{e^x+e^{2x}}{e^x}dx$

Unidad 14.3 Encuentre las integrales indefinidas

56. $\int\frac{3}{5}(v-2)e^{2-4v+v^2}dv$

69. $\int\left[\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^5}{(x^6+1)^2}\right]dx$

71. $\int\left[\frac{1}{3x-5}-(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\right]dx$

79. $\int\frac{x+1}{x^2+2x}\ln(x^2+2x)\ dx$

Unidad 14.4 Determine las integrales indefinidas

40. $\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ dx$

47. $\int(x^3+ex)\sqrt{x^2+e}\ dx$

51. $\int\frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}ds$

55. $\int \frac{\ln(xe^x)}{x} dx$

Unidad 14.7 Evalué la integral definida

22. $\int_{-e^e}^{-1} \frac{6}{x}\, dx$

27. $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3}\, dx$

31. $\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{7x^3+1}\, dx$

38. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx$

53. **Distribución de ingresos**. El economista Pareto ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que da el número *N* de personas que reciben *x* o más dólares. Si $\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B}$, donde *A* y *B* son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre *a* y *b*, si $a < b$.

55. **Flujo continuo de ingreso**. El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de $2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por $\int_0^5 2000e^{-0.06t}\, dt$. Evalúe el valor actual, al dólar más cercano.

Unidad 14.9 Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos.

9. $y = x^2,\ y = 2x$

10. $y = x,\ y = -x + 3,\ y = 0$

16. $y = x - 4,\ y^2 = 2x$

21. $2y = 4x - x^2,\ 2y = x - 4$

26. $y^2 = 2 - x,\ y = x + 4$

31. $4x + 4y + 17 = 0,\ y = {}^1\!/_x$

32. $y^2 = -x,\ x - y = 4,\ y = -1,\ y = 2$

PRACTICA 19

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

19.1 Funciones de varias variables:

En temas anteriores, hemos trabajado con funciones en donde podemos graficar en dos dimensiones, (***x***,***y***).

Ahora presentaremos como podemos graficar en tres dimensiones, para eso utilizamos y aprovechamos las funciones de varias variables, es decir que ahora usaremos los ejes ***x***, ***y***, ***z***.

Por ejemplo vamos a demostrar como graficar funciones como esta:

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Obtendremos una gráfica como la siguiente:

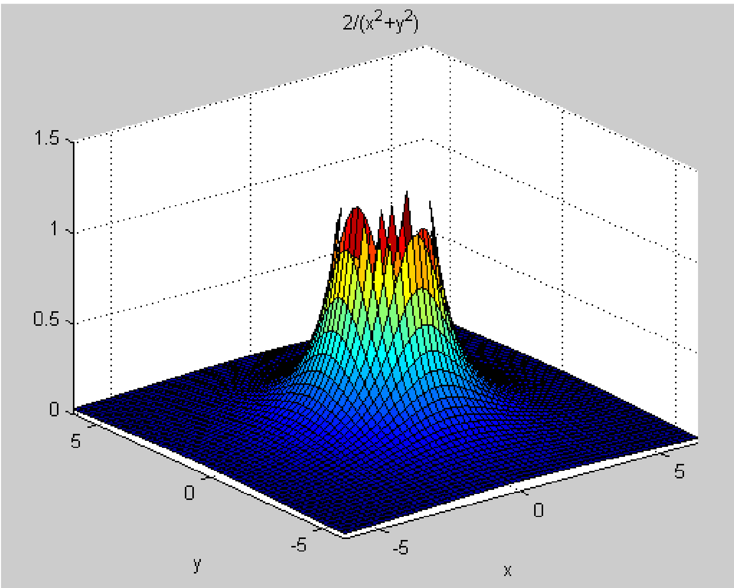


Figura 19.1

Y para obtener esta gráfica en Matlab, debemos seguir los siguientes pasos:

- Declarar las variables que vamos a usar en nuestro ejercicio.

syms x y z

- Asignamos la ecuación propuesta dentro de una variable diferente:

z = 2/(x^2 + y^2)

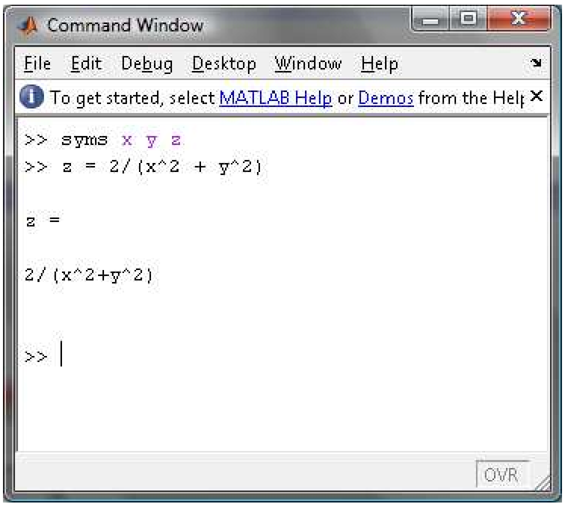


Figura 19.2

- Graficamos la función propuesta, usando la función "***ezmesh***"

ezmesh (z)

Obteniendo el resultado que esperábamos.

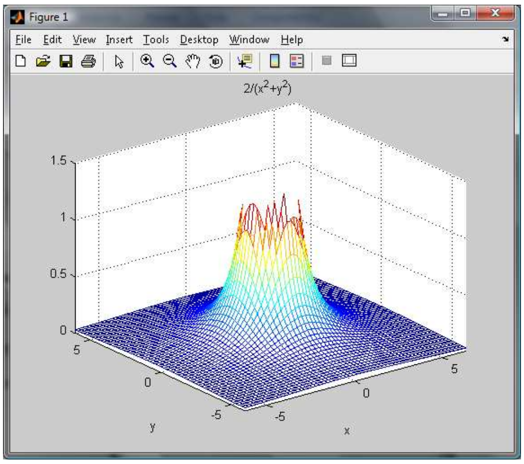


Figura 19.3

Existen ciertas variantes al momento de presentar las gráficas, y esto se debe a que existen varias funciones para mostrar estas funciones; dichas funciones pueden ser:

- ezmesh()
- ezmeshc()
- ezsurf()
- ezsurfc()

Por ejemplo, si usamos la función ***ezsurf(z)***, donde “z” es la función que calculamos, obtendremos la misma gráfica, con un detalle diferente.

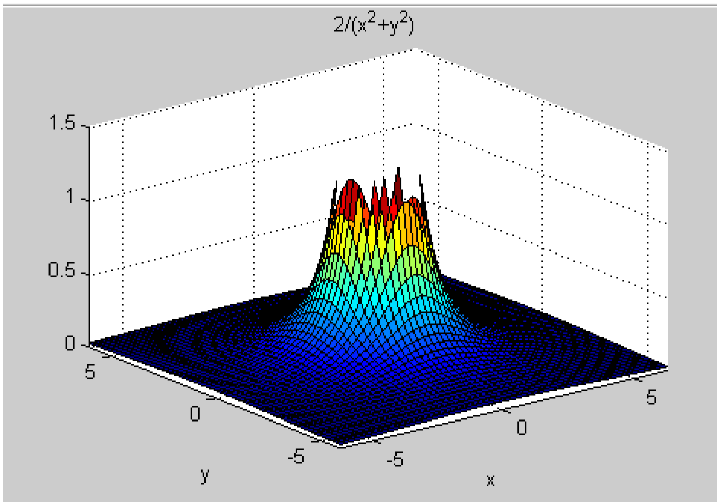


Figura 19.4

Por otro lado, si deseamos obtener la gráfica de la función:

$$2x + z = 4$$

Esto lo realizaremos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a usar en el ejercicio:

syms x z

- Igualamos la ecuación en función de “z”, de la siguiente manera.

z = solve (‘2*x + z = 4’,z)

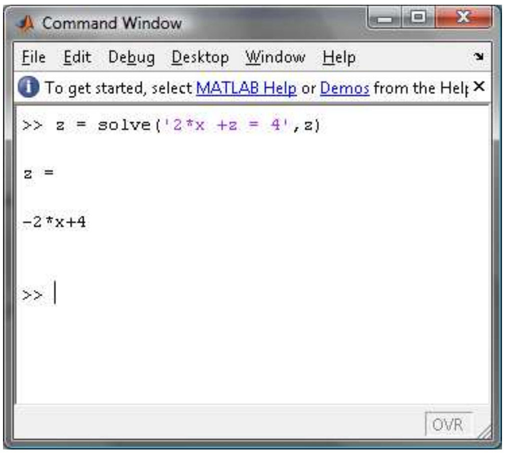


Figura 19.5

- Graficamos la función que obtuvimos:

ezmesh(z)

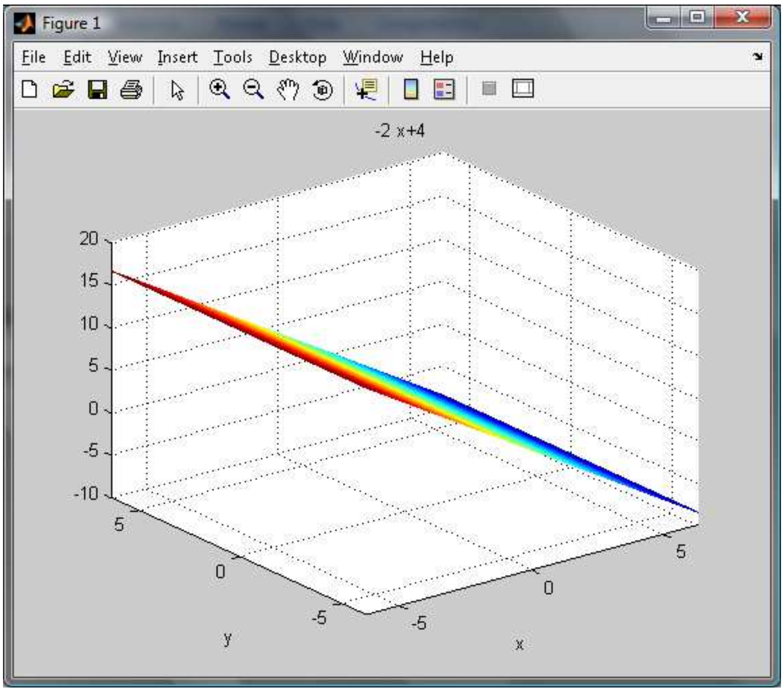


Figura 19.6

De la cual, si usamos la herramienta  y volteamos la imagen a nuestro gusto, podremos presentarla de la manera que deseemos:

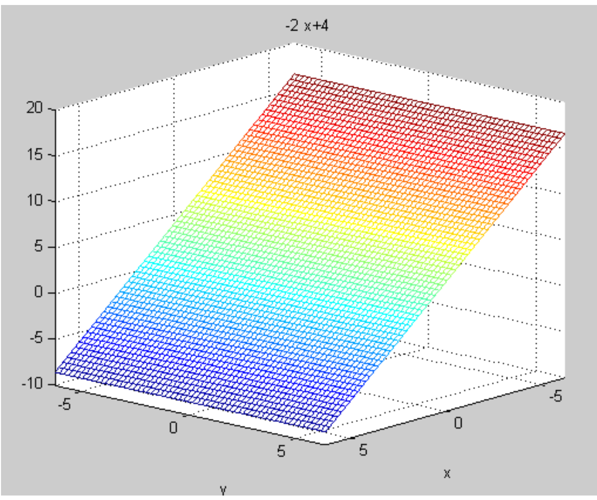


Figura 19.7

Podremos tener una imagen como ésta.

La diferencia está en la disposición de las coordenadas, si comparamos con las que presenta el libro en la misma figura, veremos que desde otra perspectiva, vemos la misma gráfica.

Ejercicios:

Por ejemplo, si queremos graficar las siguientes funciones dadas:

$$2x + 3y + z = 6$$

Debemos seguir los siguientes pasos.

- Declaramos las variables que intervienen:

syms x y z

- Resolvemos la ecuación en función de la variable "**z**".

z = solve('2*x + 3*y +z = 6',z)

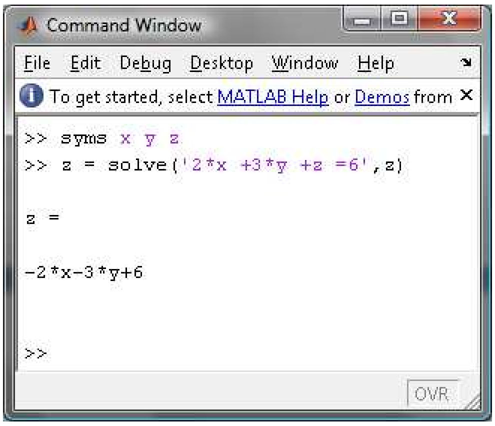


Figura 19.8

Este procedimiento es igual que si reemplazamos manualmente a **z,** y le asignásemos la función que tiene como resultado.

- Graficamos la función **"z"** obtenida, con el comando "**ezmesh()**".

ezmesh(z)

Teniendo como resultado el siguiente plano.

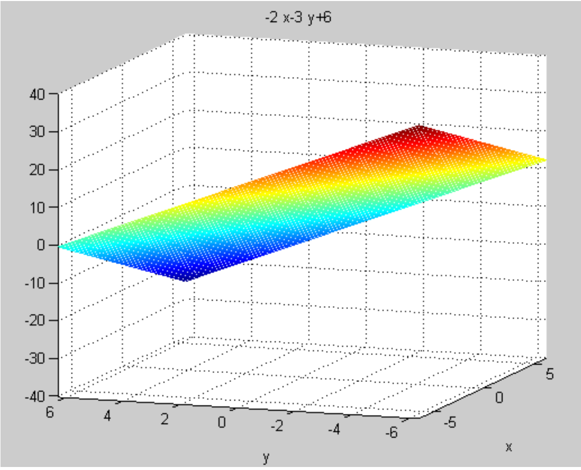


Figura 19.9

En cambio, si deseamos igualar la función en términos de ***x***, ó de ***y***, podemos hacerlo, simplemente cambiando el parámetro de resolución de la función:

- De la siguiente manera:

x = solve('2*x +3*y +z =6',x)

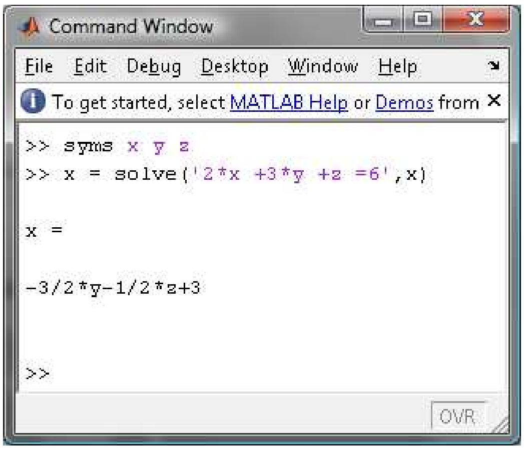


Figura 19.10

- Graficamos la función con respecto a **x** obtenida.

ezmesh(x)

Teniendo como resultado el mismo plano.

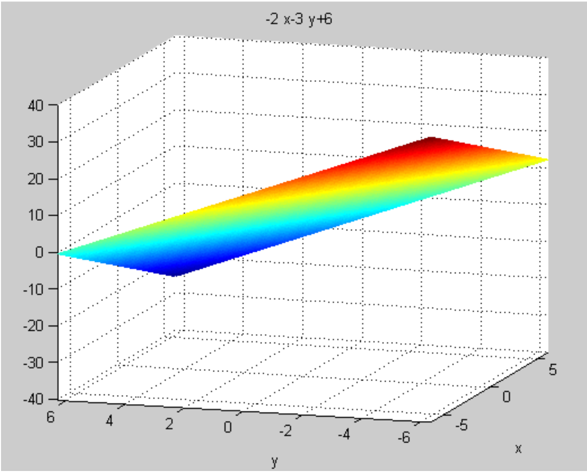


Figura 19.11

19.2 DERIVADAS PARCIALES:

Si deseamos obtener derivadas parciales, como su nombre lo dice, debemos hacerlo por partes, y el procedimiento que se realiza con Matlab es igual.

Por ejemplo, si del siguiente ejercicio:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 z + z^3$$

Deseamos obtener las derivadas *fx(x,y,z)*, *fy(x,y,z)*, *fy(x,y,z)*, debemos obtener cada una de ellas, con respecto a la variable que deseamos, y esto se lo hace de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a usar.

syms x y z

- Definimos la función f(x,y,z)

fun = x^2 + y^2*z + z^3

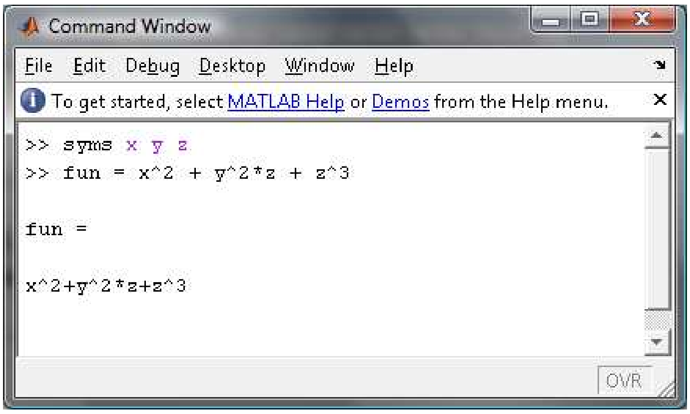


Figura 19.12

Nota: La palabra **fun**, es solamente una variable, puede ser cualquier otra letra o palabra, usamos ésta para mayor comodidad.

- Derivamos cada una de las funciones que deseamos.

o Obtenemos f(x).

fx = diff(fun, x)

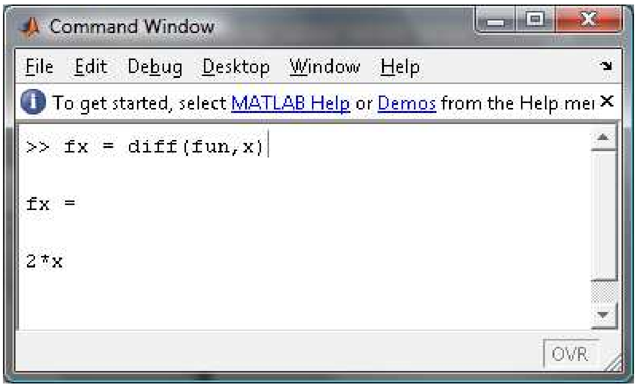


Figura 19.13

Con esto decimos que deseamos diferenciar la función, con respecto de la variable ***x***.

o Obtenemos f(y).

fy = diff(fun, y)

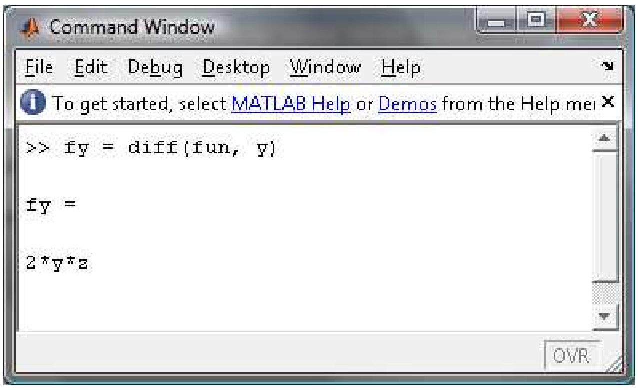


Figura 19.14

o Obtenemos f(z).

fz = diff(fun, z)

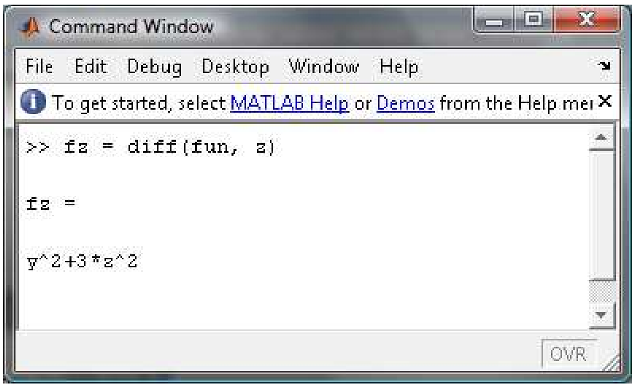


Figura 19.15

Ahora tenemos los resultados de las funciones que esperábamos, f(x), f(y), f(z).

Si deseamos encontrar los valores que nos resultan de las funciones obtenidas, con dos puntos dados, solamente debemos resolver las ecuaciones, donde los valores de las variables tomarán los puntos que se proponen, por ejemplo:

Resolver el siguiente ejercicio:

$$f(x,y) = xy^2 + x^2y$$

Encontrar $\mathbf{f_x(x,y)}$ y $\mathbf{f_y(x,y)}$. Encontrar también, $\mathbf{f_x(3,4)}$ y $\mathbf{f_y(3,4)}$.

Con lo aprendido anteriormente, trabajaremos de la siguiente manera.

- Encontramos $\mathbf{f_x(x,y)}$ y $\mathbf{f_y(x,y)}$**,** digitando las siguientes sentencias:

syms x y

fun = x*y^2 + x^2*y

fx = diff(fun,x)

fy = diff(fun,y)

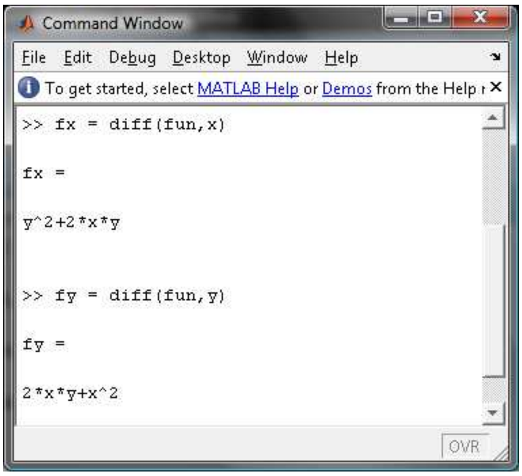


Figura 19.16

- Re-calculamos las funciones obtenidas, con los valores de **x, y** propuestos.

x = 3

y = 4

fx = y^2+2*x*y

fy = 2*x*y+x^2

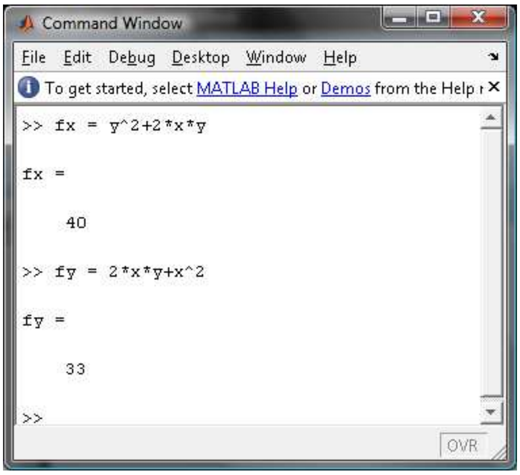


Figura 19.17

19.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Se dice que una función $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ tiene un máximo relativo en el punto (x_0,y_0), esto es cuando $\boldsymbol{x = x_0}$ y $\boldsymbol{y = y_0}$, si para todo punto (x,y) en el plano que esté lo suficientemente cercano a (x_0,y_0) se tiene.

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$$

Para un ***mínimo relativo***, reemplazamos en la ecuación (1) ≥ por ≤.

19.3.1 Determinación de los puntos críticos.

Si deseamos obtener los *puntos críticos* de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$

Procederemos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a usar en la función.

syms x y

- Definimos la función propuesta.

fun = 2*x^2 + y^2 – 2*x*y + 5*x – 3*y + 1

- Obtenemos f(x) y f(y) aplicando derivación por partes.

fx = diff(fun,x)

fy= diff(fun,y)

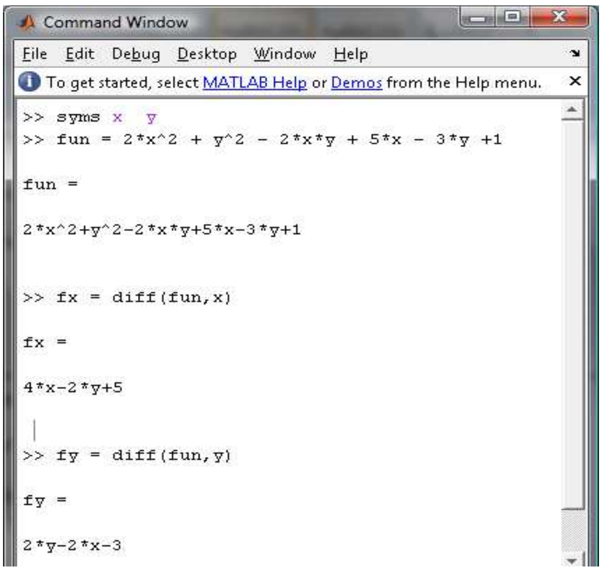


Figura 19.18

- Resolvemos el sistema con las dos ecuaciones obtenidas, ***fx*** y ***fy***, asignando los valores en una variable diferente, en este caso, serán ***px*** y ***py***.

[px,py] = solve(fx,fy,x,y)

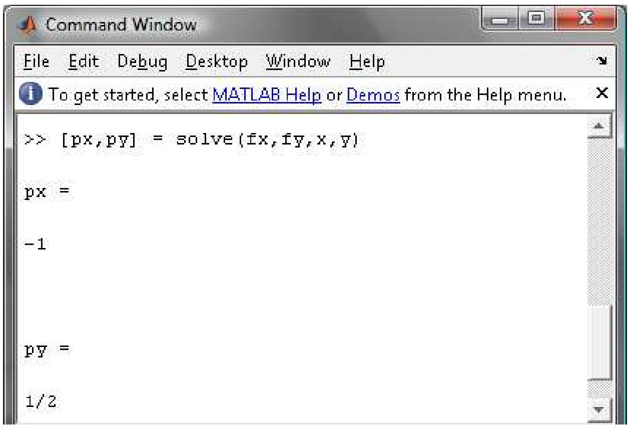


Figura 19.19

Ahora, **"px"** y **"py"** tienen los valores de los cortes, en este caso 1 y ½ respectivamente.

b) Encontrar los puntos críticos de:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 100)$$

- Declaramos las variables que vamos a utilizar

syms x y z

- Asignamos la función propuesta en otra variable.

fun = 2*x^2 +x*y + y^2 + 100 - z*(x +y -100)

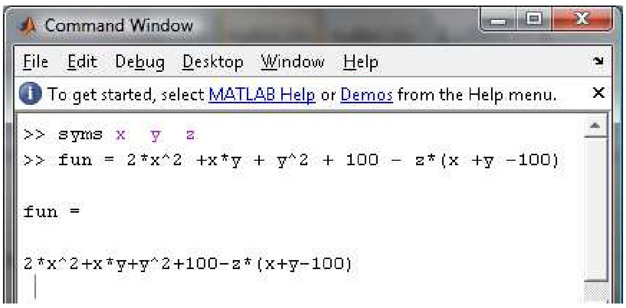


Figura 19.20

- Calculamos ***f(x)***, ***f(y)*** y ***f(z)***, aplicando derivación por partes.

fx = diff(fun,x)

fy = diff(fun,y)

fz = diff(fun,z)

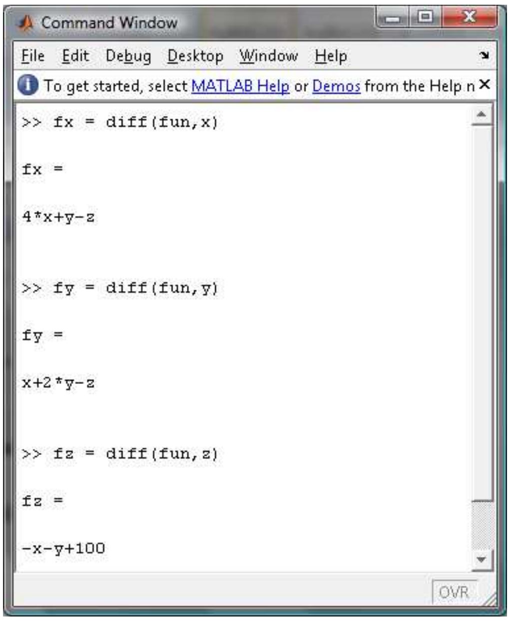


Figura 19.21

- Resolvemos el sistema con las dos ecuaciones obtenidas, ***fx***, ***fy*** y ***fz*** para encontrar los puntos de corte, a este resultado le asignamos en una variable nueva.

[px,py,pz]= solve(fx,fy,fz,x,y,z)

Donde los valores de los cortes de los ejes **x, y, z** son los que se muestran en la pantalla, 25, 75, 175 respectivamente, que han sido asignados en las variables **px,py,pz**.

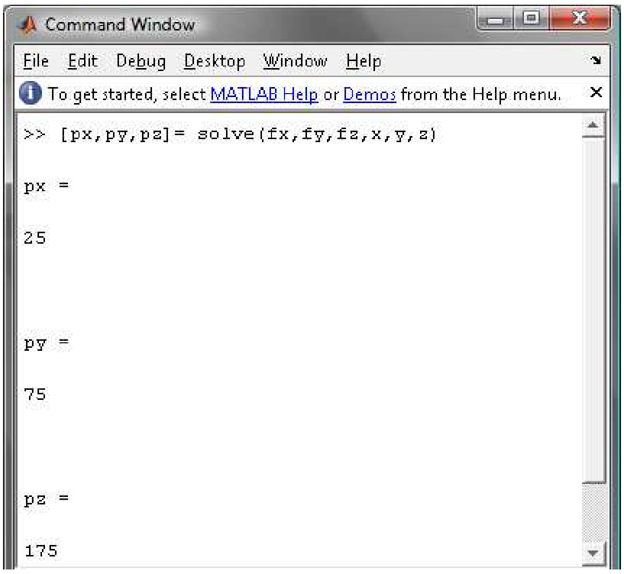


Figura 19.22

19.4 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Si queremos encontrar los máximos y mínimos relativos de una función a la cual se imponen ciertas *restricciones*; por ejemplo, si un fabricante desea minimizar una función de costos conjuntos y obtener un nivel particular de producción.

Ahora.

Supongamos que queremos encontrar los extremos relativos de:

$$w = x^2 + y^2 + z^2$$

Sujeta a la restricción de que *x, y, z* deben satisfacer.

$$x - y + 2z = 6$$

Procederemos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a utilizar.

syms x y z w k

A la variable **k** la usaremos en lugar de la letra griega **"lambda"** (λ).

- Ingresamos la función nueva, donde la restricción ya se encuentra igualada a cero y multiplicada por lambda.

w = x^2 + y^2 + z^2 - k*(x - y + 2*z -6)

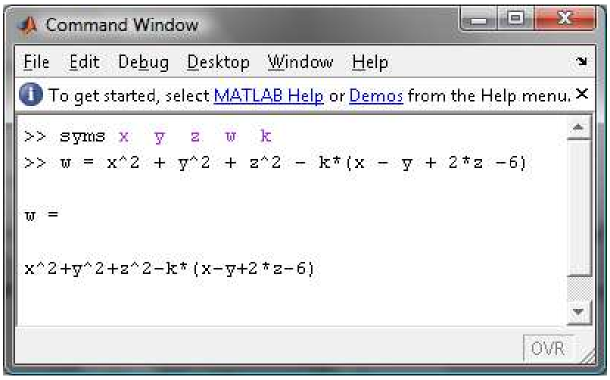


Figura 19.23

- Obtenemos la derivada de **w** con respecto a cada una de las otras variables.

dwx = diff(w,x)

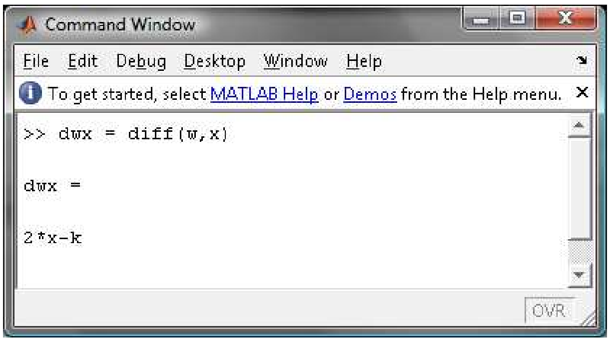


Figura 19.24

dwy = diff(w,y)

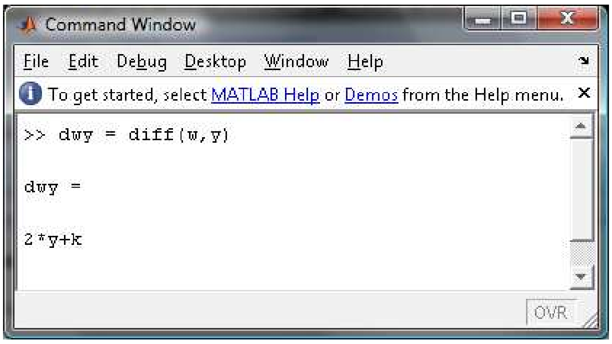


Figura 19.25

dwz = diff(w,z)

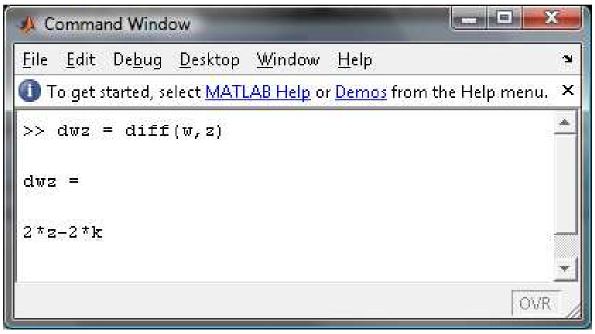


Figura 19.26

dwk = diff(w,k)

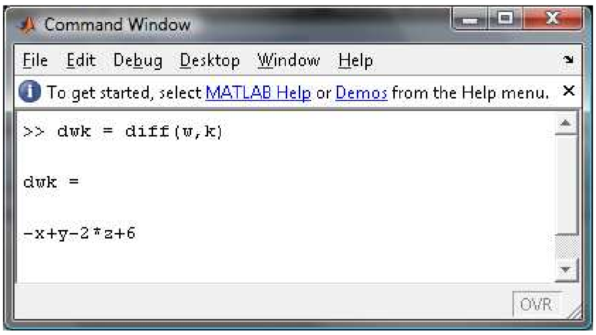


Figura 19.27

Después de estos pasos, obtendremos el siguiente sistema.

$$\begin{cases} dwx = 2x - k = 0, \\ dwy = 2y + k = 0, \\ dwz = 2z - 2k = 0, \\ dwk = -x + y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

Donde, si resolvemos las ecuaciones, usando la función **solve** del Matlab, de la siguiente manera:

solve(dwx)

solve(dwy)

solve(dwy)

solve(dwk)

Obtenemos los siguientes resultados:

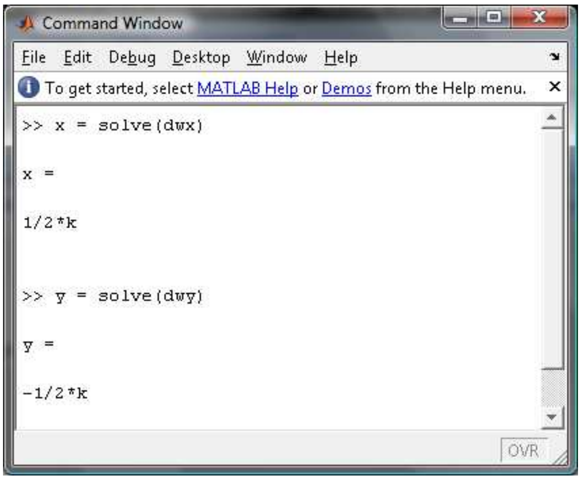


Figura 19.28

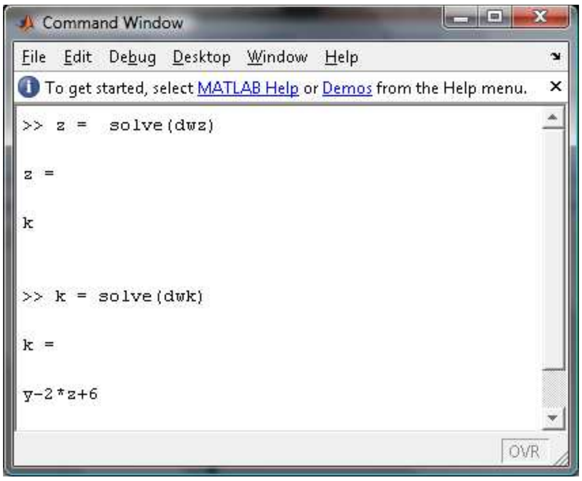


Figura 19.29

Las respuestas se las interpreta de la siguiente manera.

$x = \frac{k}{2},\ y = -\frac{k}{2},\ z = k$

Ejemplos.

Maximización de la producción: La función de producción de una empresa es:

$$f(l, k) = 60l + 30k - 2l^2 - 3k^2$$

Donde la restricción del presupuesto es

$$2l + 3k = 30$$

Procederemos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a utilizar.

syms l k j

En este caso, la variable **j**, será igual a **lambda**.

- Ingresamos la función nueva, donde la restricción ya se encuentra igualada a cero y multiplicada por lambda.

fun = 60*l + 30*k -2*l^2 - 3*k^2 - j *(2*l + 3*k - 30)

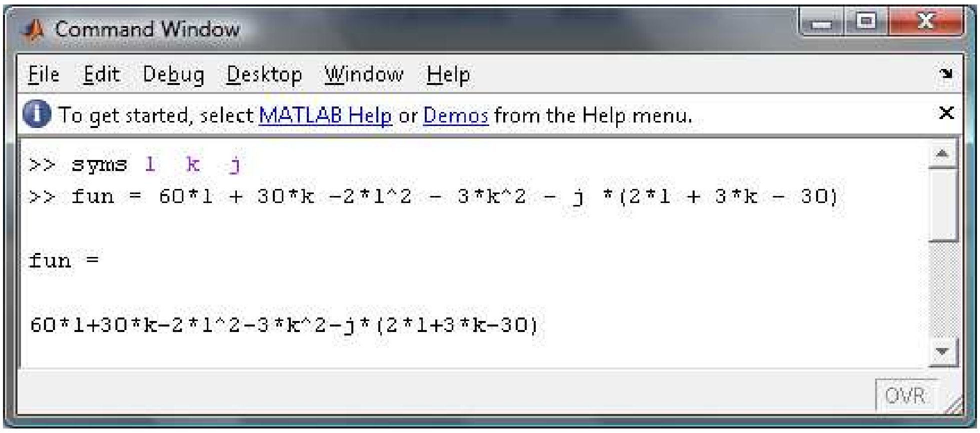


Figura 19.30

- Obtenemos la derivada de la función con respecto de cada una de las variables.

dl = diff(fun,l)

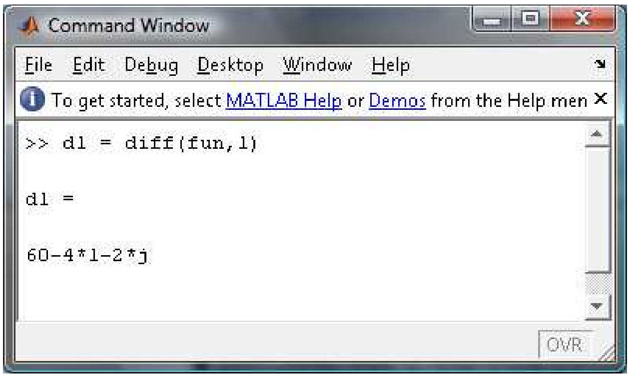


Figura 19.31

dk = diff(fun,k)

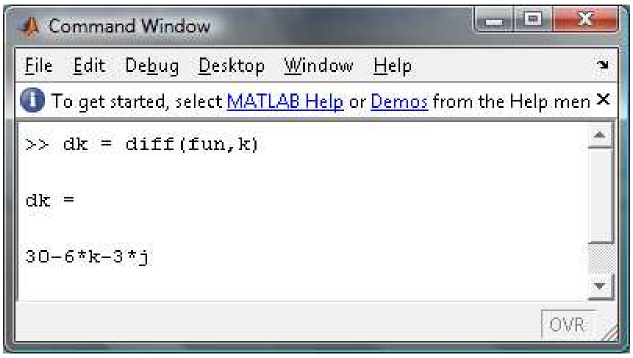


Figura 19.32

dj = diff(fun,j)

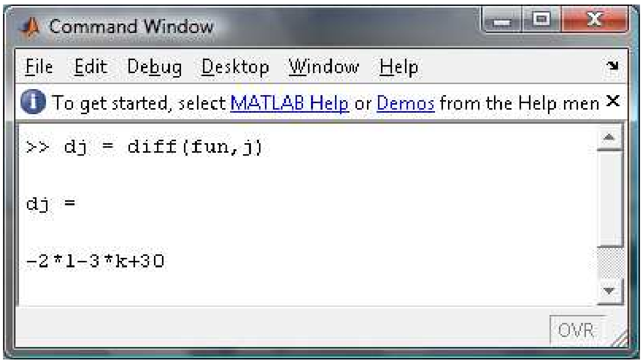


Figura 19.33

Después de éstos pasos, obtenemos el sistema correspondiente:

dl = 60 – 4l – 2j

dk = 30 – 6k – 3j

dj = -2l - 3k + 30

Y resolviendo cada una de las variables, tendremos que:

l = solve(dl,l)

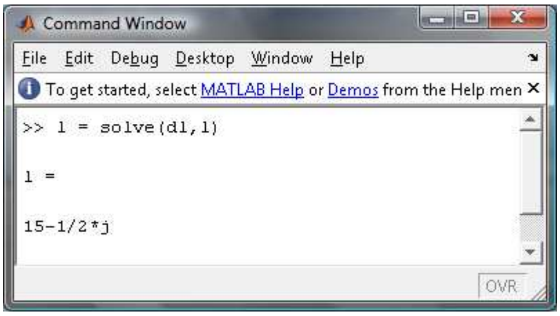


Figura 19.34

k = solve(dk,k)

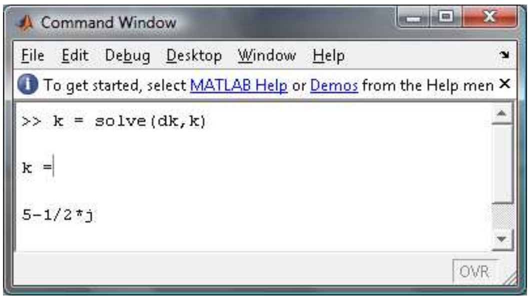


Figura 19.35

Para el siguiente paso, primero debemos presionar la tecla de la variable **“j”**, y continuamos con el ejercicio.

j

[j] = solve(dj,j)

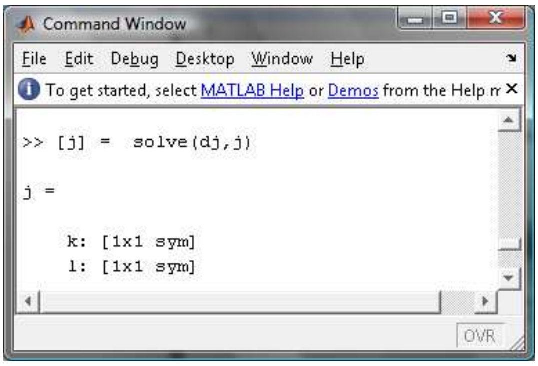


Figura 19.36

Aquí, colocamos la variable **j** entre corchetes, debido a que nos devolverá más de un valor, es decir, un vector de valores, tal como vemos en la figura, es por eso que:

j.l es igual a:

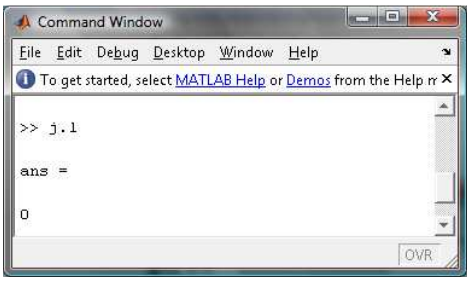


Figura 19.37

j.k es igual a:

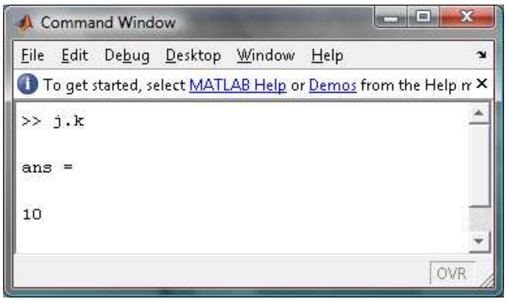


Figura 19.38

Entonces tenemos que los puntos críticos son:

$l = 15 - \frac{1}{2}y, \qquad k = 5 - \frac{1}{2}y$

19.5 EJERCICIOS

Unidad 16.1 Realizar el bosquejo de las graficas en 3D.

1. $4x - y^2 + 3$

2. $3x^2y - 4y$

3. $e^x(2y + 3z)$

4. $x^2y + xy^2 + yz^2$

6. $\ln(ru)$

Unidad 16.2 Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

5. $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y - 4xy + 3y$

9. $h(s, t) = \frac{s^2+4}{t-3}$

11. $u(q_1, q_2) = \frac{3}{4}\ln q_1 + \frac{1}{4}\ln q_2$

14. $h(x, y) = \frac{\sqrt{x+9}}{x^2y+y^2x}$

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}(r^3 - 2rs + s^2)$

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$

Unidad 16.4 Encuentre las derivadas implícitas utilizando la función **imp_dif().**

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9 \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20 \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

7. $e^x + e^y + e^z = 10 \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

Encuentre las derivadas parciales y evalúe para los valores dados de las variables utilizando el botón .

14. $xz + xyz - 5 = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x}, x = 1, y = 4, z = 1$

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}, x = 2, y = 2, z = 6$

18. $\frac{rs}{s^2+t^2} = t; \quad \frac{\partial r}{\partial t}, r = 0, s = 1, t = 0$

Unidad 16.5 Para todas las funciones siguientes encontrar $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial xy}$.

5. $f(x, y) = 9e^{2xy}$

9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

14. $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - x^2y^2$

23. $2z^2 = x^2 + 2xy + xz$

PRÁCTICA 20 (MATEMATICAS FINANCIERAS)

Para desarrollar esta práctica, utilizaremos como guía de ejercicios el libro "**Matemáticas Financieras de Frank Ayres Jr**".

Realizaremos una práctica que nos ayude a resolver ejercicios de: Progresiones (Aritméticas y Geométricas), Interés Simple, Pagos Parciales, Interés Compuesto, Anualidades, y para esto, será necesario presentar las fórmulas correspondientes a cada uno de estos ejercicios.

Fórmulas:

- **Progresiones**
  - **Progresión Aritmética**
    - $l = a + (n-1)d$
    - $s = \frac{n}{2}(a+1)$
  - **Progresión Geométrica**
    - $l = ar^{n-1}$
    - $s = \frac{a-ar^n}{1-r}$ cuando r < 1
    - $s = \frac{ar^n-a}{r-1}$ cuando r > 1
- **Interés Simple**
  - $I = Cit$
  - $S = C(1+it)$
- **Pagos Parciales**
  - $i = \frac{2mI}{B(n+1)-I(n-1)}$
  - $i = \frac{2mI}{B(n+1)}$
- **Interés Compuesto**
  - $S = C(1+i)^n$
- **Anualidades Ciertas Ordinarias**
  - $S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$
  - $A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

20.1 EJERCICIOS PROPUESTOS PARA DESARROLLAR EN CLASES

20.1.1 Progresiones Aritméticas:

Una Progresión Aritmética es una sucesión de números, llamados *términos,* en la cual cualquier término posterior al primero puede ser encontrado del término anterior mediante la suma de un número constante llamado diferencia común.

Por ejemplo:

Encontrar el 12° término y la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética siguiente:

6, 11, 16, 21. . .

$$l = a + (n - 1)d$$

Donde:

a = primer término = 6

d = diferencia común = 5

n = número de términos = 12

Para hallar un término cualquiera, utilizaremos la fórmula citada, y, en el lenguaje Matlab procederemos de la siguiente manera:

- Declaramos las variables que vamos a utilizar en la fórmula.

syms l a n d

- Asignamos los valores correspondientes a cada variable, es decir, damos los valores que conocemos a las variables respectivas.

a = 6

d = 5

n = 12

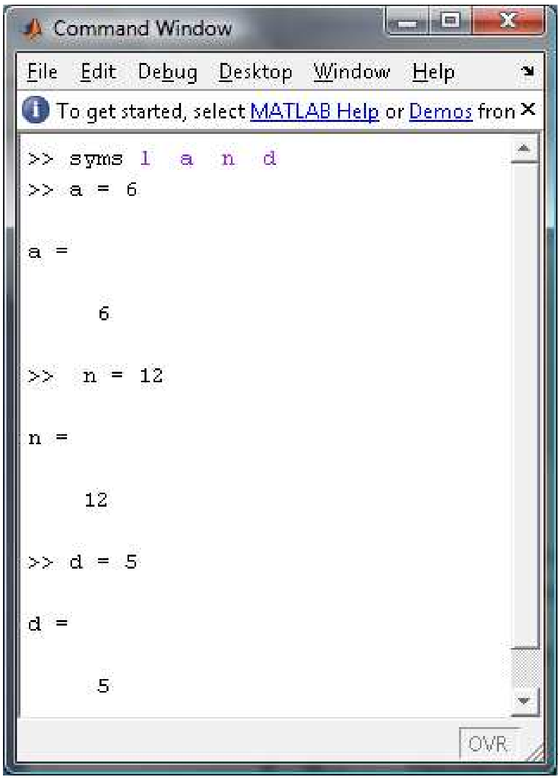


Figura 20.1

- Ingresamos la fórmula que corresponde.

l = a + (n - 1)*d

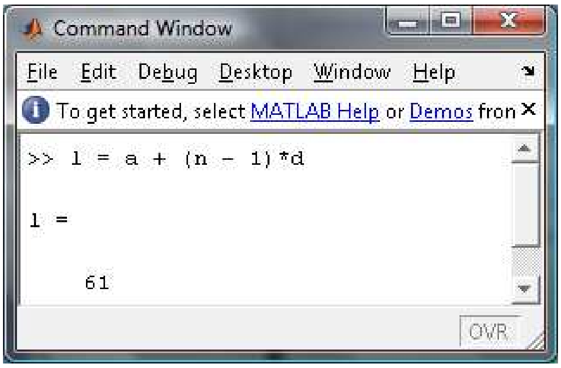


Figura 20.2

Obteniendo el resultado esperado.

Como podemos ver, la práctica trata solamente de ingresar valores y sustituir en una fórmula que nosotros ingresamos, es por eso que procederemos de la misma manera para calcular la *Suma Total.*

Ingresamos la fórmula correspondiente a la Suma, sin olvidarnos de declarar su variable respectiva.

syms s

s = (n/2)*(a+l)

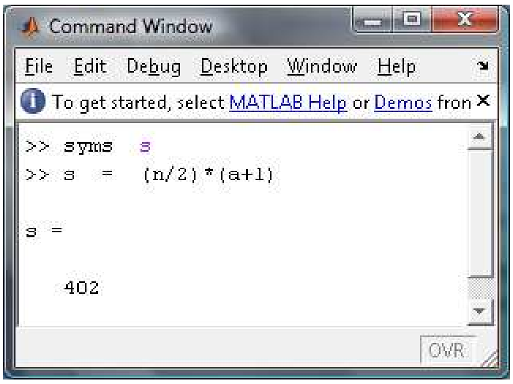


Figura 20.3

20.1.2 Progresiones Geométricas:

Sabiendo que una progresión geométrica es una sucesión de *términos* y en donde cualquier término posterior al primero puede ser obtenido del anterior, usando la fórmula:

$$l = ar^{n-1}$$

Por ejemplo:

Encontrar el 10° término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: 4, 8, 16, 32, . . .

Donde:

a = primer término = 4

r = razón = 2

n = último término = 10

Procederemos de la misma manera que con las progresiones aritméticas; así:

- Declaramos las variables que vamos a utilizar en la fórmula.

syms l a r n

- Asignamos los valores conocidos a las variables respectivas.

a = 4

r = 2

n = 10

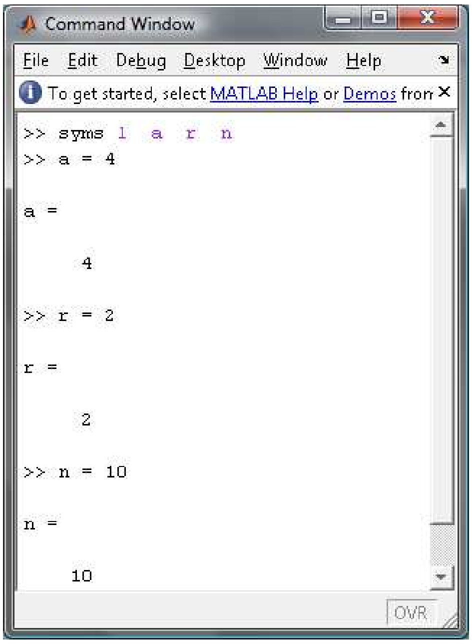


Figura 20.4

- Ingresamos la fórmula que corresponde.

l = a * r ^(n-1)

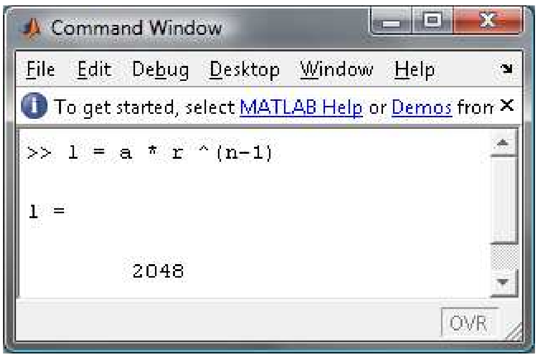


Figura 20.5

- La suma la obtenemos ingresando la fórmula respectiva, sin olvidarnos de declarar la variable que usaremos.

syms s

s = (r*l - a)/(r - 1)

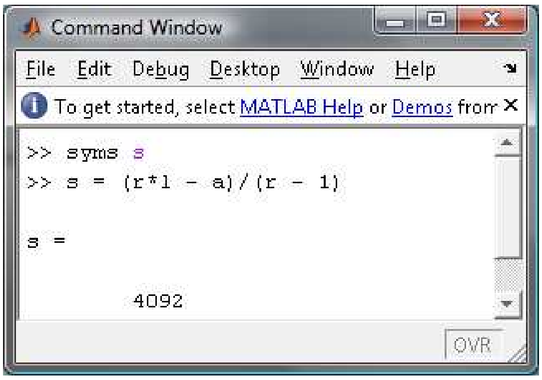


Figura 20.6

Obteniendo los resultados que esperábamos.

20.1.3 Interés Simple:

Para calcular el interés simple usaremos las fórmulas:

$$I = Cit$$

$$S = C(1 + it)$$

Y para resolver ejercicios de interés simple, procederemos de la misma manera que con las progresiones;

Por ejemplo:

Encontrar el valor presente, al 6% de interés simple, de $1500 con vencimiento en 9 meses. Ejemplo 8 de la pág. 43.

Donde:

S = 1500

i = 0.06

t = 3/4

Resolveremos de la siguiente manera.

- Declaramos las variables que vamos a usar en la fórmula.

syms l C i t S

Nota: Sugerimos respetar la disposición de las letras mayúsculas y las minúsculas.

- Ingresamos los valores conocidos en las variables correspondientes.

S = 1500

i = 0.06

t = 3/4

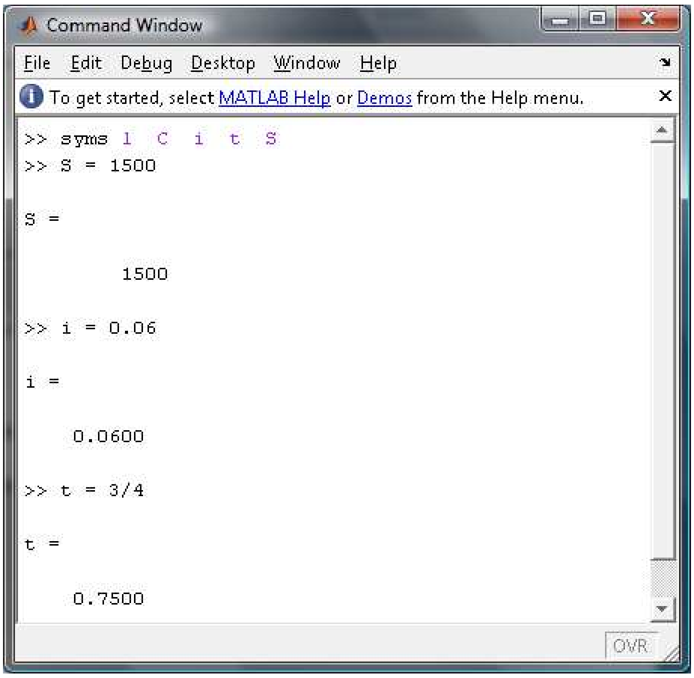


Figura 20.7

- Despejando la Ecuación manualmente, podemos ver que el valor de **"C"** es igual a:

$$C = \frac{S}{(1 + it)}$$

- Ingresamos esta ecuación en la línea de comandos.

C = S/(1 + i*t)

Teniendo como resultado la respuesta esperada.

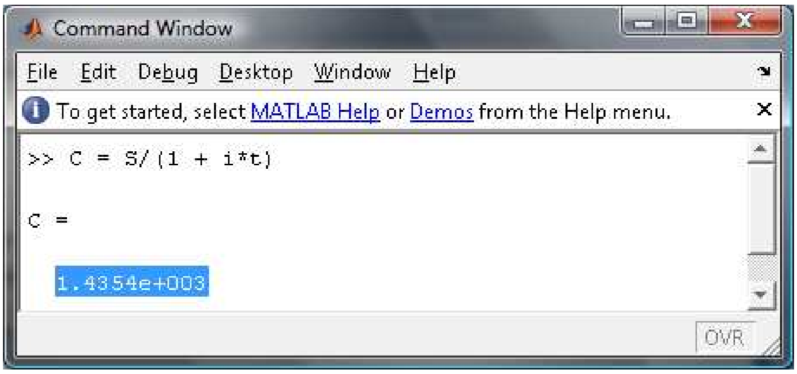


Figura 20.8

20.1.4 Tabla de Montos a Interés Simple y Compuesto

La tabla dada en la página 69 del libro, nos da el monto de **$1** a interés simple y a interés compuesto al **6%.**

Para hallar dicha tabla, usaremos un poco de programación, siguiendo los siguientes pasos:

Damos click en File>New>M-File

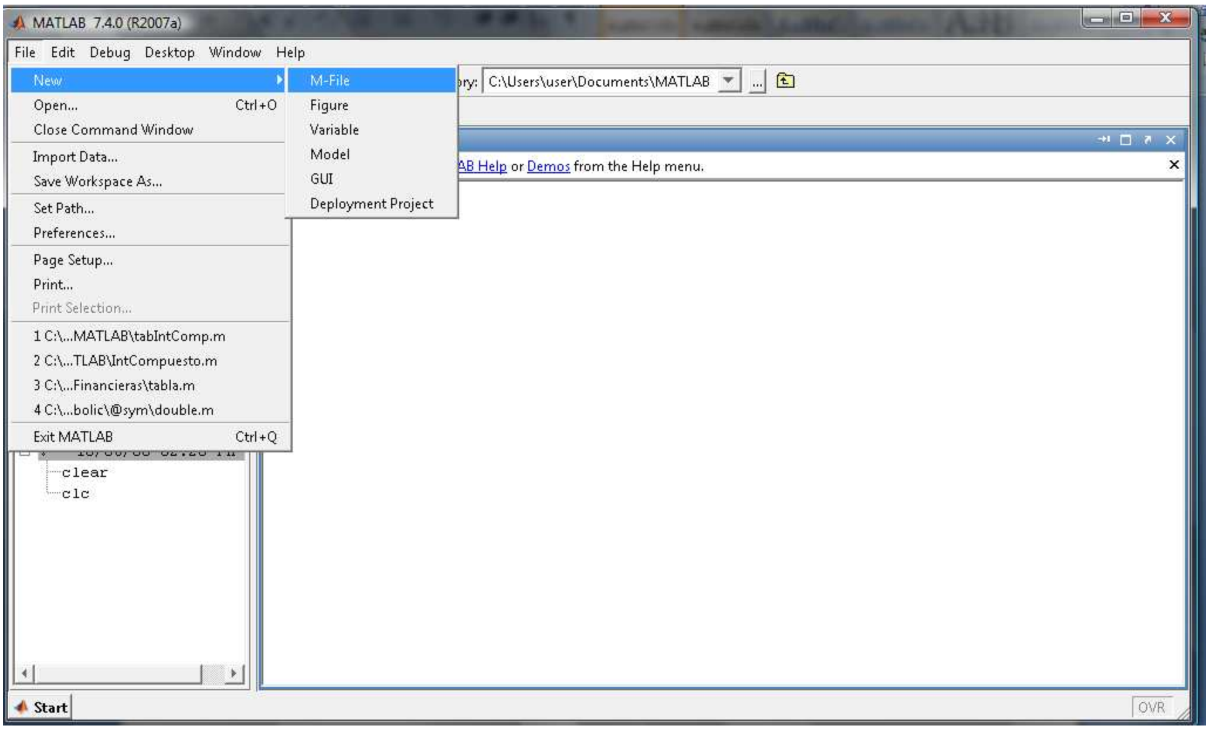


Figura 20.9

Nos aparecerá la siguiente pantalla:

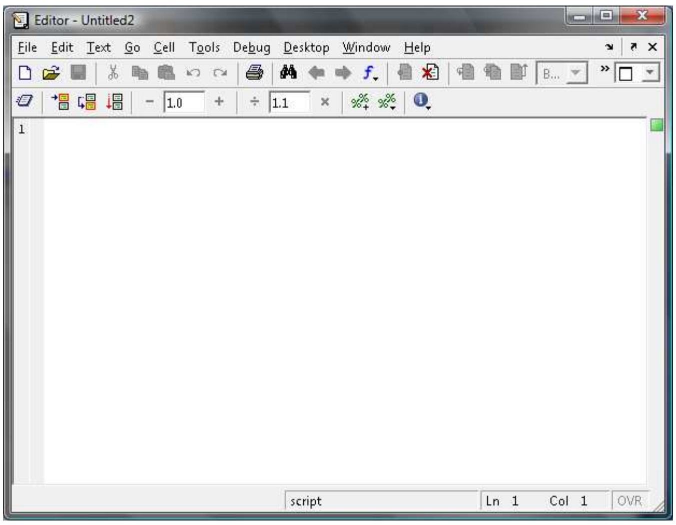


Figura 20.10

Y dentro de la cual digitaremos las siguientes sentencias:

function [tabla]=tabIntComp (monto,periodos,porcentaje)

  for i=1:periodos

tabla(i,1)=i;

tabla(i,2)=monto*(1 + porcentaje/100 *i);

tabla(i,3)=monto*(1 + porcentaje/100)^i;

end

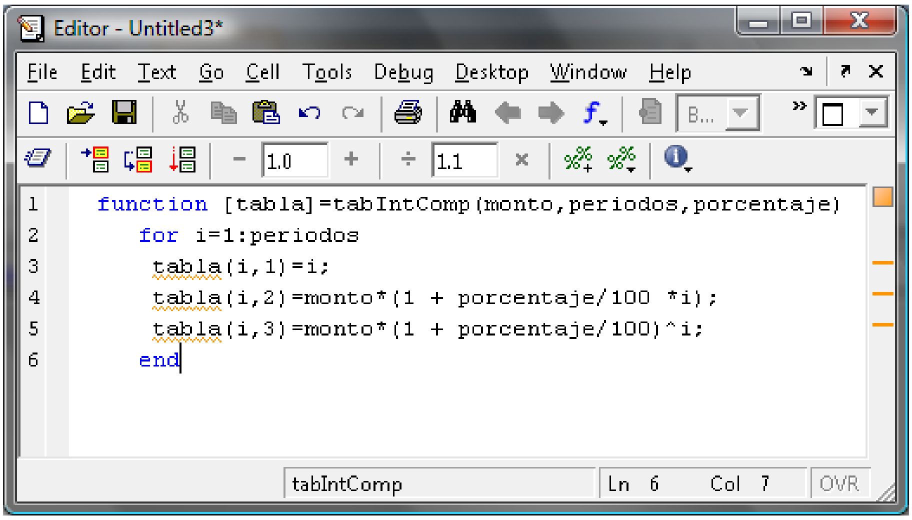


Figura 20.11

Guardamos este archivo en la carpeta llamada **MATLAB**, la misma que se encuentra en la carpeta **Mis Documentos.**

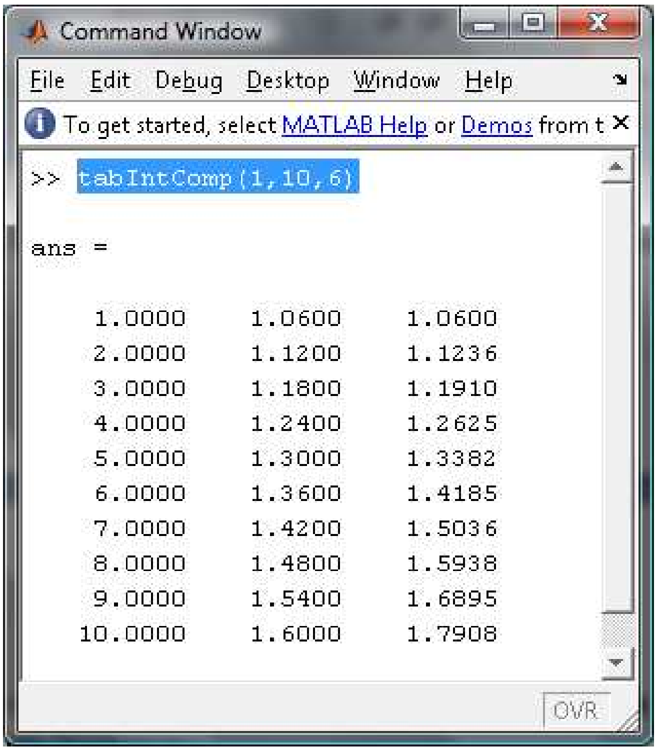
Nota: Es estrictamente necesario escribir tal como se muestra en la figura, de lo contrario no funcionará el programa.

Para mostrar los resultados, en el **command window** de Matlab escribimos la siguiente sentencia:

tabIntComp(1,10,6)

Donde 1, 10 y 6 corresponden a los valores de monto, numero de periodos y el interés propuesto en el ejercicio, respectivamente.

Obtendremos el siguiente resultado:


Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
To get started, select MATLAB Help or Demos from t
>> tabIntComp(1,10,6)
ans =
1.0000 1.0600 1.0600
2.0000 1.1200 1.1236
3.0000 1.1800 1.1910
4.0000 1.2400 1.2625
5.0000 1.3000 1.3382
6.0000 1.3600 1.4185
7.0000 1.4200 1.5036
8.0000 1.4800 1.5938
9.0000 1.5400 1.6895
10.0000 1.6000 1.7908
OVR
Figura 20.12

CONCLUSIONES

Después de desarrollar este trabajo práctico nos encontramos con varios escenarios y varias alternativas en cada uno de los lenguajes para trabajar con las prácticas.

Algunos ambientes sencillos de realizar y otros un poco más elaborados, es por eso que ahora presentamos un análisis de los dos lenguajes frente a las diversas prácticas que se realizaron.

Análisis de los lenguajes.

Derive tiene una interfaz gráfica que es muy sencilla de interpretar, cuando una persona ya se ha encontrado con aplicaciones del tipo de Derive, podrá darse cuenta muy fácilmente que al trabajar con ésta se puede involucrar con ejercicios desde los más sencillos hasta los más complejos de resolver manualmente.

Funciones que dibujan expresiones de una manera muy sencilla que al mismo tiempo permiten validar el ingreso de la expresión, junto con la ayuda de botones que simplifican la manera de introducir operadores, funciones y demás elementos que intervienen en una expresión, además de una buena visualización de los resultados.

Por otro lado, Matlab es un lenguaje de programación puro, de alto nivel y estructurado, orientado a la resolución de matrices.

No posee una interfaz gráfica tan sencilla de interpretar como la de Derive, sin embargo es muy sencillo de utilizar, y está en capacidad de resolver todo tipo de ejercicios matemáticos, pero como ya dijimos, a diferencia de Derive, no tiene una interfaz de fácil uso, sino que cada expresión o cada ejercicio que se pretenda resolverlo con Matlab se lo deberá hacer completamente desde el teclado, es por eso que también los resultados mostrados por éste, deben ser interpretados de manera exacta haciendo que el razonamiento del estudiante sea un poco más exigido.

Derive y Matlab están en capacidad de graficar funciones en dos y tres dimensiones, con la pequeña restricción que como siempre, Derive muestra una interfaz más amigable y más fácil de interpretar resultados en este caso, de las gráficas.

Matemáticas 1.

Derive.

Cuando se trabaja con ecuaciones e inecuaciones vemos que nos presenta una gran facilidad de desarrollo haciendo uso de un sencillo lenguaje de interpretación de expresiones.

Siendo sencillo el uso de ecuaciones e inecuaciones se hace fácil la resolución de funciones, combinada con la gran herramienta que posee para realizar gráficas de cualquier tipo, lo convierte en una excelente herramienta para graficar funciones.

Si trabajamos con matrices es sencillo obtener todo lo correspondiente a resolución con éstas, por ejemplo la inversa, la transpuesta, el determinante y las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación, división y resolución de ecuaciones.

Matlab.

Matlab está en capacidad de resolver inecuaciones de una manera sencilla, debido a que se torna un poco complejo y demorado realizar el cálculo de éstas, con esto también se vuelve tedioso al momento de trabajar con sus gráficas; sin embargo es muy útil al momento de resolver ecuaciones, y, debido a que tiene una gran herramienta para realizar gráficas de cualquier tipo de funciones, se vuelve también sencillo realizar las gráficas de las mismas.

Matemáticas 2.

Derive.

Gracias a que el trabajo con ecuaciones, inecuaciones es sencillo por sus herramientas, la resolución de derivadas en éste lenguaje también resulta sencillo, ya que aquí usamos las mismas herramientas, y la interpretación de expresiones es también muy básica y sencilla.

Cuando resolvemos ejercicios de éste tipo, Derive nos brinda la oportunidad de revisar el desarrollo de cada uno de los ejercicios paso a paso hasta llegar a la respuesta concreta, esto se logra también con las herramientas que posee.

Matlab.

De la misma manera que cuando trabajamos con ecuaciones en Matlab, la resolución de Derivadas se la trabaja de una manera muy similar, el ingreso de las expresiones se lo hace netamente desde el teclado, de la misma manera, existen funciones apropiadas para resolver ejercicios de derivadas y similares, a las cuales también el tratamiento y el ingreso se lo hace desde el teclado.

Los ejercicios de Derivadas, no son más que funciones, a las cuales la computadora las tratará de diferente manera, según como le ordenemos que actúe, entonces, resulta también sencillo realizar las gráficas de éstas funciones gracias a todos los comandos y funciones que el propio lenguaje nos brinda.

Matemáticas 3.

Derive.

Este lenguaje tiene una excelente herramienta la cual permite realizar el bosquejo de las diversas gráficas en tres dimensiones.

Debido a su interfaz grafica la resolución de integrales tanto definidas como indefinidas es fácil de realizar para el estudiante.

Al igual como en las derivadas, Derive permiten ver las reglas utilizadas en la resolución de cualquier tipo de integrales.

Matlab.

El tratamiento es el mismo que cuando se trabaja con integrales, de la misma manera, el ingreso de las expresiones se las realiza completamente desde el teclado, y con las funciones y comandos que nos ofrece, resulta muy sencillo realizar el cálculo de integrales y todo el alcance de éstas; teniendo la oportunidad de resolver paso a paso un ejercicio de este tipo, y ver aquí reflejado la utilidad práctica de la computadora frente a ejercicios complejos de resolver manualmente.

Matemáticas 4.

Derive.

Por lo fácil que resulta realizar el bosquejo de inecuaciones, en éste lenguaje es posible obtener el área de intersección entre diversas curvas y líneas.

Las herramientas que son otorgadas por el lenguaje son excelentes ya que están a la vista del usuario y es fácil de captarlas.

Derive tiene funciones para ayudar en la resolución de varios temas entre los cuales se encuentran para la resolución del método simplex.

Matlab.

Al desarrollar estos ejercicios, vemos que Matlab, tiene varias opciones para resolverlos, sin embargo, en este paso se ve un poco impotente si lo comparamos con Derive, debido a que tras realizar pruebas con los ejercicios, no resulta efectivo al momento de mostrar los resultados, o simplemente, en la mayoría de los casos, no puede resolverlos, y aplicar un método más avanzado para llegar a la respuesta, resulta un tanto complicado porque estaríamos haciendo uso de herramientas que para este tutorial no tiene competencia, además que estaríamos dejando de usar lo que normalmente hemos venido usando.

Matemáticas Financieras.

Derive y Matlab.

Cuando trabajamos con ejercicios que se aplican a las Matemáticas financieras, tales como las Progresiones Aritméticas y Geométricas, el cálculo de los Intereses, etc.

Podemos ver que lo único que nos queda por hacer es aplicar las fórmulas que se proponen para cada uno de ellos, esto, junto con el deseo para que los estudiantes apliquen la lógica que trae consigo al utilizar un método informático y combinado con la base en la que decimos que no se pretende enseñar matemáticas sino mas bien aplicar las matemáticas con las computadoras, nos ha llevado a concluir que resulta muy sencillo con cualquiera de los lenguajes llegar a resolver ejercicios de Matemáticas Financieras.

BIBLIOGRAFIA

- Matemáticas para Administración y Economía, Ernest F. Haeussler, Jr – Richard S. Paúl. Décima edición. Editorial: Pearson - Prentice Hall, México 2003.
- Jagdish, C. Arya, Matemáticas aplicadas a la Administración y Economía, Cuarta edición , Editorial Pearson, Mexico 2002
- Matemáticas Financieras

  Frank Ayres, Jr
- Manual del software Derive

  www.msmiami.com

  http://www.upv.es/derive/
- Manual del software Matlab

  www.mathworks.com

  http://www.mathworks.es/products/matlab/